Wybrane metody algebraiczne
Wykład 5 - reprezentacje liniowe grup (c.d.)

Andrzej Sładek
sladek@ux2.math.us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Definicja

Funkcję $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\underset{s,t\in G}{\forall} f(sts^{-1}) = f(t).$$

Definicja

Funkcję $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\underset{s,t\in G}{\forall} f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.

Definicja

Funkcję $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\underset{s,t \in G}{\forall} \; f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.
- Funkcje centralne na grupie G tworzą przestrzeń liniową (nad $\mathbb{C}$).

Definicja

Funkcję $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\underset{s,t \in G}{\forall} f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.
- Funkcje centralne na grupie G tworzą przestrzeń liniową (nad $\mathbb{C}$).

Definicja

Funkcję $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\underset{s,t\in G}{\forall} f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.
- Funkcje centralne na grupie G tworzą przestrzeń liniową (nad $\mathbb{C}$). Jest to podprzestrzeń przestrzeni unitarnej $\mathbb{C}^G$.

Definicja

Funkcję $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\underset{s,t\in G}{\forall} f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.
- Funkcje centralne na grupie G tworzą przestrzeń liniową (nad $\mathbb{C}$). Jest to podprzestrzeń przestrzeni unitarnej $\mathbb{C}^G$. Ozn. H.

Definicja

Funkcję $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\underset{s,t \in G}{\forall} \; f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.
- Funkcje centralne na grupie G tworzą przestrzeń liniową (nad $\mathbb{C}$). Jest to podprzestrzeń przestrzeni unitarnej $\mathbb{C}^G$. Ozn. H.
  Bazą przestrzeni H jest układ funkcji charakterystycznych klas sprzężoności grupy G.

Definicja

Funkcję $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\underset{s,t\in G}{\forall} f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.
- Funkcje centralne na grupie G tworzą przestrzeń liniową (nad $\mathbb{C}$). Jest to podprzestrzeń przestrzeni unitarnej $\mathbb{C}^G$. Ozn. H.
  Bazą przestrzeni H jest układ funkcji charakterystycznych klas sprzężoności grupy G.
  Zatem wymiar H jest równy liczbie klas sprzężoności grupy G.

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G.

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G. Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s.$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \operatorname{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G. Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ, to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi(s) = \frac{|G|}{n} (f | \overline{\chi}).$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G. Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ, to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{s \in G} f(s)\chi(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t =$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \operatorname{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G. Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ, to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{s \in G} f(s)\chi(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t = \rho_t^{-1} \circ \left(\sum_{s \in G} f(s)\rho_s\right) \circ \rho_t$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G. Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ, to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{s \in G} f(s)\chi(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t = \rho_t^{-1} \circ \left(\sum_{s \in G} f(s)\rho_s\right) \circ \rho_t = \sum_{s \in G} f(s)\rho_{t^{-1}st}$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G. Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ, to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{s \in G} f(s)\chi(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t = \rho_t^{-1} \circ \left(\sum_{s \in G} f(s)\rho_s\right) \circ \rho_t = \sum_{s \in G} f(s)\rho_{t^{-1}st} = \sum_{s \in G} f(t^{-1}st)\rho_{t^{-1}st}$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G. Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ, to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s)\chi(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t = \rho_t^{-1} \circ \left(\sum_{s \in G} f(s)\rho_s \right) \circ \rho_t = \sum_{s \in G} f(s)\rho_{t^{-1}st} = \sum_{s \in G} f(t^{-1}st)\rho_{t^{-1}st} = \rho_f.$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G. Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ, to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{s \in G} f(s)\chi(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t = \rho_t^{-1} \circ \left(\sum_{s \in G} f(s)\rho_s\right) \circ \rho_t = \sum_{s \in G} f(s)\rho_{t^{-1}st} = \sum_{s \in G} f(t^{-1}st)\rho_{t^{-1}st} = \rho_f.$$

Zatem spełniony jest warunek z wniosku po lemacie Schura i ρ_f jest homotetią

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G. Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s\in G} f(s)\rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ, to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{s\in G} f(s)\chi(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t = \rho_t^{-1} \circ \left(\sum_{s\in G} f(s)\rho_s\right) \circ \rho_t = \sum_{s\in G} f(s)\rho_{t^{-1}st} = \sum_{s\in G} f(t^{-1}st)\rho_{t^{-1}st} = \rho_f.$$

