Wybrane metody algebraiczne
Wykład 7 - kanoniczny rozkład reprezentacji, cz. 1

Andrzej Sładek
sladek@ux2.math.us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech $\chi_1, ..., \chi_k$ będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W_1), ..., \rho^k : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W_k)$$

grupy G.

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech $\chi_1, ..., \chi_k$ będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W_1), ..., \rho^k : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W_k)$$

grupy G. Niech $n_1, ..., n_k$ będą stopniami tych reprezentacji.

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech $\chi_1, ..., \chi_k$ będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W_1), ..., \rho^k : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W_k)$$

grupy G. Niech $n_1, ..., n_k$ będą stopniami tych reprezentacji. Ponadto niech

$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_m$$

będzie rozkładem przestrzeni V na sumę prostą podprzestrzeni odpowiadającym podreprezentacjom nieprzywiedlnym.

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech $\chi_1, ..., \chi_k$ będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \longrightarrow \text{Aut}(W_1), ..., \rho^k : G \longrightarrow \text{Aut}(W_k)$$

grupy G. Niech $n_1, ..., n_k$ będą stopniami tych reprezentacji. Ponadto niech

$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_m$$

będzie rozkładem przestrzeni V na sumę prostą podprzestrzeni odpowiadającym podreprezentacjom nieprzywiedlnym.
Dla $i = 1, ..., k$ niech V_i oznacza sumę prostą tych spośród podreprezentacji wyznaczonych przez $U_1, ..., U_m$, które są równoważne z ρ^i.

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \longrightarrow \operatorname{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech $\chi_1, ..., \chi_k$ będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \longrightarrow \operatorname{Aut}(W_1), ..., \rho^k : G \longrightarrow \operatorname{Aut}(W_k)$$

grupy G. Niech $n_1, ..., n_k$ będą stopniami tych reprezentacji. Ponadto niech

$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_m$$

będzie rozkładem przestrzeni V na sumę prostą podprzestrzeni odpowiadającym podreprezentacjom nieprzywiedlnym.
Dla $i = 1, ..., k$ niech V_i oznacza sumę prostą tych spośród podreprezentacji wyznaczonych przez $U_1, ..., U_m$, które są równoważne z ρ^i.
Mamy

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_k, \ \ \chi = l_1\chi_1 + ... + l_k\chi_k,$$

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech $\chi_1, ..., \chi_k$ będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W_1), ..., \rho^k : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W_k)$$

grupy G. Niech $n_1, ..., n_k$ będą stopniami tych reprezentacji. Ponadto niech

$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_m$$

będzie rozkładem przestrzeni V na sumę prostą podprzestrzeni odpowiadającym podreprezentacjom nieprzywiedlnym.
Dla $i = 1, ..., k$ niech V_i oznacza sumę prostą tych spośród podreprezentacji wyznaczonych przez $U_1, ..., U_m$, które są równoważne z ρ^i.
Mamy

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_k, \ \ \chi = l_1\chi_1 + ... + l_k\chi_k,$$

(pewne V_i mogą być podprzestrzeniami zerowymi; wtedy $l_i = 0$).

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech $\chi_1, ..., \chi_k$ będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W_1), ..., \rho^k : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W_k)$$

grupy G. Niech $n_1, ..., n_k$ będą stopniami tych reprezentacji. Ponadto niech

$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_m$$

będzie rozkładem przestrzeni V na sumę prostą podprzestrzeni odpowiadającym podreprezentacjom nieprzywiedlnym.
Dla $i = 1, ..., k$ niech V_i oznacza sumę prostą tych spośród podreprezentacji wyznaczonych przez $U_1, ..., U_m$, które są równoważne z ρ^i.
Mamy

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_k, \quad \chi = l_1\chi_1 + ... + l_k\chi_k,$$

(pewne V_i mogą być podprzestrzeniami zerowymi; wtedy $l_i = 0$).
Podprzestrzeń V_i nazywamy **składową jednorodną**.

Twierdzenie

1. Rozkład $V = V_1 \oplus ... \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.

Twierdzenie

1. Rozkład $V = V_1 \oplus ... \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
2. Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i}(s) \rho_s.$$

Twierdzenie

1. Rozkład $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
2. Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i}(s) \rho_s.$$

Twierdzenie

1. Rozkład $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
2. Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem
$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i}(s) \rho_s.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić część drugą.

Twierdzenie

1. Rozkład $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
2. Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i}(s) \rho_s.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić część drugą.

