Wybrane metody algebraiczne
Wykład 8 - zastosowanie teorii reprezentacji

Andrzej Sładek
sladek@ux2.math.us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Rozważamy cząsteczkę złożoną z n atomów, która wibruje pod wpływem sił wewnętrznych.

Rozważamy cząsteczkę złożoną z n atomów, która wibruje pod wpływem sił wewnętrznych. W położeniu równowagi każdemu atomowi przyjmujemy trzy osie współrzędnych, które wykorzystujemy do mierzenia zmiany położenia atomu.

Rozważamy cząsteczkę złożoną z n atomów, która wibruje pod wpływem sił wewnętrznych. W położeniu równowagi każdemu atomowi przyjmujemy trzy osie współrzędnych, które wykorzystujemy do mierzenia zmiany położenia atomu. Zatem stan cząsteczki jest opisany przez wektor x o $3n$ współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^{3n}$.

Rozważamy cząsteczkę złożoną z n atomów, która wibruje pod wpływem sił wewnętrznych. W położeniu równowagi każdemu atomowi przyjmujemy trzy osie współrzędnych, które wykorzystujemy do mierzenia zmiany położenia atomu. Zatem stan cząsteczki jest opisany przez wektor x o $3n$ współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^{3n}$. Przyjmujemy, że siły wewnętrzne działają liniowo na przemieszczenia.

Rozważamy cząsteczkę złożoną z n atomów, która wibruje pod wpływem sił wewnętrznych. W położeniu równowagi każdemu atomowi przyjmujemy trzy osie współrzędnych, które wykorzystujemy do mierzenia zmiany położenia atomu. Zatem stan cząsteczki jest opisany przez wektor x o $3n$ współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^{3n}$. Przyjmujemy, że siły wewnętrzne działają liniowo na przemieszczenia. Prowadzi to do równania różniczkowego

$$\ddot{x} = Ax,$$

gdzie A jest symetryczną macierzą rzeczywistą stopnia $3n$ o wyrazach wyznaczonych przez siły wewnętrzne.

Rozważamy cząsteczkę złożoną z n atomów, która wibruje pod wpływem sił wewnętrznych. W położeniu równowagi każdemu atomowi przyjmujemy trzy osie współrzędnych, które wykorzystujemy do mierzenia zmiany położenia atomu. Zatem stan cząsteczki jest opisany przez wektor x o $3n$ współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^{3n}$. Przyjmujemy, że siły wewnętrzne działają liniowo na przemieszczenia. Prowadzi to do równania różniczkowego

$$\ddot{x} = Ax,$$

gdzie A jest symetryczną macierzą rzeczywistą stopnia $3n$ o wyrazach wyznaczonych przez siły wewnętrzne.

Uwaga Wartości własne macierzy A są rzeczywiste i macierz ta jest diagonalizowalna.

Rozważamy cząsteczkę złożoną z n atomów, która wibruje pod wpływem sił wewnętrznych. W położeniu równowagi każdemu atomowi przyjmujemy trzy osie współrzędnych, które wykorzystujemy do mierzenia zmiany położenia atomu. Zatem stan cząsteczki jest opisany przez wektor x o $3n$ współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^{3n}$. Przyjmujemy, że siły wewnętrzne działają liniowo na przemieszczenia. Prowadzi to do równania różniczkowego

$$\ddot{x} = Ax,$$

gdzie A jest symetryczną macierzą rzeczywistą stopnia $3n$ o wyrazach wyznaczonych przez siły wewnętrzne.

Uwaga Wartości własne macierzy A są rzeczywiste i macierz ta jest diagonalizowalna.

Twierdzenie

Rozwiązanie ogólne powyższego równania różniczkowego jest kombinacja liniową następujących rozwiązań:

- $\sin(\omega t + \beta)u$, gdzie $-\omega^2$ jest niezerową wartością własną macierzy A, a u jest wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej.

Rozważamy cząsteczkę złożoną z n atomów, która wibruje pod wpływem sił wewnętrznych. W położeniu równowagi każdemu atomowi przyjmujemy trzy osie współrzędnych, które wykorzystujemy do mierzenia zmiany położenia atomu. Zatem stan cząsteczki jest opisany przez wektor x o $3n$ współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^{3n}$. Przyjmujemy, że siły wewnętrzne działają liniowo na przemieszczenia. Prowadzi to do równania różniczkowego

$$\ddot{x} = Ax,$$

gdzie A jest symetryczną macierzą rzeczywistą stopnia $3n$ o wyrazach wyznaczonych przez siły wewnętrzne.

Uwaga Wartości własne macierzy A są rzeczywiste i macierz ta jest diagonalizowalna.

