Wybrane metody algebraiczne
Wykład 4 - reprezentacje liniowe grup (c.d.)

Andrzej Sładek
sladek@ux2.math.us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s \in G}{\forall} \ \rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s.$$

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s \in G}{\forall} \ \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s\in G}{\forall} \; \rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s\in G}{\forall} \ \rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s \in G}{\forall} \quad \rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią $G-$niezmienniczą reprezentacji ρ^1.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s \in G}{\forall} \; \rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią $G-$niezmienniczą reprezentacji ρ^1. Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho^1_s(\alpha)) = \rho^2_s(f(\alpha)) = \rho^2_s(\theta) = \theta,$$

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s \in G}{\forall} \quad \rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią $G-$niezmienniczą reprezentacji ρ^1. Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho^1_s(\alpha)) = \rho^2_s(f(\alpha)) = \rho^2_s(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho^1_s(\alpha) \in \ker f$.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s \in G}{\forall} \; \rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią $G-$niezmienniczą reprezentacji ρ^1. Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho^1_s(\alpha)) = \rho^2_s(f(\alpha)) = \rho^2_s(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho^1_s(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s \in G}{\forall} \ \rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią $G-$niezmienniczą reprezentacji ρ^1. Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho^1_s(\alpha)) = \rho^2_s(f(\alpha)) = \rho^2_s(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho^1_s(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$. Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \mathrm{im} f$ równa jest V_2.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s \in G}{\forall} \ \rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią $G-$niezmienniczą reprezentacji ρ^1. Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho^1_s(\alpha)) = \rho^2_s(f(\alpha)) = \rho^2_s(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho^1_s(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$.
Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \mathrm{im} f$ równa jest V_2.
Zatem f jest izomorfizmem i reprezentacje sa równoważne.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \forall_{s \in G} \ \rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią $G-$niezmienniczą reprezentacji ρ^1. Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho^1_s(\alpha)) = \rho^2_s(f(\alpha)) = \rho^2_s(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho^1_s(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$.
Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \mathrm{im} f$ równa jest V_2.
Zatem f jest izomorfizmem i reprezentacje sa równoważne.
Załóżmy, że $V = V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s \in G}{\forall} \quad \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią $G-$niezmienniczą reprezentacji ρ^1. Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho_s^1(\alpha)) = \rho_s^2(f(\alpha)) = \rho_s^2(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho_s^1(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$.
Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \mathrm{im} f$ równa jest V_2.
Zatem f jest izomorfizmem i reprezentacje sa równoważne.
Załóżmy, że $V = V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$. Rozważmy odwzorowanie $f' := f - \lambda \mathrm{id}_V$, gdzie λ jest wartością własną odwzorowania f.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s \in G}{\forall} \; \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią $G-$niezmienniczą reprezentacji ρ^1. Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho_s^1(\alpha)) = \rho_s^2(f(\alpha)) = \rho_s^2(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho_s^1(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$.
Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \mathrm{im} f$ równa jest V_2.
Zatem f jest izomorfizmem i reprezentacje sa równoważne.
Załóżmy, że $V = V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$. Rozważmy odwzorowanie $f' := f - \lambda \mathrm{id}_V$, gdzie λ jest wartością własną odwzorowania f. Zauważmy, że f' spełnia warunek (*)

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s \in G}{\forall} \ \rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią $G-$niezmienniczą reprezentacji ρ^1. Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho^1_s(\alpha)) = \rho^2_s(f(\alpha)) = \rho^2_s(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho^1_s(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$.
Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \mathrm{im} f$ równa jest V_2.
Zatem f jest izomorfizmem i reprezentacje sa równoważne.
Załóżmy, że $V = V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$. Rozważmy odwzorowanie $f' := f - \lambda \mathrm{id}_V$, gdzie λ jest wartością własną odwzorowania f. Zauważmy, że f' spełnia warunek (*) i ma nietrywialne jądro,

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s\in G}{\forall} \quad \rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią $G-$niezmienniczą reprezentacji ρ^1. Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho^1_s(\alpha)) = \rho^2_s(f(\alpha)) = \rho^2_s(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho^1_s(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$.
Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \mathrm{im} f$ równa jest V_2.
Zatem f jest izomorfizmem i reprezentacje sa równoważne.
Załóżmy, że $V = V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$. Rozważmy odwzorowanie $f' := f - \lambda \mathrm{id}_V$, gdzie λ jest wartością własną odwzorowania f. Zauważmy, że f' spełnia warunek (*) i ma nietrywialne jądro, więc $f' = 0$, tzn. $f = \lambda \mathrm{id}_V$. ♣

Wniosek

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi skończonej grupy G rzędu g oraz niech $h : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym.