Zatem spełniony jest warunek z wniosku po lemacie Schura i ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\rho_f =$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G. Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s\in G} f(s)\rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ, to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{s\in G} f(s)\chi(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1}\circ\rho_f\circ\rho_t = \rho_t^{-1}\circ\left(\sum_{s\in G} f(s)\rho_s\right)\circ\rho_t = \sum_{s\in G} f(s)\rho_{t^{-1}st} = \sum_{s\in G} f(t^{-1}st)\rho_{t^{-1}st} = \rho_f.$$

Zatem spełniony jest warunek z wniosku po lemacie Schura i ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\rho_f = \frac{1}{n}\sum_{s\in G} f(s)\chi(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi}). \quad ♣$$

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, \ldots, \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, \ldots, \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, \ldots, \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $\overline{f} \in \mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^{\perp}$.

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $\overline{f} \in \mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^\perp$. Wtedy $f \in \mathrm{lin}(\overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_k})^\perp$,

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $\overline{f} \in \text{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^\perp$. Wtedy $f \in \text{lin}(\overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, ..., k$.

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $\overline{f} \in \mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^{\perp}$. Wtedy $f \in \mathrm{lin}(\overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_k})^{\perp}$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, ..., k$.
Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, ..., k$ endomorfizm ρ^i_f jest homotetią

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $\overline{f} \in \mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^\perp$. Wtedy $f \in \mathrm{lin}(\overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, ..., k$.

Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, ..., k$ endomorfizm ρ^i_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s)\chi_i(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $\overline{f} \in \text{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^{\perp}$. Wtedy $f \in \text{lin}(\overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_k})^{\perp}$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, ..., k$.

Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, ..., k$ endomorfizm ρ^i_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s)\chi_i(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Zatem $\rho^i_f = 0, \; i = 1, ..., k$.

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $\overline{f} \in \mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^{\perp}$. Wtedy $f \in \mathrm{lin}(\overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_k})^{\perp}$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, ..., k$.
Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, ..., k$ endomorfizm ρ^i_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s)\chi_i(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Zatem $\rho^i_f = 0, \; i = 1, ..., k$.
Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja ρ jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i jeśli $\rho = m_1\rho^1 \oplus ... \oplus m_k\rho^k$, to

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $\overline{f} \in \mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^{\perp}$. Wtedy $f \in \mathrm{lin}(\overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_k})^{\perp}$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, ..., k$.
Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, ..., k$ endomorfizm ρ^i_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s)\chi_i(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Zatem $\rho^i_f = 0, \; i = 1, ..., k$.
Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja ρ jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i jeśli $\rho = m_1\rho^1 \oplus ... \oplus m_k\rho^k$, to

$$\rho_f = m_1\rho^1_f + ... + m_k\rho^k_f = 0.$$

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $\overline{f} \in \mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^\perp$. Wtedy $f \in \mathrm{lin}(\overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, ..., k$.

Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, ..., k$ endomorfizm ρ^i_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s)\chi_i(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Zatem $\rho^i_f = 0, \;\, i = 1, ..., k$.

Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja ρ jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i jeśli $\rho = m_1\rho^1 \oplus ... \oplus m_k\rho^k$, to

$$\rho_f = m_1\rho^1_f + ... + m_k\rho^k_f = 0.$$

Pokazaliśmy, że $\rho_f = 0$ dla dowolnej reprezentacji grupy G.

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $\overline{f} \in \mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^\perp$. Wtedy $f \in \mathrm{lin}(\overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, ..., k$.

Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, ..., k$ endomorfizm ρ^i_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s)\chi_i(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Zatem $\rho^i_f = 0, \ i = 1, ..., k$.

Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja ρ jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i jeśli $\rho = m_1\rho^1 \oplus ... \oplus m_k\rho^k$, to

$$\rho_f = m_1\rho^1_f + ... + m_k\rho^k_f = 0.$$

Pokazaliśmy, że $\rho_f = 0$ dla dowolnej reprezentacji grupy G. W szczególności gdy ρ jest reprezentacją regularną mamy

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $\overline{f} \in \text{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^\perp$. Wtedy $f \in \text{lin}(\overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, ..., k$.

Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, ..., k$ endomorfizm ρ^i_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s)\chi_i(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Zatem $\rho^i_f = 0, \ i = 1, ..., k$.

Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja ρ jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i jeśli $\rho = m_1\rho^1 \oplus ... \oplus m_k\rho^k$, to

$$\rho_f = m_1\rho^1_f + ... + m_k\rho^k_f = 0.$$

Pokazaliśmy, że $\rho_f = 0$ dla dowolnej reprezentacji grupy G. W szczególności gdy ρ jest reprezentacją regularną mamy

$$0 = \rho_f(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s)\varepsilon_s.$$

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $\overline{f} \in \mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^\perp$. Wtedy $f \in \mathrm{lin}(\overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, ..., k$.

Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, ..., k$ endomorfizm ρ^i_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s)\chi_i(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Zatem $\rho^i_f = 0,\ i = 1, ..., k$.

Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja ρ jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i jeśli $\rho = m_1\rho^1 \oplus ... \oplus m_k\rho^k$, to

$$\rho_f = m_1\rho^1_f + ... + m_k\rho^k_f = 0.$$

Pokazaliśmy, że $\rho_f = 0$ dla dowolnej reprezentacji grupy G. W szczególności gdy ρ jest reprezentacją regularną mamy

$$0 = \rho_f(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s)\varepsilon_s.$$

Ponieważ układ $(\varepsilon_s)_{s \in G}$ jest bazą, więc $f = \overline{f} = 0$.

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $\overline{f} \in \mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^\perp$. Wtedy $f \in \mathrm{lin}(\overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, ..., k$.
Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, ..., k$ endomorfizm ρ^i_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s)\chi_i(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Zatem $\rho^i_f = 0,\ i = 1, ..., k$.
Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja ρ jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i jeśli $\rho = m_1\rho^1 \oplus ... \oplus m_k\rho^k$, to

$$\rho_f = m_1\rho^1_f + ... + m_k\rho^k_f = 0.$$

Pokazaliśmy, że $\rho_f = 0$ dla dowolnej reprezentacji grupy G. W szczególności gdy ρ jest reprezentacją regularną mamy

$$0 = \rho_f(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s)\varepsilon_s.$$

Ponieważ układ $(\varepsilon_s)_{s \in G}$ jest bazą, więc $f = \overline{f} = 0$. Pokazaliśmy, że $\mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^\perp = \{0\}$,

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $\overline{f} \in \mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^{\perp}$. Wtedy $f \in \mathrm{lin}(\overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_k})^{\perp}$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, ..., k$.
Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, ..., k$ endomorfizm ρ^i_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{s\in G} f(s)\chi_i(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Zatem $\rho^i_f = 0, \ i = 1, ..., k$.
Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja ρ jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i jeśli $\rho = m_1\rho^1 \oplus ... \oplus m_k\rho^k$, to

$$\rho_f = m_1\rho^1_f + ... + m_k\rho^k_f = 0.$$

Pokazaliśmy, że $\rho_f = 0$ dla dowolnej reprezentacji grupy G. W szczególności gdy ρ jest reprezentacją regularną mamy

$$0 = \rho_f(\varepsilon_1) = \sum_{s\in G} f(s)\rho_s(\varepsilon_1) = \sum_{s\in G} f(s)\varepsilon_s.$$

Ponieważ układ $(\varepsilon_s)_{s\in G}$ jest bazą, więc $f = \overline{f} = 0$. Pokazaliśmy, że $\mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^{\perp} = \{0\}$, tzn. $\mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k) = H$. ♣

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Stąd funkcja centralna $f \neq 0$ jest charakterem pewnej reprezentacji wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją charakterów nieprzywiedlnych o nieujemnych całkowitych współczynnikach.

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Stąd funkcja centralna $f \neq 0$ jest charakterem pewnej reprezentacji wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją charakterów nieprzywiedlnych o nieujemnych całkowitych współczynnikach.

Wnioski

- Liczba nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G (z dokładnością do równoważności) jest równa liczbie klas sprzężoności grupy G.

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Stąd funkcja centralna $f \neq 0$ jest charakterem pewnej reprezentacji wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją charakterów nieprzywiedlnych o nieujemnych całkowitych współczynnikach.

Wnioski

- Liczba nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G (z dokładnością do równoważności) jest równa liczbie klas sprzężoności grupy G.
- Skończona grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej reprezentacje nieprzywiedlne są stopnia 1.

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Stąd funkcja centralna $f \neq 0$ jest charakterem pewnej reprezentacji wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją charakterów nieprzywiedlnych o nieujemnych całkowitych współczynnikach.

Wnioski

- Liczba nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G (z dokładnością do równoważności) jest równa liczbie klas sprzężoności grupy G.
- Skończona grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej reprezentacje nieprzywiedlne są stopnia 1.