Twierdzenie

Rozwiązanie ogólne powyższego równania różniczkowego jest kombinacja liniową następujących rozwiązań:

- $\sin(\omega t + \beta)u$, gdzie $-\omega^2$ jest niezerową wartością własną macierzy A, a u jest wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej.
- $(t + \beta)u$, gdzie u jest wektorem własnym odpowiadającym zerowej wartości własnej macierzy A (wartości zerowe zawsze występują).

Rozważamy cząsteczkę złożoną z n atomów, która wibruje pod wpływem sił wewnętrznych. W położeniu równowagi każdemu atomowi przyjmujemy trzy osie współrzędnych, które wykorzystujemy do mierzenia zmiany położenia atomu. Zatem stan cząsteczki jest opisany przez wektor x o $3n$ współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^{3n}$. Przyjmujemy, że siły wewnętrzne działają liniowo na przemieszczenia. Prowadzi to do równania różniczkowego

$$\ddot{x} = Ax,$$

gdzie A jest symetryczną macierzą rzeczywistą stopnia $3n$ o wyrazach wyznaczonych przez siły wewnętrzne.

Uwaga Wartości własne macierzy A są rzeczywiste i macierz ta jest diagonalizowalna.

Twierdzenie

Rozwiązanie ogólne powyższego równania różniczkowego jest kombinacja liniową następujących rozwiązań:

- $\sin(\omega t + \beta)u$, gdzie $-\omega^2$ jest niezerową wartością własną macierzy A, a u jest wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej.
- $(t + \beta)u$, gdzie u jest wektorem własnym odpowiadającym zerowej wartości własnej macierzy A (wartości zerowe zawsze występują).

Rozważamy cząsteczkę złożoną z n atomów, która wibruje pod wpływem sił wewnętrznych. W położeniu równowagi każdemu atomowi przyjmujemy trzy osie współrzędnych, które wykorzystujemy do mierzenia zmiany położenia atomu. Zatem stan cząsteczki jest opisany przez wektor x o $3n$ współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^{3n}$. Przyjmujemy, że siły wewnętrzne działają liniowo na przemieszczenia. Prowadzi to do równania różniczkowego

$$\ddot{x} = Ax,$$

gdzie A jest symetryczną macierzą rzeczywistą stopnia $3n$ o wyrazach wyznaczonych przez siły wewnętrzne.

Uwaga Wartości własne macierzy A są rzeczywiste i macierz ta jest diagonalizowalna.

Twierdzenie

Rozwiązanie ogólne powyższego równania różniczkowego jest kombinacja liniową następujących rozwiązań:

- $\sin(\omega t + \beta)u$, gdzie $-\omega^2$ jest niezerową wartością własną macierzy A, a u jest wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej.
- $(t + \beta)u$, gdzie u jest wektorem własnym odpowiadającym zerowej wartości własnej macierzy A (wartości zerowe zawsze występują).

Uwaga Na ogół macierz A jest dużych rozmiarów i trudno znaleźć jej wartości i wektory własne. Użyjemy do tego teorii reprezentacji.

Niech G będzie grupą izometrii cząsteczki. Rozważmy reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^{3n})$, indukowaną przez działanie grupy G na zbiór atomów tej cząsteczki.

Twierdzenie

Dla wszystkich $s \in G$ oraz $x \in \mathbb{R}^{3n}$ zachodzi równość

$$A\rho_s(x) = \rho_s(Ax).$$

Niech G będzie grupą izometrii cząsteczki. Rozważmy reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^{3n})$, indukowaną przez działanie grupy G na zbiór atomów tej cząsteczki.

Twierdzenie

Dla wszystkich $s \in G$ oraz $x \in \mathbb{R}^{3n}$ zachodzi równość

$$A\rho_s(x) = \rho_s(Ax).$$

Wniosek

Endomorfizm przestrzeni $\mathbb{R}^{3n}$ o macierzy A "zachowuje" wszystkie podprzestrzenie G-niezmiennicze.

Niech G będzie grupą izometrii cząsteczki. Rozważmy reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^{3n})$, indukowaną przez działanie grupy G na zbiór atomów tej cząsteczki.

Twierdzenie

Dla wszystkich $s \in G$ oraz $x \in \mathbb{R}^{3n}$ zachodzi równość

$$A\rho_s(x) = \rho_s(Ax).$$

Wniosek

Endomorfizm przestrzeni $\mathbb{R}^{3n}$ o macierzy A "zachowuje" wszystkie podprzestrzenie G-niezmiennicze.

Uwaga Na podstawie powyższego wniosku wystarczy przedstawić $\mathbb{R}^{3n}$ jako sumę prostą podprzestrzeni wyznaczonych przez podreprezentacje nieprzywiedlne reprezentacji ρ i wtedy podprzestrzenie te będa się składały z wektorów własnych macierzy A.