Wniosek

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi skończonej grupy G rzędu g oraz niech $h : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

$$h^0 = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}(\rho^2_s)^{-1} \circ h \circ \rho^1_s = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}(\rho^2_{s^{-1}}) \circ h \circ \rho^1_s.$$

Wniosek

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi skończonej grupy G rzędu g oraz niech $h : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho^2_s)^{-1} \circ h \circ \rho^1_s = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho^2_{s^{-1}}) \circ h \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $h^0 = 0$.

Wniosek

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi skończonej grupy G rzędu g oraz niech $h : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho_s^2)^{-1} \circ h \circ \rho_s^1 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho_{s^{-1}}^2) \circ h \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $h^0 = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to h^0 jest homotetią o współczynniku $\frac{1}{n}\mathrm{tr}(h)$, gdzie $n = \dim V_1$.

Wniosek

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi skończonej grupy G rzędu g oraz niech $h : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho^2_s)^{-1} \circ h \circ \rho^1_s = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho^2_{s^{-1}}) \circ h \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $h^0 = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to h^0 jest homotetią o współczynniku $\frac{1}{n}\mathrm{tr}(h)$, gdzie $n = \dim V_1$.

Wniosek

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi skończonej grupy G rzędu g oraz niech $h : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho^2_s)^{-1} \circ h \circ \rho^1_s = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho^2_{s^{-1}}) \circ h \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $h^0 = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to h^0 jest homotetią o współczynniku $\frac{1}{n}\mathrm{tr}(h)$, gdzie $n = \dim V_1$.

Dowód. Na tablicy sprawdzić warunek (*) dla h^0 i zauważyć, że $\mathrm{tr}(h^0) = \mathrm{tr}(h)$. ♣

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ_s^1, ρ_s^2, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s))$, (c_{jk}).

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ^1_s, ρ^2_s, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s))$, (c_{jk}). Wtedy macierzą h^0 jest (c^0_{il}), gdzie

$$c^0_{il} = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \sum_{j,k} b_{ij}(s^{-1}) c_{jk} a_{kl}(s) = \sum_{j,k} \left(\frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) \right) c_{jk} .$$

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami $\rho_s^1,\ \rho_s^2,\ h$ będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (\ b_{ij}(s)),\ (c_{jk})$. Wtedy macierzą h^0 jest (c_{il}^0), gdzie

$$c_{il}^0 = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\sum_{j,k}\ b_{ij}(s^{-1})c_{jk}\,a_{kl}(s) = \sum_{j,k}\left(\frac{1}{g}\sum_{s\in G}\ b_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s)\right)c_{jk}.$$

Wyrażenie po prawej stronie jest formą liniową względem c_{jk}

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ_s^1, ρ_s^2, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s))$, (c_{jk}). Wtedy macierzą h^0 jest (c_{il}^0), gdzie

$$c_{il}^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \sum_{j,k} b_{ij}(s^{-1}) c_{jk} a_{kl}(s) = \sum_{j,k} \left(\frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) \right) c_{jk}.$$

Wyrażenie po prawej stronie jest formą liniową względem c_{jk} i ponieważ w przypadku (1) znika dla dowolnych wartości dla każdego układu c_{jk},

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ^1_s, ρ^2_s, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s))$, (c_{jk}). Wtedy macierzą h^0 jest (c^0_{il}), gdzie

$$c^0_{il} = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\sum_{j,k} b_{ij}(s^{-1})c_{jk}a_{kl}(s) = \sum_{j,k}\left(\frac{1}{g}\sum_{s\in G} b_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s)\right)c_{jk}.$$

Wyrażenie po prawej stronie jest formą liniową względem c_{jk} i ponieważ w przypadku (1) znika dla dowolnych wartości dla każdego układu c_{jk}, więc mamy

$$\forall_{i,j,k,l} \quad \frac{1}{g}\sum_{s\in G} b_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s) = 0.$$