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Stąd funkcja centralna $f \neq 0$ jest charakterem pewnej reprezentacji wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją charakterów nieprzywiedlnych o nieujemnych całkowitych współczynnikach.

Wnioski

- Liczba nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G (z dokładnością do równoważności) jest równa liczbie klas sprzężoności grupy G.
- Skończona grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej reprezentacje nieprzywiedlne są stopnia 1.

Stwierdzenie

Niech $c(s)$ dla $s \in G$ oznacza liczbę elementów w klasie sprzężoności elementu s. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_i}(s)\chi_i(t) = \begin{cases} \dfrac{|G|}{c(s)}, & \text{gdy } t \text{ jest sprzężony z } s \\ 0, & \text{gdy } t \text{ nie jest sprzężony z } s \end{cases}.$$

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Stąd funkcja centralna $f \neq 0$ jest charakterem pewnej reprezentacji wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją charakterów nieprzywiedlnych o nieujemnych całkowitych współczynnikach.

Wnioski

- Liczba nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G (z dokładnością do równoważności) jest równa liczbie klas sprzężoności grupy G.
- Skończona grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej reprezentacje nieprzywiedlne są stopnia 1.

Stwierdzenie

Niech $c(s)$ dla $s \in G$ oznacza liczbę elementów w klasie sprzężoności elementu s. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_i}(s)\chi_i(t) = \begin{cases} \dfrac{|G|}{c(s)}, & \text{gdy } t \text{ jest sprzężony z } s \\ 0, & \text{gdy } t \text{ nie jest sprzężony z } s \end{cases} .$$

Dowód. Rozważmy funkcję charakterysyczną f_s klasy sprzężoności elementu s.

Dowód. Rozważmy funkcję charakterysyczną f_s klasy sprzężoności elementu s. Wtedy

$$f_s = \sum_{i=1}^{k} (f_s|\chi_i)\chi_i =$$

Dowód. Rozważmy funkcję charakterysyczną f_s klasy sprzężoności elementu s. Wtedy

$$f_s = \sum_{i=1}^{k} (f_s|\chi_i)\chi_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{c(s)}{|G|}\overline{\chi_i}(s)\chi_i.$$

$$f_s(t) = \frac{c(s)}{|G|}\sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_i}(s)\chi_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } t \text{ jest sprzężony z } s \\ 0, & \text{gdy } t \text{ nie jest sprzężony z } s \end{cases}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję charakterysyczną f_s klasy sprzężoności elementu s. Wtedy

$$f_s = \sum_{i=1}^{k} (f_s|\chi_i)\chi_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{c(s)}{|G|}\overline{\chi_i}(s)\chi_i.$$

$$f_s(t) = \frac{c(s)}{|G|}\sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_i}(s)\chi_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } t \text{ jest sprzężony z } s \\ 0, & \text{gdy } t \text{ nie jest sprzężony z } s \end{cases}.$$

Zatem

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_i}(s)\chi_i(t) = \begin{cases} \dfrac{|G|}{c(s)}, & \text{gdy } t \text{ jest sprzężony z } s \\ 0, & \text{gdy } t \text{ nie jest sprzężony z } s \end{cases}. \quad \clubsuit$$

Definicja

Niech $1 = s_1, ..., s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G

Definicja

Niech $1 = s_1, \ldots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech $\chi_1, \ldots, \chi_k$ będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G.

Definicja

Niech $1 = s_1, ..., s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech $\chi_1, ..., \chi_k$ będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G. Macierz $T = (a_{ij}),\ a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

Definicja

Niech $1 = s_1, \dots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech $\chi_1, \dots, \chi_k$ będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G. Macierz $T = (a_{ij}),\ a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

$$\begin{array}{c||c|c|c} & s_1 & \dots & s_k \\ \hline \chi_1 & \chi_1(s_1) & \dots & \chi_1(s_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_k & \chi_k(s_1) & \dots & \chi_k(s_k) \end{array}.$$

Definicja

Niech $1 = s_1, \ldots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech $\chi_1, \ldots, \chi_k$ będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G. Macierz $T = (a_{ij})$, $a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

$$
\begin{array}{c||c|c|c}
 & s_1 & \ldots & s_k \\
\hline
\chi_1 & \chi_1(s_1) & \ldots & \chi_1(s_k) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\chi_k & \chi_k(s_1) & \ldots & \chi_k(s_k)
\end{array}.
$$

Uwagi Niech $c(s)$ będzie liczbą elementów w klasie sprzężoności elementu s.

