Wybrane metody algebraiczne
Wykład 6 - reprezentacje liniowe grup (c.d.)

Andrzej Sładek
sladek@ux2.math.us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G.

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G.
Możliwe są następujące sytuacje:

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G.
Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad $\mathbb{R}$).

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G.
Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad $\mathbb{R}$).
- Reprezentacja ρ nie jest rzeczywista i żadna jej równoważna nie jest rzeczywista, ale jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste.

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G.
Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad $\mathbb{R}$).
- Reprezentacja ρ nie jest rzeczywista i żadna jej równoważna nie jest rzeczywista, ale jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste.
- Charakter reprezentacji ρ nie jest rzeczywisty (wtedy ρ nie jest równoważna żadnej reprezentacji rzeczywistej).

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G.
Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad $\mathbb{R}$).
- Reprezentacja ρ nie jest rzeczywista i żadna jej równoważna nie jest rzeczywista, ale jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste.
- Charakter reprezentacji ρ nie jest rzeczywisty (wtedy ρ nie jest równoważna żadnej reprezentacji rzeczywistej).

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G.
Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad $\mathbb{R}$).
- Reprezentacja ρ nie jest rzeczywista i żadna jej równoważna nie jest rzeczywista, ale jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste.
- Charakter reprezentacji ρ nie jest rzeczywisty (wtedy ρ nie jest równoważna żadnej reprezentacji rzeczywistej).

W przypadku pierwszych dwóch sytuacji o charakterze reprezentacji mówimy, że jest rzeczywisty.

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G.
Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad $\mathbb{R}$).
- Reprezentacja ρ nie jest rzeczywista i żadna jej równoważna nie jest rzeczywista, ale jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste.
- Charakter reprezentacji ρ nie jest rzeczywisty (wtedy ρ nie jest równoważna żadnej reprezentacji rzeczywistej).

W przypadku pierwszych dwóch sytuacji o charakterze reprezentacji mówimy, że jest rzeczywisty.

Definicja

Element g grupy G nazywamy **elementem rzeczywistym**, jeśli jest sprzężony z g^{-1}. Jeżeli g jest elementem rzeczywistym, to klasę elementów sprzężonych $g^G := \{x^{-1}gx : x \in G\}$ nazywamy rzeczywistą.

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G.
Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad $\mathbb{R}$).
- Reprezentacja ρ nie jest rzeczywista i żadna jej równoważna nie jest rzeczywista, ale jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste.
- Charakter reprezentacji ρ nie jest rzeczywisty (wtedy ρ nie jest równoważna żadnej reprezentacji rzeczywistej).

W przypadku pierwszych dwóch sytuacji o charakterze reprezentacji mówimy, że jest rzeczywisty.

Definicja

Element g grupy G nazywamy **elementem rzeczywistym**, jeśli jest sprzężony z g^{-1}. Jeżeli g jest elementem rzeczywistym, to klasę elementów sprzężonych $g^G := \{x^{-1}gx : x \in G\}$ nazywamy rzeczywistą.

Uwaga Jeśli klasa jest rzeczywista, to każdy element tej klasy jest rzeczywisty.

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G.
Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad $\mathbb{R}$).
- Reprezentacja ρ nie jest rzeczywista i żadna jej równoważna nie jest rzeczywista, ale jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste.
- Charakter reprezentacji ρ nie jest rzeczywisty (wtedy ρ nie jest równoważna żadnej reprezentacji rzeczywistej).

W przypadku pierwszych dwóch sytuacji o charakterze reprezentacji mówimy, że jest rzeczywisty.

Definicja

Element g grupy G nazywamy **elementem rzeczywistym**, jeśli jest sprzężony z g^{-1}. Jeżeli g jest elementem rzeczywistym, to klasę elementów sprzężonych $g^G := \{x^{-1}gx : x \in G\}$ nazywamy rzeczywistą.

Uwaga Jeśli klasa jest rzeczywista, to każdy element tej klasy jest rzeczywisty. Ponadto klasa ta zawiera odwrotność każdego swojego elementu.

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech $s_1, ..., s_k$ oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G, a $\chi_1, ..., \chi_k$ wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G.

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech $s_1, \dots, s_k$ oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G, a $\chi_1, \dots, \chi_k$ wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G.
Niech
$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\dots,k}$$
będzie tablicą charakterów grupy G.

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech $s_1, ..., s_k$ oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G, a $\chi_1, ..., \chi_k$ wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G.
Niech

$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,...,k}$$

będzie tablicą charakterów grupy G. Jeśli

$$\overline{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,...,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,...,k},$$

to $\overline{X}$ też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X, tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech $s_1, \dots, s_k$ oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G, a $\chi_1, \dots, \chi_k$ wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G.
Niech

$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\dots,k}$$

będzie tablicą charakterów grupy G. Jeśli

$$\overline{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,\dots,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,\dots,k},$$

to $\overline{X}$ też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X, tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.
Na tym samych miejscu pozostają wiersze odpowiadające charakterom rzeczywistym.