Niech $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(s) = \frac{n_i}{|G|} \overline{\chi_i}(s)$ dla $s \in G$.

Twierdzenie

1. Rozkład $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
2. Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem
$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i}(s)\rho_s.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić część drugą.

Niech $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(s) = \frac{n_i}{|G|}\overline{\chi_i}(s)$ dla $s \in G$. Funkcja f jest funkcją centralną.

Twierdzenie

1. Rozkład $V = V_1 \oplus ... \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
2. Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem
$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i}(s) \rho_s.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić część drugą.

Niech $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(s) = \frac{n_i}{|G|}\overline{\chi_i}(s)$ dla $s \in G$. Funkcja f jest funkcją centralną.
Wtedy na podstawie stwierdzenia z wcześniejszego wykładu ograniczenie odwzorowania

$$p_i = \rho_f = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i}(s)\rho_s$$

do podreprezentacji nieprzywiedlnej o charakterze χ, mającej stopień n, jest homotetią

Twierdzenie

1. Rozkład $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
2. Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem
$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i}(s) \rho_s.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić część drugą.

Niech $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(s) = \frac{n_i}{|G|}\overline{\chi_i}(s)$ dla $s \in G$. Funkcja f jest funkcją centralną. Wtedy na podstawie stwierdzenia z wcześniejszego wykładu ograniczenie odwzorowania

$$p_i = \rho_f = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i}(s)\rho_s$$

do podreprezentacji nieprzywiedlnej o charakterze χ, mającej stopień n, jest homotetią o współczynniku

$$\lambda_i = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi}) = \frac{|G|}{n} \sum_{s \in G} \frac{n_i}{|G|^2}\overline{\chi_i}(s)\chi(s) = \frac{n_i}{n}(\chi_i|\chi) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \chi \neq \chi_i \\ 1, & \text{gdy } \chi = \chi_i \end{cases}.$$

Twierdzenie

1. Rozkład $V = V_1 \oplus ... \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
2. Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem
$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i}(s) \rho_s.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić część drugą.

Niech $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(s) = \frac{n_i}{|G|}\overline{\chi_i}(s)$ dla $s \in G$. Funkcja f jest funkcją centralną.
Wtedy na podstawie stwierdzenia z wcześniejszego wykładu ograniczenie odwzorowania

$$p_i = \rho_f = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i}(s)\rho_s$$

do podreprezentacji nieprzywiedlnej o charakterze χ, mającej stopień n, jest homotetią o współczynniku

$$\lambda_i = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi}) = \frac{|G|}{n} \sum_{s \in G} \frac{n_i}{|G|^2} \overline{\chi_i}(s)\chi(s) = \frac{n_i}{n}(\chi_i|\chi) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \chi \neq \chi_i \\ 1, & \text{gdy } \chi = \chi_i \end{cases}.$$

Zatem p_i jest tożsamością na V_i i odwzorowaniem zerowym na V_j dla $j \neq i$ ♣.

Przykład 1

Przypuśćmy, że grupa G działa na zbiorze X.

Przykład 1

Przypuśćmy, że grupa G działa na zbiorze X. Rozważmy reprezentację permutacyjną związaną z tym działaniem, tzn.

$$V = \mathrm{lin}((e_x)_{x \in X}), \ \ \rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V), \ \ \rho_s(e_x) = e_{sx} \text{ dla } s \in G, \ x \in X.$$

Przykład 1

Przypuśćmy, że grupa G działa na zbiorze X. Rozważmy reprezentację permutacyjną związaną z tym działaniem, tzn.

$$V = \mathrm{lin}((e_x)_{x \in X}), \;\; \rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V), \;\; \rho_s(e_x) = e_{sx} \text{ dla } s \in G, \; x \in X.$$

Wtedy, jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(s) = |\mathrm{Fix}(s)|$.

Przykład 1

Przypuśćmy, że grupa G działa na zbiorze X. Rozważmy reprezentację permutacyjną związaną z tym działaniem, tzn.

$$V = \mathrm{lin}((e_x)_{x \in X}), \;\; \rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V), \;\; \rho_s(e_x) = e_{sx} \text{ dla } s \in G, \; x \in X.$$

Wtedy, jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(s) = |\mathrm{Fix}(s)|$.
Przyjrzyjmy się sytuacjom szczególnym.