1. Macierz T jest nieosobliwa.

Definicja

Niech $1 = s_1, \ldots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech $\chi_1, \ldots, \chi_k$ będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G. Macierz $T = (a_{ij}),\ a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

$$\begin{array}{c||c|c|c} & s_1 & \ldots & s_k \\ \hline \chi_1 & \chi_1(s_1) & \ldots & \chi_1(s_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_k & \chi_k(s_1) & \ldots & \chi_k(s_k) \end{array}.$$

Uwagi Niech $c(s)$ będzie liczbą elementów w klasie sprzężoności elementu s.

1. Macierz T jest nieosobliwa.
2. W pierwszej kolumnie stoją stopnie reprezentacji.

Definicja

Niech $1 = s_1, \ldots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech $\chi_1, \ldots, \chi_k$ będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G. Macierz $T = (a_{ij}),\ a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

$$\begin{array}{c||c|c|c} & s_1 & \ldots & s_k \\ \hline \chi_1 & \chi_1(s_1) & \ldots & \chi_1(s_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_k & \chi_k(s_1) & \ldots & \chi_k(s_k) \end{array}.$$

Uwagi Niech $c(s)$ będzie liczbą elementów w klasie sprzężoności elementu s.

1. Macierz T jest nieosobliwa.
2. W pierwszej kolumnie stoją stopnie reprezentacji.
3. ortogonalność kolumn: $\frac{c(s_k)}{|G|} \sum_{i=1}^{k} \chi_i(s_k)\overline{\chi_i}(s_l) = \delta_{kl}$

Definicja

Niech $1 = s_1, \ldots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech $\chi_1, \ldots, \chi_k$ będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G. Macierz $T = (a_{ij}),\ a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

$$\begin{array}{c||c|c|c} & s_1 & \ldots & s_k \\ \hline \chi_1 & \chi_1(s_1) & \ldots & \chi_1(s_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_k & \chi_k(s_1) & \ldots & \chi_k(s_k) \end{array}.$$

Uwagi Niech $c(s)$ będzie liczbą elementów w klasie sprzężoności elementu s.

1. Macierz T jest nieosobliwa.
2. W pierwszej kolumnie stoją stopnie reprezentacji.
3. ortogonalność kolumn: $\frac{c(s_k)}{|G|} \sum_{i=1}^{k} \chi_i(s_k)\overline{\chi_i}(s_l) = \delta_{kl}$
4. ortogonalność wierszy: $(\chi_i|\chi_j) = \frac{1}{|G|} \sum_{l=1}^{k} c(s_l)\chi_i(s_l)\overline{\chi_j}(s_l) = \delta_{ij}$

Definicja

Niech $1 = s_1, \ldots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech $\chi_1, \ldots, \chi_k$ będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G. Macierz $T = (a_{ij})$, $a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

$$\begin{array}{c||c|c|c} & s_1 & \ldots & s_k \\ \hline \chi_1 & \chi_1(s_1) & \ldots & \chi_1(s_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_k & \chi_k(s_1) & \ldots & \chi_k(s_k) \end{array}.$$

Uwagi Niech $c(s)$ będzie liczbą elementów w klasie sprzężoności elementu s.

1. Macierz T jest nieosobliwa.
2. W pierwszej kolumnie stoją stopnie reprezentacji.
3. ortogonalność kolumn: $\frac{c(s_k)}{|G|} \sum_{i=1}^{k} \chi_i(s_k)\overline{\chi_i}(s_l) = \delta_{kl}$
4. ortogonalność wierszy: $(\chi_i|\chi_j) = \frac{1}{|G|} \sum_{l=1}^{k} c(s_l)\chi_i(s_l)\overline{\chi_j}(s_l) = \delta_{ij}$
5. $$\sum_{i=1}^{k} n_i \chi_i(s) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } s \neq 1 \\ |G|, & \text{gdy } s = 1 \end{cases}.$$

Przykład Tablica charakterów grupy $S(3)$.

kl. sprzęż.	id	(1 2)	(1 2 3)
$\frac{\lvert G\rvert}{c(s)}$	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2		

Przykład Tablica charakterów grupy $S(3)$.

kl. sprzęż.	id	(1 2)	(1 2 3)
$\frac{\lvert G\rvert}{c(s)}$	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	

Przykład Tablica charakterów grupy $S(3)$.