Przykład

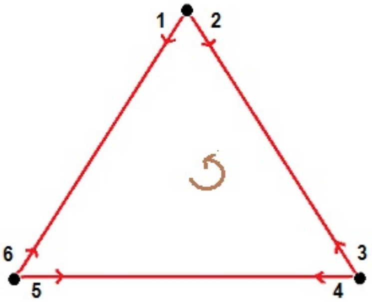
Rozważmy trzyatomową (płaską dla ułatwienia) cząsteczkę o jednakowych atomach ułożonych w wierzchołkach trójkata równobocznego.

Przykład
Rozważmy trzyatomową (płaską dla ułatwienia) cząsteczkę o jednakowych atomach ułożonych w wierzchołkach trójkata równobocznego.
Umieśćmy w każdym atomie układ współrzędnych tak jak na poniższym rysunku.

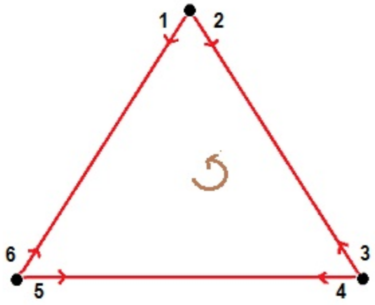
Przykład

Rozważmy trzyatomową (płaską dla ułatwienia) cząsteczkę o jednakowych atomach ułożonych w wierzchołkach trójkata równobocznego.

Umieśćmy w każdym atomie układ współrzędnych tak jak na poniższym rysunku.



Przykład
Rozważmy trzyatomową (płaską dla ułatwienia) cząsteczkę o jednakowych atomach ułożonych w wierzchołkach trójkata równobocznego.
Umieśćmy w każdym atomie układ współrzędnych tak jak na poniższym rysunku.

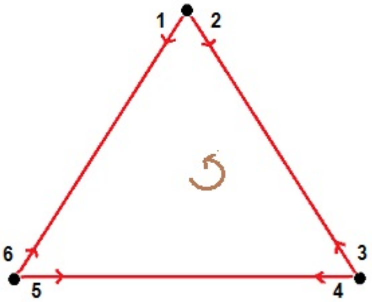


Wtedy położenie cząsteczki opisane jest wektorem $x = (x_1, ..., x_6) \in \mathbb{R}^6$,

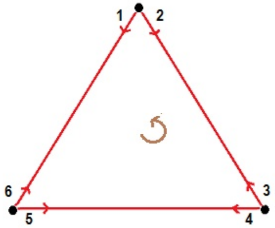
Przykład

Rozważmy trzyatomową (płaską dla ułatwienia) cząsteczkę o jednakowych atomach ułożonych w wierzchołkach trójkata równobocznego.

Umieśćmy w każdym atomie układ współrzędnych tak jak na poniższym rysunku.



Wtedy położenie cząsteczki opisane jest wektorem $x = (x_1, ..., x_6) \in \mathbb{R}^6$, a grupa izometrii tej cząsteczki jest równa $D(3)$.



Tabelka przedstawia działanie reprezentacji ρ na wektory bazowe $e_1, \ldots, e_6$.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

,

gdzie a jest obrotem o kąt $\pi/3$, a b symetrią względem wysokości poprowadzonej z "górnego" wierzchołka.

Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ.

Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ.
Patrząc na tabelę

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

mamy

$$\chi(1) =$$

Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ.
Patrząc na tabelę

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

mamy

$$\chi(1) = 6, \;\; \chi(a) =$$

Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ.
Patrząc na tabelę

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

mamy

$$\chi(1) = 6, \ \ \chi(a) = 0, \ \ \chi(a^2) =$$

Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ.
Patrząc na tabelę

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

mamy

$$\chi(1) = 6, \;\; \chi(a) = 0, \;\; \chi(a^2) = 0, \;\; \chi(b) =$$

Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ.
Patrząc na tabelę

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

mamy

$$\chi(1) = 6, \;\; \chi(a) = 0, \;\; \chi(a^2) = 0, \;\; \chi(b) = 0, \;\; \chi(ab) = \chi(a^2 b) = 0.$$

Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ.
Patrząc na tabelę

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

mamy

$$\chi(1) = 6, \ \ \chi(a) = 0, \ \ \chi(a^2) = 0, \ \ \chi(b) = 0, \ \ \chi(ab) = \chi(a^2b) = 0.$$

Zatem

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ.
Patrząc na tabelę

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

mamy

$$\chi(1) = 6, \;\; \chi(a) = 0, \;\; \chi(a^2) = 0, \;\; \chi(b) = 0, \;\; \chi(ab) = \chi(a^2b) = 0.$$

Zatem

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Obliczmy obrazy rzutowań p_1, p_2, p_3.