Przykład 1
Przypuśćmy, że grupa G działa na zbiorze X. Rozważmy reprezentację permutacyjną związaną z tym działaniem, tzn.

$$V = \operatorname{lin}((e_x)_{x\in X}), \ \ \rho : G \longrightarrow \operatorname{Aut}(V), \ \ \rho_s(e_x) = e_{sx} \text{ dla } s \in G, \ x \in X.$$

Wtedy, jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(s) = |\operatorname{Fix}(s)|$.
Przyjrzyjmy się sytuacjom szczególnym.

Przykład 1a
Niech $G < S(n)$, $X = \{1, ..., n\}$ oraz działanie grupy G na zbiorze X niech będzie określone następująco:

$$\sigma i = \sigma(i) \text{ dla } \sigma \in G, \ i \in X,$$

Przykład 1

Przypuśćmy, że grupa G działa na zbiorze X. Rozważmy reprezentację permutacyjną związaną z tym działaniem, tzn.

$$V = \mathrm{lin}((e_x)_{x\in X}), \ \ \rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V), \ \ \rho_s(e_x) = e_{sx} \text{ dla } s \in G, \ x \in X.$$

Wtedy, jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(s) = |\mathrm{Fix}(s)|$.
Przyjrzyjmy się sytuacjom szczególnym.

Przykład 1a

Niech $G < S(n)$, $X = \{1, ..., n\}$ oraz działanie grupy G na zbiorze X niech będzie określone następująco:

$$\sigma i = \sigma(i) \text{ dla } \sigma \in G, \ i \in X,$$

tzn.

$$\rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \text{ dla } \sigma \in G, \ i \in X.$$

Przykład 1
Przypuśćmy, że grupa G działa na zbiorze X. Rozważmy reprezentację permutacyjną związaną z tym działaniem, tzn.

$$V = \text{lin}((e_x)_{x \in X}), \ \ \rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V), \ \ \rho_s(e_x) = e_{sx} \text{ dla } s \in G, \ x \in X.$$

Wtedy, jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(s) = |\text{Fix}(s)|$.
Przyjrzyjmy się sytuacjom szczególnym.

Przykład 1a
Niech $G < S(n)$, $X = \{1, ..., n\}$ oraz działanie grupy G na zbiorze X niech będzie określone następująco:

$$\sigma i = \sigma(i) \text{ dla } \sigma \in G, \ i \in X,$$

tzn.

$$\rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)} \text{ dla } \sigma \in G, \ i \in X.$$

Wtedy

$$\chi(\sigma) = |\text{Fix}(\sigma)| = n - |\text{supp}(\sigma)|.$$

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1,2,3,4)$, $b = (1,2)(3,4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ								

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4							

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1,2,3,4)$, $b = (1,2)(3,4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0						

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1,2,3,4)$, $b = (1,2)(3,4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0					

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1,2,3,4)$, $b = (1,2)(3,4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0				

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1,2,3,4)$, $b = (1,2)(3,4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0			

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2		

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1,2,3,4)$, $b = (1,2)(3,4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

Zatem

$$\chi =$$

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1,2,3,4)$, $b = (1,2)(3,4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2b\}$, $\{ab, a^3b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

Zatem

$$\chi = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5 \quad \text{i} \quad V = V_1 \oplus V_4 \oplus V_5.$$

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1,2,3,4)$, $b = (1,2)(3,4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

Zatem

$$\chi = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5 \quad \text{i} \quad V = V_1 \oplus V_4 \oplus V_5.$$

Wyliczamy na tablicy poszczególne składowe jednorodne.

$V_1 =$

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

Zatem

$$\chi = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5 \quad \text{i} \quad V = V_1 \oplus V_4 \oplus V_5.$$

Wyliczamy na tablicy poszczególne składowe jednorodne.

$V_1 = \mathrm{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$,

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1,2,3,4)$, $b = (1,2)(3,4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2b\}$, $\{ab, a^3b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

Zatem

$$\chi = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5 \quad \text{i} \quad V = V_1 \oplus V_4 \oplus V_5.$$

Wyliczamy na tablicy poszczególne składowe jednorodne.

$$V_1 = \mathrm{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4), \quad V_4 =$$

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

Zatem

$$\chi = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5 \quad \text{i} \quad V = V_1 \oplus V_4 \oplus V_5.$$

Wyliczamy na tablicy poszczególne składowe jednorodne.

$$V_1 = \mathrm{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4), \quad V_4 = \mathrm{lin}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4),$$

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

Zatem

$$\chi = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5 \quad \text{i} \quad V = V_1 \oplus V_4 \oplus V_5.$$

Wyliczamy na tablicy poszczególne składowe jednorodne.