kl. sprzęż.	id	(1 2)	(1 2 3)
$\frac{\lvert G\rvert}{c(s)}$	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Przykład Tablica charakterów grupy $S(3)$.

kl. sprzęż.	id	(1 2)	(1 2 3)
$\frac{\vert G\vert}{c(s)}$	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Uwaga Faktycznie reprezentacja ρ^3 ma postać

$$\rho^3((1\ 2)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^3((1\ 2\ 3)) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Przykład Tablica charakterów grupy $S(3)$.

kl. sprzęż.	id	(1 2)	(1 2 3)
$\frac{\lvert G\rvert}{c(s)}$	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Uwaga Faktycznie reprezentacja ρ^3 ma postać

$$\rho^3((1\ 2)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^3((1\ 2\ 3)) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

i jej charakter jest taki jak to wyliczyliśmy.

Przykład (z zad.8 zestaw 1)
Podzbiór Quat grupy $SL(2, \mathbb{C})$ złożony z macierzy:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \ j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

oraz

$$-I, \ -i, \ -j, \ -k$$

tworzy podgrupę tej grupy.

Przykład (z zad.8 zestaw 1)
Podzbiór Quat grupy $SL(2, \mathbb{C})$ złożony z macierzy:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \; j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

oraz

$$-I, \; -i, \; -j, \; -k$$

tworzy podgrupę tej grupy.

Elementy tej grupy spełniają równości

$$i^2 = j^2 = k^2 = -I, \; ij = k = -ji, \; jk = i = -kj, \; ki = j = -ik.$$

Przykład (z zad.8 zestaw 1)
Podzbiór Quat grupy SL$(2,\mathbb{C})$ złożony z macierzy:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},\ j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

oraz

$$-I,\ -i,\ -j,\ -k$$

tworzy podgrupę tej grupy.

Elementy tej grupy spełniają równości

$$i^2 = j^2 = k^2 = -I,\ ij = k = -ji,\ jk = i = -kj,\ ki = j = -ik.$$

Znajdźmy wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne grupy Quat i skompletujmy tablicę charakterów.

Przykład (z zad.8 zestaw 1)
Podzbiór Quat grupy $SL(2,\mathbb{C})$ złożony z macierzy:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},\ j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

oraz

$$-I,\ -i,\ -j,\ -k$$

tworzy podgrupę tej grupy.

Elementy tej grupy spełniają równości

$$i^2 = j^2 = k^2 = -I,\ ij = k = -ji,\ jk = i = -kj,\ ki = j = -ik.$$

Znajdźmy wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne grupy Quat i skompletujmy tablicę charakterów.

kl. sprzęż.	I	$-I$	i	j	k

Przykład (z zad.8 zestaw 1)
Podzbiór Quat grupy $SL(2,\mathbb{C})$ złożony z macierzy:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \; j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

oraz

$$-I, \; -i, \; -j, \; -k$$

tworzy podgrupę tej grupy.

Elementy tej grupy spełniają równości

$$i^2 = j^2 = k^2 = -I, \; ij = k = -ji, \; jk = i = -kj, \; ki = j = -ik.$$

Znajdźmy wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne grupy Quat i skompletujmy tablicę charakterów.

kl. sprzęż.	I	$-I$	i	j	k
$\frac{\lvert G\rvert}{c(s)}$	8	8	4	4	4
χ_1	1	1	1	1	1

Przykład (z zad.8 zestaw 1)
Podzbiór Quat grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ złożony z macierzy:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},\ j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

oraz

$$-I,\ -i,\ -j,\ -k$$

tworzy podgrupę tej grupy.

Elementy tej grupy spełniają równości

$$i^2 = j^2 = k^2 = -I,\ ij = k = -ji,\ jk = i = -kj,\ ki = j = -ik.$$

Znajdźmy wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne grupy Quat i skompletujmy tablicę charakterów.

kl. sprzęż.	I	$-I$	i	j	k
$\frac{\lvert G\rvert}{c(s)}$	8	8	4	4	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1

Przykład (z zad.8 zestaw 1)
Podzbiór Quat grupy $SL(2,\mathbb{C})$ złożony z macierzy:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \; j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

oraz

$$-I, \; -i, \; -j, \; -k$$

tworzy podgrupę tej grupy.