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech $s_1, \ldots, s_k$ oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G, a $\chi_1, \ldots, \chi_k$ wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G.
Niech

$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\ldots,k}$$

będzie tablicą charakterów grupy G. Jeśli

$$\overline{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,\ldots,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,\ldots,k},$$

to $\overline{X}$ też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X, tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.
Na tym samych miejscu pozostają wiersze odpowiadające charakterom rzeczywistym.
Niech

$$P_\sigma = (a_{ij}), \;\; a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq \sigma(i) \\ 1, & \text{gdy } j = \sigma(i) \end{cases} .$$

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech $s_1, ..., s_k$ oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G, a $\chi_1, ..., \chi_k$ wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G.
Niech
$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\ldots,k}$$
będzie tablicą charakterów grupy G. Jeśli
$$\overline{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,\ldots,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,\ldots,k},$$
to $\overline{X}$ też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X, tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.
Na tym samych miejscu pozostają wiersze odpowiadające charakterom rzeczywistym.
Niech
$$P_\sigma = (a_{ij}), \ \ a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq \sigma(i) \\ 1, & \text{gdy } j = \sigma(i) \end{cases} .$$
Wtedy
$$P_\sigma X = (c_{il}), \ \ c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}\chi_l(s(_j)$$

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech $s_1, \ldots, s_k$ oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G, a $\chi_1, \ldots, \chi_k$ wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G.
Niech

$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\ldots,k}$$

będzie tablicą charakterów grupy G. Jeśli

$$\overline{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,\ldots,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,\ldots,k},$$

to $\overline{X}$ też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X, tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.
Na tym samym miejscu pozostają wiersze odpowiadające charakterom rzeczywistym.
Niech

$$P_\sigma = (a_{ij}), \;\; a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq \sigma(i) \\ 1, & \text{gdy } j = \sigma(i) \end{cases}.$$

Wtedy

$$P_\sigma X = (c_{il}), \;\; c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}\chi_l(s(_j) = \chi_{\sigma(i)}(s_j) = \overline{\chi_i(s_j)},$$

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech $s_1, ..., s_k$ oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G, a $\chi_1, ..., \chi_k$ wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G.
Niech
$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\ldots,k}$$
będzie tablicą charakterów grupy G. Jeśli
$$\overline{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,\ldots,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,\ldots,k},$$
to $\overline{X}$ też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X, tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.
Na tym samych miejscu pozostają wiersze odpowiadające charakterom rzeczywistym.
Niech
$$P_\sigma = (a_{ij}), \;\; a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq \sigma(i) \\ 1, & \text{gdy } j = \sigma(i) \end{cases} .$$
Wtedy
$$P_\sigma X = (c_{il}), \;\; c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}\chi_l(s(_j) = \chi_{\sigma(i)}(s_j) = \overline{\chi_i(s_j)}, \text{ tzn. } P_\sigma X = \overline{X}$$

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech $s_1, \dots, s_k$ oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G, a $\chi_1, \dots, \chi_k$ wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G.
Niech

$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\dots,k}$$

będzie tablicą charakterów grupy G. Jeśli

$$\overline{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,\dots,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,\dots,k},$$

to $\overline{X}$ też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X, tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.
Na tym samych miejscu pozostają wiersze odpowiadające charakterom rzeczywistym.
Niech

$$P_\sigma = (a_{ij}), \;\; a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq \sigma(i) \\ 1, & \text{gdy } j = \sigma(i) \end{cases} .$$

Wtedy

$$P_\sigma X = (c_{il}), \;\; c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}\chi_l(s(_j) = \chi_{\sigma(i)}(s_j) = \overline{\chi_i(s_j)}, \text{ tzn. } P_\sigma X = \overline{X}$$

oraz liczba permutacji rzeczywistych grupy G równa się $\mathrm{tr}(P_\sigma)$.

Dla każdej klasy elementów sprzężonych s_i odpowiadająca jej kolumna macierzy X jest równa kolumnie macierzy $\overline{X}$ odpowiadającej klasie $\overline{s_i}$. Zatem macierze $\overline{X}$ oraz X różnią się też kolejnością kolumn, a na tym samym miejscu pozostają kolumny odpowiadające klasom rzeczywistym.