$$V_1 = \mathrm{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4), \quad V_4 = \mathrm{lin}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4), \quad V_5 =$$

Przykładowo rozważmy grupę $G = D(4) < S(4)$.
Jej generatorami są $a = (1,2,3,4)$, $b = (1,2)(3,4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$D(4)$	1	a	a^2	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

Zatem

$$\chi = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5 \quad \text{i} \quad V = V_1 \oplus V_4 \oplus V_5.$$

Wyliczamy na tablicy poszczególne składowe jednorodne.

$$V_1 = \mathrm{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4), \quad V_4 = \mathrm{lin}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4), \quad V_5 = \mathrm{lin}(e_1 - e_3, e_2 - e_4).$$

Przykład 1b

Grupa G działa na $X = G$ za pomocą automorfizmów wewnętrznych, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sgs^{-1}} \text{ dla } g, s \in G.$$

Przykład 1b

Grupa G działa na $X = G$ za pomocą automorfizmów wewnętrznych, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sgs^{-1}} \text{ dla } g, s \in G.$$

Wtedy

$$\chi(g) = |N_G(g)| = |\{s \in G : sg = gs\}|.$$

Przykład 1b

Grupa G działa na $X = G$ za pomocą automorfizmów wewnętrznych, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sgs^{-1}} \text{ dla } g, s \in G.$$

Wtedy

$$\chi(g) = |N_G(g)| = |\{s \in G : sg = gs\}|.$$

Przykładowo rozważmy $G = \mathrm{Quat}$.

Przykład 1b

Grupa G działa na $X = G$ za pomocą automorfizmów wewnętrznych, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sgs^{-1}} \text{ dla } g, s \in G.$$

Wtedy

$$\chi(g) = |N_G(g)| = |\{s \in G : sg = gs\}|.$$

Przykładowo rozważmy $G = \text{Quat}$. Charaktery nieprzywiedlne oraz nasz charakter przyjmują na elementach tej grupy następujące wartości:

Quat	I	$-I$	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
χ_5	2	-2	0	0	0	0	0	0
χ								

Przykład 1b

Grupa G działa na $X = G$ za pomocą automorfizmów wewnętrznych, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sgs^{-1}} \text{ dla } g, s \in G.$$

Wtedy

$$\chi(g) = |N_G(g)| = |\{s \in G : sg = gs\}|.$$

Przykładowo rozważmy $G = \text{Quat}$. Charaktery nieprzywiedlne oraz nasz charakter przyjmują na elementach tej grupy następujące wartości:

Quat	I	$-I$	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
χ_5	2	-2	0	0	0	0	0	0
χ	8							

Przykład 1b
Grupa G działa na $X = G$ za pomocą automorfizmów wewnętrznych, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sgs^{-1}} \text{ dla } g, s \in G.$$

Wtedy

$$\chi(g) = |N_G(g)| = |\{s \in G : sg = gs\}|.$$

Przykładowo rozważmy $G = \text{Quat}$. Charaktery nieprzywiedlne oraz nasz charakter przyjmują na elementach tej grupy następujące wartości:

Quat	I	$-I$	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
χ_5	2	-2	0	0	0	0	0	0
χ	8	8						

Przykład 1b

Grupa G działa na $X = G$ za pomocą automorfizmów wewnętrznych, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sgs^{-1}} \text{ dla } g, s \in G.$$

Wtedy

$$\chi(g) = |N_G(g)| = |\{s \in G : sg = gs\}|.$$

Przykładowo rozważmy $G = \mathrm{Quat}$. Charaktery nieprzywiedlne oraz nasz charakter przyjmują na elementach tej grupy następujące wartości:

Quat	I	$-I$	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
χ_5	2	-2	0	0	0	0	0	0
χ	8	8	4					

Przykład 1b

Grupa G działa na $X = G$ za pomocą automorfizmów wewnętrznych, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sgs^{-1}} \text{ dla } g, s \in G.$$

Wtedy

$$\chi(g) = |N_G(g)| = |\{s \in G : sg = gs\}|.$$

Przykładowo rozważmy $G = \text{Quat}$. Charaktery nieprzywiedlne oraz nasz charakter przyjmują na elementach tej grupy następujące wartości:

Quat	I	$-I$	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
χ_5	2	-2	0	0	0	0	0	0
χ	8	8	4	4				

Przykład 1b

Grupa G działa na $X = G$ za pomocą automorfizmów wewnętrznych, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sgs^{-1}} \text{ dla } g, s \in G.$$