Elementy tej grupy spełniają równości

$$i^2 = j^2 = k^2 = -I, \; ij = k = -ji, \; jk = i = -kj, \; ki = j = -ik.$$

Znajdźmy wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne grupy Quat i skompletujmy tablicę charakterów.

kl. sprzęż.	I	$-I$	i	j	k
$\frac{\lvert G \rvert}{c(s)}$	8	8	4	4	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1

Przykład (z zad.8 zestaw 1)
Podzbiór Quat grupy SL$(2, \mathbb{C})$ złożony z macierzy:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \; j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

oraz

$$-I, \; -i, \; -j, \; -k$$

tworzy podgrupę tej grupy.

Elementy tej grupy spełniają równości

$$i^2 = j^2 = k^2 = -I, \; ij = k = -ji, \; jk = i = -kj, \; ki = j = -ik.$$

Znajdźmy wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne grupy Quat i skompletujmy tablicę charakterów.

kl. sprzęż.	I	$-I$	i	j	k
$\frac{\lvert G\rvert}{c(s)}$	8	8	4	4	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2				

Przykład (z zad.8 zestaw 1)
Podzbiór Quat grupy SL$(2,\mathbb{C})$ złożony z macierzy:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},\ j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

oraz

$$-I,\ -i,\ -j,\ -k$$

tworzy podgrupę tej grupy.

Elementy tej grupy spełniają równości

$$i^2 = j^2 = k^2 = -I,\ ij = k = -ji,\ jk = i = -kj,\ ki = j = -ik.$$

Znajdźmy wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne grupy Quat i skompletujmy tablicę charakterów.

kl. sprzęż.	I	$-I$	i	j	k
$\frac{\lvert G\rvert}{c(s)}$	8	8	4	4	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2			

Przykład (z zad.8 zestaw 1)
Podzbiór Quat grupy $SL(2,\mathbb{C})$ złożony z macierzy:

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ i=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0\\0&-\sqrt{-1}\end{pmatrix},\ j=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ k=\begin{pmatrix}0&\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&0\end{pmatrix}$$

oraz

$$-I,\ -i,\ -j,\ -k$$

tworzy podgrupę tej grupy.

Elementy tej grupy spełniają równości

$$i^2=j^2=k^2=-I,\ ij=k=-ji,\ jk=i=-kj,\ ki=j=-ik.$$

Znajdźmy wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne grupy Quat i skompletujmy tablicę charakterów.

kl. sprzęż.	I	$-I$	i	j	k
$\frac{\lvert G\rvert}{c(s)}$	8	8	4	4	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0		

Przykład (z zad.8 zestaw 1)
Podzbiór Quat grupy $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ złożony z macierzy:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\; i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix},\; j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\; k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

oraz

$$-I,\; -i,\; -j,\; -k$$

tworzy podgrupę tej grupy.

Elementy tej grupy spełniają równości

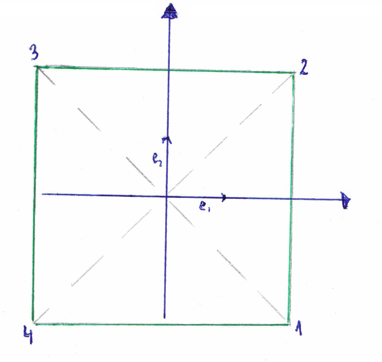
$$i^2 = j^2 = k^2 = -I,\; ij = k = -ji,\; jk = i = -kj,\; ki = j = -ik.$$

Znajdźmy wszystkie reprezentacje nieprzywiedlne grupy Quat i skompletujmy tablicę charakterów.

kl. sprzęż.	I	$-I$	i	j	k
$\frac{\lvert G\rvert}{c(s)}$	8	8	4	4	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

Zadanie

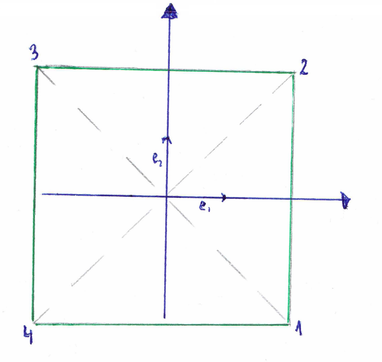
Znajdź reprezentację nieprzywiedlną stopnia 2 grupy izometrii kwadratu $D(4)$.



$$D(4) = \{\mathrm{id}, a = (1\,2\,3\,4), a^2 = (1\,3)(2\,4), a^3 = (1\,4\,3\,2),$$
$$b = (1\,2)(3\,4), ab = (1\,3), a^2b = (1\,4)(2\,3), a^3b = (2\,4)\}.$$

Zadanie

Znajdź reprezentację nieprzywiedlną stopnia 2 grupy izometrii kwadratu $D(4)$.