Dla każdej klasy elementów sprzężonych s_i odpowiadająca jej kolumna macierzy X jest równa kolumnie macierzy $\overline{X}$ odpowiadającej klasie $\overline{s_i}$. Zatem macierze $\overline{X}$ oraz X różnią się też kolejnością kolumn, a na tym samym miejscu pozostają kolumny odpowiadające klasom rzeczywistym. Zatem istnieje macierz permutacji Q_τ taka, że

$$\overline{X} = XQ_\tau$$

i liczba rzeczywistych klas elementów sprzężonych równa się $\mathrm{tr}(Q_\tau)$.

Dla każdej klasy elementów sprzężonych s_i odpowiadająca jej kolumna macierzy X jest równa kolumnie macierzy $\overline{X}$ odpowiadającej klasie $\overline{s_i}$. Zatem macierze $\overline{X}$ oraz X różnią się też kolejnością kolumn, a na tym samym miejscu pozostają kolumny odpowiadające klasom rzeczywistym. Zatem istnieje macierz permutacji Q_τ taka, że

$$\overline{X} = XQ_\tau$$

i liczba rzeczywistych klas elementów sprzężonych równa się $\mathrm{tr}(Q_\tau)$.
Ponieważ

$$Q_\tau = X^{-1}\overline{X} = X^{-1}P_\sigma X,$$

więc

$$\text{liczba rzeczywistych klas} = \mathrm{tr}(Q_\tau) = \mathrm{tr}(P_\sigma) = \text{ liczba charakterów rzeczywistych.} \quad \clubsuit$$

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.
Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n + 1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.
Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n + 1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych. Wtedy $x^{-1}gx = g^{-1}$ dla pewnego $x \in G$.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.
Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n+1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych. Wtedy $x^{-1}gx = g^{-1}$ dla pewnego $x \in G$. Stąd $x^{-2}gx^2 = g$ tzn. x^2, a więc również x^{2k} dla każdego k, jest przemienny z elementem g.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.
Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n + 1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych. Wtedy $x^{-1}gx = g^{-1}$ dla pewnego $x \in G$. Stąd $x^{-2}gx^2 = g$ tzn. x^2, a więc również x^{2k} dla każdego k, jest przemienny z elementem g. Z tw. Lagrange'a wynika, że $x = x^{2(n+1)}$, a to oznacza, że x jest przemienny z g

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.
Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n+1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych. Wtedy $x^{-1}gx = g^{-1}$ dla pewnego $x \in G$. Stąd $x^{-2}gx^2 = g$ tzn. x^2, a więc również x^{2k} dla każdego k, jest przemienny z elementem g. Z tw. Lagrange'a wynika, że $x = x^{2(n+1)}$, a to oznacza, że x jest przemienny z g tzn. $g = x^{-1}gx = g^{-1}$,

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.
Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n+1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych. Wtedy $x^{-1}gx = g^{-1}$ dla pewnego $x \in G$. Stąd $x^{-2}gx^2 = g$ tzn. x^2, a więc również x^{2k} dla każdego k, jest przemienny z elementem g. Z tw. Lagrange'a wynika, że $x = x^{2(n+1)}$, a to oznacza, że x jest przemienny z g tzn. $g = x^{-1}gx = g^{-1}$, czyli $g^2 = 1$.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.
Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n+1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych. Wtedy $x^{-1}gx = g^{-1}$ dla pewnego $x \in G$. Stąd $x^{-2}gx^2 = g$ tzn. x^2, a więc również x^{2k} dla każdego k, jest przemienny z elementem g. Z tw. Lagrange'a wynika, że $x = x^{2(n+1)}$, a to oznacza, że x jest przemienny z g tzn. $g = x^{-1}gx = g^{-1}$, czyli $g^2 = 1$. Skoro rząd grupy G jest nieparzysty, więc $g = e$ i nasza klasa jest trywialna. ♣

Twierdzenie

Niech χ będzie charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ grupy G. Wtedy NWSR:

1. charakter χ może być realizowany nad $\mathbb{R}$,
2. istnieje nieosobliwa symetryczna forma dwuliniowa $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ taka, że

$$\bigwedge_{\alpha,\beta\in V} \bigwedge_{s\in G} \varphi(\alpha,\beta) = \varphi(\rho_s(\alpha), \rho_s(\beta)).$$

Twierdzenie

Niech χ będzie charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ grupy G. Wtedy NWSR:

1. charakter χ może być realizowany nad $\mathbb{R}$,
2. istnieje nieosobliwa symetryczna forma dwuliniowa $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ taka, że

$$\bigwedge_{\alpha,\beta \in V} \bigwedge_{s \in G} \varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\rho_s(\alpha), \rho_s(\beta)).$$

Uwaga Gdyby w pierwszym punkcie powyższego twierdzenia żądać jedynie, aby charakter przyjmował wartości rzeczywiste, to w punkcie drugim trzeba zrezygnować z symetryczności wzmiankowanego funkcjonału dwuliniowego.