Wtedy

$$\chi(g) = |N_G(g)| = |\{s \in G : sg = gs\}|.$$

Przykładowo rozważmy $G = \text{Quat}$. Charaktery nieprzywiedlne oraz nasz charakter przyjmują na elementach tej grupy następujące wartości:

Quat	I	$-I$	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
χ_5	2	-2	0	0	0	0	0	0
χ	8	8	4	4	4	4	4	4

Przykład 1b

Grupa G działa na $X = G$ za pomocą automorfizmów wewnętrznych, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sgs^{-1}} \text{ dla } g, s \in G.$$

Wtedy

$$\chi(g) = |N_G(g)| = |\{s \in G : sg = gs\}|.$$

Przykładowo rozważmy $G = \text{Quat}$. Charaktery nieprzywiedlne oraz nasz charakter przyjmują na elementach tej grupy następujące wartości:

Quat	I	$-I$	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
χ_5	2	-2	0	0	0	0	0	0
χ	8	8	4	4	4	4	4	4

Zatem

$$\chi =$$

Przykład 1b

Grupa G działa na $X = G$ za pomocą automorfizmów wewnętrznych, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sgs^{-1}} \text{ dla } g, s \in G.$$

Wtedy

$$\chi(g) = |N_G(g)| = |\{s \in G : sg = gs\}|.$$

Przykładowo rozważmy $G = \mathrm{Quat}$. Charaktery nieprzywiedlne oraz nasz charakter przyjmują na elementach tej grupy następujące wartości:

Quat	I	$-I$	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
χ_5	2	-2	0	0	0	0	0	0
χ	8	8	4	4	4	4	4	4

Zatem

$$\chi = 5\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 \quad \text{i} \quad V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4$$

Przykład 1b

Grupa G działa na $X = G$ za pomocą automorfizmów wewnętrznych, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sgs^{-1}} \text{ dla } g, s \in G.$$

Wtedy

$$\chi(g) = |N_G(g)| = |\{s \in G : sg = gs\}|.$$

Przykładowo rozważmy $G = \text{Quat}$. Charaktery nieprzywiedlne oraz nasz charakter przyjmują na elementach tej grupy następujące wartości:

Quat	I	$-I$	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
χ_5	2	-2	0	0	0	0	0	0
χ	8	8	4	4	4	4	4	4

Zatem

$$\chi = 5\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 \quad \text{i} \quad V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4$$

oraz

$$\dim V_1 = 5, \ \dim V_2 = \dim V_3 = \dim V_4 = 1.$$

Do wyznaczenia podprzestrzeni V_i potrzebna nam będzie poniżej znajdująca się tabelka działania automorfizmów wewnętrznych (na przecięciu s-tego wiersza i g-tej kolumny w poniższej tabeli znajduje się $e_{sgs^{-1}}$)

$\rho_s \setminus e_g$	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_j	e_{-j}	e_k	e_{-k}
ρ_I	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_j	e_{-j}	e_k	e_{-k}
ρ_{-I}	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_j	e_{-j}	e_k	e_{-k}
ρ_i	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_{-j}	e_j	e_{-k}	e_k
ρ_{-i}	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_{-j}	e_j	e_{-k}	e_k
ρ_j	e_I	e_{-I}	e_{-i}	e_i	e_j	e_{-j}	e_{-k}	e_k
ρ_{-j}	e_I	e_{-I}	e_{-i}	e_i	e_j	e_{-j}	e_{-k}	e_k
ρ_k	e_I	e_{-I}	e_{-i}	e_i	e_{-j}	e_j	e_k	e_{-k}
ρ_{-k}	e_I	e_{-I}	e_{-i}	e_i	e_{-j}	e_j	e_k	e_{-k}

Do wyznaczenia podprzestrzeni V_i potrzebna nam będzie poniżej znajdująca się tabelka działania automorfizmów wewnętrznych (na przecięciu s-tego wiersza i g-tej kolumny w poniższej tabeli znajduje się $e_{sgs^{-1}}$)