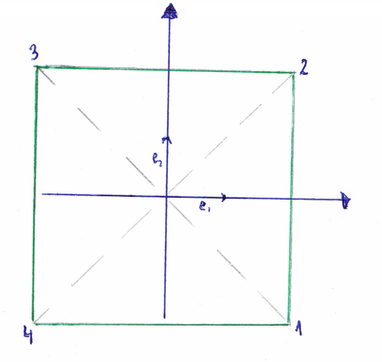


$$D(4) = \{\mathrm{id}, a = (1\,2\,3\,4), a^2 = (1\,3)(2\,4), a^3 = (1\,4\,3\,2),$$
$$b = (1\,2)(3\,4), ab = (1\,3), a^2 b = (1\,4)(2\,3), a^3 b = (2\,4)\}.$$

$a \longmapsto$

Zadanie

Znajdź reprezentację nieprzywiedlną stopnia 2 grupy izometrii kwadratu $D(4)$.

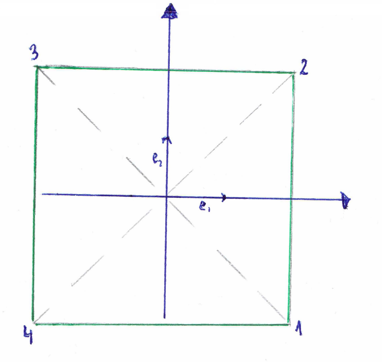


$$D(4) = \{\mathrm{id}, a = (1\,2\,3\,4), a^2 = (1\,3)(2\,4), a^3 = (1\,4\,3\,2),$$
$$b = (1\,2)(3\,4), ab = (1\,3), a^2b = (1\,4)(2\,3), a^3b = (2\,4)\}.$$

$$a \longmapsto A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix},$$

Zadanie

Znajdź reprezentację nieprzywiedlną stopnia 2 grupy izometrii kwadratu $D(4)$.

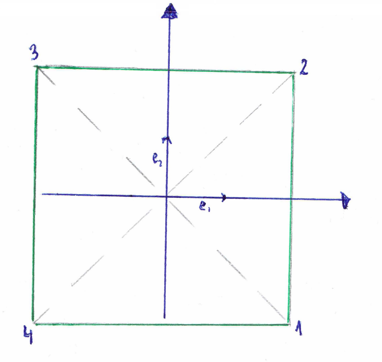


$$D(4) = \{\mathrm{id}, a = (1\,2\,3\,4), a^2 = (1\,3)(2\,4), a^3 = (1\,4\,3\,2),$$
$$b = (1\,2)(3\,4), ab = (1\,3), a^2 b = (1\,4)(2\,3), a^3 b = (2\,4)\}.$$

$$a \longmapsto A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \quad b \longmapsto$$

Zadanie

Znajdź reprezentację nieprzywiedlną stopnia 2 grupy izometrii kwadratu $D(4)$.

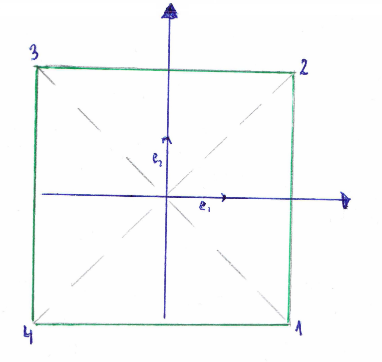


$$D(4) = \{\mathrm{id}, a = (1\,2\,3\,4), a^2 = (1\,3)(2\,4), a^3 = (1\,4\,3\,2),$$
$$b = (1\,2)(3\,4), ab = (1\,3), a^2b = (1\,4)(2\,3), a^3b = (2\,4)\}.$$

$$a \longmapsto A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \quad b \longmapsto B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a^k b^l \longmapsto$$

Zadanie

Znajdź reprezentację nieprzywiedlną stopnia 2 grupy izometrii kwadratu $D(4)$.



$$D(4) = \{\mathrm{id}, a = (1\,2\,3\,4), a^2 = (1\,3)(2\,4), a^3 = (1\,4\,3\,2),$$
$$b = (1\,2)(3\,4), ab = (1\,3), a^2 b = (1\,4)(2\,3), a^3 b = (2\,4)\}.$$

$$a \longmapsto A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \quad b \longmapsto B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad a^k b^l \longmapsto A^k B^l$$