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Obliczmy obrazy rzutowań p_1, p_2, p_3.

$$p_1(\mathbb{R}^6) = \mathrm{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6),$$

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Obliczmy obrazy rzutowań p_1, p_2, p_3.

$$p_1(\mathbb{R}^6) = \mathrm{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6), \quad p_2(\mathbb{R}^6) = \mathrm{lin}(e_1 + e_5 + e_3 - e_2 - e_4 - e_6).$$

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Obliczmy obrazy rzutowań p_1, p_2, p_3.

$$p_1(\mathbb{R}^6) = \mathrm{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6), \quad p_2(\mathbb{R}^6) = \mathrm{lin}(e_1 + e_5 + e_3 - e_2 - e_4 - e_6).$$

Z rzutowaniem

$$p_3 = \frac{2}{6}(2\rho_1 - \rho_a - \rho_{a^2})$$

jest więcej kłopotu, bo wymiar jego obrazu jest równy 4.

Z wcześniejszych tabel potrzebujemy następujace informacje:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2

oraz

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
χ_3	2	-1	-1	0	0	0

Z wcześniejszych tabel potrzebujemy następujace informacje:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2

oraz

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
χ_3	2	-1	-1	0	0	0

Ponieważ

$$p_3 = \frac{2}{6}(2\rho_1 - \rho_a - \rho_{a^2}),$$

więc

$$p_3(\mathbb{R}^6) = \mathrm{lin}(2e_1 - e_5 - e_3, 2e_2 - e_6 - e_4, 2e_3 - e_1 - e_5, 2e_4 - e_2 - e_6, 2e_5 - e_3 - e_1, 2e_6 - e_4 - e_2) =$$

Z wcześniejszych tabel potrzebujemy następujace informacje:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2

oraz

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
χ_3	2	-1	-1	0	0	0

Ponieważ

$$p_3 = \frac{2}{6}(2\rho_1 - \rho_a - \rho_{a^2}),$$

więc

$$p_3(\mathbb{R}^6) = \mathrm{lin}(2e_1 - e_5 - e_3, 2e_2 - e_6 - e_4, 2e_3 - e_1 - e_5, 2e_4 - e_2 - e_6, 2e_5 - e_3 - e_1, 2e_6 - e_4 - e_2) =$$

$$= \mathrm{lin}(\alpha_1 = 2e_1 - e_5 - e_3, \alpha_2 = 2e_2 - e_6 - e_4, \alpha_3 = 2e_3 - e_1 - e_5, \alpha_4 = 2e_4 - e_2 - e_6).$$

Z rozważań "fizycznych" w naszym przypadku

$$A = \frac{-k}{m}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Z rozważań "fizycznych" w naszym przypadku

$$A = \frac{-k}{m} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że wektor bazowy $e_1 + ... + e_6$ podprzestrzeni $p_1(\mathbb{R}^6)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej $\frac{-3k}{m}$,

Z rozważań "fizycznych" w naszym przypadku

$$A = \frac{-k}{m} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że wektor bazowy $e_1 + ... + e_6$ podprzestrzeni $p_1(\mathbb{R}^6)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej $\frac{-3k}{m}$,

a wektor bazowy $e_1 + e_5 + e_3 - e_2 - e_4 - e_6$ podprzestrzeni $p_2(\mathbb{R}^6)$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej 0.

Podprzestrzeń $p_3(\mathbb{R}^6)$ ma następujący rozkład na sumę prostą podprzestrzeni G-niezmienniczych, na każdej z których reprezentacja indukuje podreprezentacje nieprzywiedlne o charakterze χ_3 (trzeba dokonać rozkładu składowej jednorodnej V_3):

$p_3(\mathbb{R}^6) = \mathrm{lin}((e_1 + e_2 - e_4 - e_5, -e_1 + e_3 + e_4 - e_6) \oplus \mathrm{lin}(e_1 + e_4 - e_5 - e_6, e_1 + e_2 - e_3 - e_6).$

Wektory

$$e_1 + e_2 - e_4 - e_5 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3 - \frac{1}{3}\alpha_4$$

$$-e_1 + e_3 + e_4 - e_6 = -\frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3 + \frac{2}{3}\alpha_4$$

są wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej $\frac{-3k}{2m}$, natomiast wektory

$$e_1 + e_4 - e_5 - e_6 = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3 + \frac{2}{3}\alpha_4$$

$$e_1 + e_2 - e_3 - e_6 = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{1}{3}\alpha_3 + \frac{1}{3}\alpha_4$$

są wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej 0.