$\rho_s \setminus e_g$	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_j	e_{-j}	e_k	e_{-k}
ρ_I	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_j	e_{-j}	e_k	e_{-k}
ρ_{-I}	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_j	e_{-j}	e_k	e_{-k}
ρ_i	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_{-j}	e_j	e_{-k}	e_k
ρ_{-i}	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_{-j}	e_j	e_{-k}	e_k
ρ_j	e_I	e_{-I}	e_{-i}	e_i	e_j	e_{-j}	e_{-k}	e_k
ρ_{-j}	e_I	e_{-I}	e_{-i}	e_i	e_j	e_{-j}	e_{-k}	e_k
ρ_k	e_I	e_{-I}	e_{-i}	e_i	e_{-j}	e_j	e_k	e_{-k}
ρ_{-k}	e_I	e_{-I}	e_{-i}	e_i	e_{-j}	e_j	e_k	e_{-k}

oraz tabela charakterów grupy Quat

Quat	I	$-I$	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
χ_5	2	-2	0	0	0	0	0	0

Do wyznaczenia podprzestrzeni V_i potrzebna nam będzie poniżej znajdująca się tabelka działania automorfizmów wewnętrznych (na przecięciu s-tego wiersza i g-tej kolumny w poniższej tabeli znajduje się $e_{sgs^{-1}}$)

$\rho_s \setminus e_g$	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_j	e_{-j}	e_k	e_{-k}
ρ_I	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_j	e_{-j}	e_k	e_{-k}
ρ_{-I}	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_j	e_{-j}	e_k	e_{-k}
ρ_i	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_{-j}	e_j	e_{-k}	e_k
ρ_{-i}	e_I	e_{-I}	e_i	e_{-i}	e_{-j}	e_j	e_{-k}	e_k
ρ_j	e_I	e_{-I}	e_{-i}	e_i	e_j	e_{-j}	e_{-k}	e_k
ρ_{-j}	e_I	e_{-I}	e_{-i}	e_i	e_j	e_{-j}	e_{-k}	e_k
ρ_k	e_I	e_{-I}	e_{-i}	e_i	e_{-j}	e_j	e_k	e_{-k}
ρ_{-k}	e_I	e_{-I}	e_{-i}	e_i	e_{-j}	e_j	e_k	e_{-k}

oraz tabela charakterów grupy Quat

Quat	I	$-I$	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
χ_5	2	-2	0	0	0	0	0	0

Składowe jednorodne wyznaczamy na tablicy.

Składowe jednorodne są postaci

$$\begin{aligned} V_1 &= \operatorname{lin}(e_I, e_{-I}, e_i + e_{-i}, e_j + e_{-j}, e_k + e_{-k}) \\ V_2 &= \operatorname{lin}(e_i - e_{-i}) \\ V_3 &= \operatorname{lin}(e_j - e_{-j}) \\ V_4 &= \operatorname{lin}(e_k - e_{-k}) \end{aligned}$$

Składowe jednorodne są postaci

$$\begin{aligned} V_1 &= \operatorname{lin}(e_I, e_{-I}, e_i + e_{-i}, e_j + e_{-j}, e_k + e_{-k}) \\ V_2 &= \operatorname{lin}(e_i - e_{-i}) \\ V_3 &= \operatorname{lin}(e_j - e_{-j}) \\ V_4 &= \operatorname{lin}(e_k - e_{-k}) \end{aligned}$$

Pozostaje problem rozkładu przestrzeni V_1 na sumę prostą pięciu jednowymiarowych podprzestrzeni G-niezmienniczych.

Składowe jednorodne są postaci

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \operatorname{lin}(e_I, e_{-I}, e_i + e_{-i}, e_j + e_{-j}, e_k + e_{-k}) \\
V_2 &= \operatorname{lin}(e_i - e_{-i}) \\
V_3 &= \operatorname{lin}(e_j - e_{-j}) \\
V_4 &= \operatorname{lin}(e_k - e_{-k})
\end{aligned}
$$

Pozostaje problem rozkładu przestrzeni V_1 na sumę prostą pięciu jednowymiarowych podprzestrzeni G-niezmienniczych.

O tym być może na następnym wykładzie.

Przykład 1c

Niech ρ będzie reprezentacją regularną grupy G, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sg} \text{ dla } g, s \in G.$$

Przykład 1c

Niech ρ będzie reprezentacją regularną grupy G, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sg} \text{ dla } g, s \in G.$$

Charakter r_G tej reprezentacji wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Przykład 1c

Niech ρ będzie reprezentacją regularną grupy G, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sg} \text{ dla } g, s \in G.$$

Charakter r_G tej reprezentacji wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Rozważmy tu konkretny przykład $G = S(3)$.
Charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$S(3)$	id	$(1\,2)$	$(1\,3)$	$(2\,3)$	$(1\,2\,3)$	$(3\,2\,1)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	-1	1	1
χ_3	2	0	0	0	-1	-1
r_G	6	0	0	0	0	0

Przykład 1c

Niech ρ będzie reprezentacją regularną grupy G, tzn.

$$\rho_s(e_g) = e_{sg} \text{ dla } g, s \in G.$$

Charakter r_G tej reprezentacji wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Rozważmy tu konkretny przykład $G = S(3)$.
Charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

$S(3)$	id	$(1\,2)$	$(1\,3)$	$(2\,3)$	$(1\,2\,3)$	$(3\,2\,1)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	-1	1	1
χ_3	2	0	0	0	-1	-1
r_G	6	0	0	0	0	0

Zatem

$$r_G = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3 \quad \text{i} \quad V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

oraz

$$\dim V_1 = \dim V_2 = 1, \ \dim V_3 = 4.$$

Do wyznaczenia podprzestrzeni V_i potrzebna nam będzie poniżej znajdująca się tabelka działania w grupie (na przecięciu s-tego wiersza i g-tej kolumny znajduje się e_{sg}).

$\rho_s \setminus e_g$	e_{id}	$e_{(1\,2)}$	$e_{(1\,3)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(3\,2\,1)}$
e_{id}	e_{id}	$e_{(1\,2)}$	$e_{(1\,3)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(3\,2\,1)}$
$e_{(1\,2)}$	$e_{(1\,2)}$	e_{id}	$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(2,3)}$	$e_{(1\,3)}$
$e_{(1\,3)}$	$e_{(1\,3)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	e_{id}	$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(1\,2)}$	$e_{(2\,3)}$
$e_{(2\,3)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	e_{id}	$e_{(1\,3)}$	$e_{(1\,2)}$
$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(1\,3)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(1\,2)}$	$e_{(3\,2\,1)}$	e_{id}
$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(1\,2)}$	$e_{(1\,3)}$	e_{id}	$e_{(1\,2\,3)}$

Do wyznaczenia podprzestrzeni V_i potrzebna nam będzie poniżej znajdująca się tabelka działania w grupie (na przecięciu s-tego wiersza i g-tej kolumny znajduje się e_{sg}).

$\rho_s \setminus e_g$	e_{id}	$e_{(1\,2)}$	$e_{(1\,3)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(3\,2\,1)}$
e_{id}	e_{id}	$e_{(1\,2)}$	$e_{(1\,3)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(3\,2\,1)}$
$e_{(1\,2)}$	$e_{(1\,2)}$	e_{id}	$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(2,3)}$	$e_{(1\,3)}$
$e_{(1\,3)}$	$e_{(1\,3)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	e_{id}	$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(1\,2)}$	$e_{(2\,3)}$
$e_{(2\,3)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	e_{id}	$e_{(1\,3)}$	$e_{(1\,2)}$
$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(1\,3)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(1\,2)}$	$e_{(3\,2\,1)}$	e_{id}
$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(1\,2)}$	$e_{(1\,3)}$	e_{id}	$e_{(1\,2\,3)}$

oraz tabela charakterów grupy $S(3)$

$S(3)$	id	$(1\,2)$	$(1\,3)$	$(2\,3)$	$(1\,2\,3)$	$(3\,2\,1)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	-1	1	1
χ_3	2	0	0	0	-1	-1

Do wyznaczenia podprzestrzeni V_i potrzebna nam będzie poniżej znajdująca się tabelka działania w grupie (na przecięciu s-tego wiersza i g-tej kolumny znajduje się e_{sg}).

$\rho_s \setminus e_g$	e_{id}	$e_{(1\,2)}$	$e_{(1\,3)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(3\,2\,1)}$
e_{id}	e_{id}	$e_{(1\,2)}$	$e_{(1\,3)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(3\,2\,1)}$
$e_{(1\,2)}$	$e_{(1\,2)}$	e_{id}	$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(2,3)}$	$e_{(1\,3)}$
$e_{(1\,3)}$	$e_{(1\,3)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	e_{id}	$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(1\,2)}$	$e_{(2\,3)}$
$e_{(2\,3)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	e_{id}	$e_{(1\,3)}$	$e_{(1\,2)}$
$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(1\,2\,3)}$	$e_{(1\,3)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(1\,2)}$	$e_{(3\,2\,1)}$	e_{id}
$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(3\,2\,1)}$	$e_{(2\,3)}$	$e_{(1\,2)}$	$e_{(1\,3)}$	e_{id}	$e_{(1\,2\,3)}$

oraz tabela charakterów grupy $S(3)$

$S(3)$	id	$(1\,2)$	$(1\,3)$	$(2\,3)$	$(1\,2\,3)$	$(3\,2\,1)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	-1	-1	1	1
χ_3	2	0	0	0	-1	-1

Składowe jednorodne wyznaczamy na tablicy.

Składowe jednorodne są postaci

$$V_1 = \operatorname{lin}\left(\sum_{\sigma\in S(3)} e_\sigma\right)$$

$$V_2 = \operatorname{lin}\left(\sum_{\sigma\in S(3)} \operatorname{sgn}(\sigma) e_\sigma\right)$$

$$V_3 = \operatorname{lin}\big(2e_{\mathrm{id}} - e_{(1\,2\,3)} - e_{(3\,2\,1)}, 2e_{(1\,2)} - e_{(1\,3)} - e_{(2\,3)}, 2e_{(1\,3)} - e_{(1\,2)} - e_{(2\,3)}, 2e_{(1\,2\,3)} - e_{(3\,2\,1)} - e_{\mathrm{id}}, 2e_{(3\,2\,1)} - e_{(1\,2\,3)} - e_{\mathrm{id}}\big)$$

Składowe jednorodne są postaci

$$V_1 = \mathrm{lin}\left(\sum_{\sigma\in S(3)} e_\sigma\right)$$

$$V_2 = \mathrm{lin}\left(\sum_{\sigma\in S(3)} \mathrm{sgn}(\sigma)e_\sigma\right)$$

$$V_3 = \mathrm{lin}\big(2e_{\mathrm{id}} - e_{(1\,2\,3)} - e_{(3\,2\,1)}, 2e_{(1\,2)} - e_{(1\,3)} - e_{(2\,3)}, 2e_{(1\,3)} - e_{(1\,2)} - e_{(2\,3)},$$
$$2e_{(1\,2\,3)} - e_{(3\,2\,1)} - e_{\mathrm{id}}, 2e_{(3\,2\,1)} - e_{(1\,2\,3)} - e_{\mathrm{id}}\big)$$

I tu też pozostaje problem rozkładu podprzestrzeni V_3 na sumę prostą dwóch podprzestrzeni G-niezmienniczych wymiaru 2.

Przykład 2
Na koniec zastanówmy się jakiej postaci jest rozkład reprezentacji grupy cyklicznej $C_m = (a)$ na składowe jednorodne.

Przykład 2
Na koniec zastanówmy się jakiej postaci jest rozkład reprezentacji grupy cyklicznej $C_m = (a)$ na składowe jednorodne.
Przypomnijmy, że każda reprezentacja zepolona stopnia n tej grupy jest postaci ρ^A, gdzie

$$A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),\ A^m = I_n,\ \rho^A_{a^k}(\bar{x}) = A^k \bar{x}.$$

Przykład 2
Na koniec zastanówmy się jakiej postaci jest rozkład reprezentacji grupy cyklicznej $C_m = (a)$ na składowe jednorodne.
Przypomnijmy, że każda reprezentacja zepolona stopnia n tej grupy jest postaci ρ^A, gdzie

$$A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),\ A^m = I_n,\ \rho^A_{a^k}(\bar{x}) = A^k \bar{x}.$$

Wtedy oczywiście

$$\chi(a^k) = \mathrm{tr}(A^k).$$

Przykład 2
Na koniec zastanówmy się jakiej postaci jest rozkład reprezentacji grupy cyklicznej $C_m = (a)$ na składowe jednorodne.
Przypomnijmy, że każda reprezentacja zepolona stopnia n tej grupy jest postaci ρ^A, gdzie

$$A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),\ A^m = I_n,\ \rho^A_{a^k}(\bar{x}) = A^k \bar{x}.$$

Wtedy oczywiście

$$\chi(a^k) = \mathrm{tr}(A^k).$$

Czy wiesz jak dokonać rozkładu?

Przykład 2
Na koniec zastanówmy się jakiej postaci jest rozkład reprezentacji grupy cyklicznej $C_m = (a)$ na składowe jednorodne.
Przypomnijmy, że każda reprezentacja zepolona stopnia n tej grupy jest postaci ρ^A, gdzie

$$A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),\ A^m = I_n,\ \rho^A_{a^k}(\bar{x}) = A^k \bar{x}.$$

Wtedy oczywiście

$$\chi(a^k) = \mathrm{tr}(A^k).$$

Czy wiesz jak dokonać rozkładu?

Zerknij do rozwiązania zadania 5 z zestawu 3.