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ^1_s, ρ^2_s, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s))$, (c_{jk}). Wtedy macierzą h^0 jest (c^0_{il}), gdzie

$$c^0_{il} = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\sum_{j,k} b_{ij}(s^{-1})c_{jk}a_{kl}(s) = \sum_{j,k}\left(\frac{1}{g}\sum_{s\in G} b_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s)\right)c_{jk}.$$

Wyrażenie po prawej stronie jest formą liniową względem c_{jk} i ponieważ w przypadku (1) znika dla dowolnych wartości dla każdego układu c_{jk}, więc mamy

$$\underset{i,j,k,l}{\forall} \quad \frac{1}{g}\sum_{s\in G} b_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s) = 0.$$

W przypadku (2) macierze $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s))$ są równe oraz $c^0_{il} = \frac{1}{n}\delta_{il}\sum_{j,k}\delta_{jk}c_{jk}$,

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ_s^1, ρ_s^2, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s))$, (c_{jk}). Wtedy macierzą h^0 jest (c_{il}^0), gdzie

$$c_{il}^0 = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\sum_{j,k} b_{ij}(s^{-1})c_{jk}a_{kl}(s) = \sum_{j,k}\left(\frac{1}{g}\sum_{s\in G} b_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s)\right)c_{jk}.$$

Wyrażenie po prawej stronie jest formą liniową względem c_{jk} i ponieważ w przypadku (1) znika dla dowolnych wartości dla każdego układu c_{jk}, więc mamy

$$\underset{i,j,k,l}{\forall} \quad \frac{1}{g}\sum_{s\in G} b_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s) = 0.$$

W przypadku (2) macierze $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s))$ są równe oraz $c_{il}^0 = \frac{1}{n}\delta_{il}\sum_{j,k}\delta_{jk}c_{jk}$, więc

$$\sum_{j,k}\frac{1}{n}\delta_{il}\,\delta_{jk}c_{jk} = \sum_{j,k}\left(\frac{1}{g}\sum_{s\in G} b_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s)\right)c_{jk}.$$

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ^1_s, ρ^2_s, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s))$, (c_{jk}). Wtedy macierzą h^0 jest (c^0_{il}), gdzie

$$c^0_{il} = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\sum_{j,k} b_{ij}(s^{-1})c_{jk}a_{kl}(s) = \sum_{j,k}\left(\frac{1}{g}\sum_{s\in G} b_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s)\right)c_{jk}.$$

Wyrażenie po prawej stronie jest formą liniową względem c_{jk} i ponieważ w przypadku (1) znika dla dowolnych wartości dla każdego układu c_{jk}, więc mamy

$$\underset{i,j,k,l}{\forall} \quad \frac{1}{g}\sum_{s\in G} b_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s) = 0.$$

W przypadku (2) macierze $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s))$ są równe oraz $c^0_{il} = \frac{1}{n}\delta_{il}\sum_{j,k}\delta_{jk}c_{jk}$, więc

$$\sum_{j,k}\frac{1}{n}\delta_{il}\,\delta_{jk}c_{jk} = \sum_{j,k}\left(\frac{1}{g}\sum_{s\in G} b_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s)\right)c_{jk}.$$

i wtedy mamy

$$\underset{i,j,k,l}{\forall} \quad \frac{1}{g}\sum_{s\in G} a_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{jeśli } i = l,\ j = k \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}. \quad \clubsuit$$

Niech G będzie grupą skończoną. W zbiorze $\mathbb{C}^G$ określamy odwzorowanie

$$(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G :\longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi|\psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s)\overline{\psi(s)}.$$

Niech G będzie grupą skończoną. W zbiorze $\mathbb{C}^G$ określamy odwzorowanie

$$(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G :\longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi|\psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s)\overline{\psi(s)}.$$

Uwaga Odwzorowanie ma następujące własności:

1. Jest półtoraliniowe, tzn.

$$(a\varphi + b\psi, \sigma) = a(\varphi, \sigma) + b(\psi, \sigma)$$

$$(\sigma, a\varphi + b\psi) = \overline{a}(\sigma, \varphi) + \overline{b}(\sigma, \psi).$$

Niech G będzie grupą skończoną. W zbiorze $\mathbb{C}^G$ określamy odwzorowanie

$$(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G :\longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi|\psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s)\overline{\psi(s)}.$$

Uwaga Odwzorowanie ma następujące własności:

1. Jest półtoraliniowe, tzn.

$$(a\varphi + b\psi, \sigma) = a(\varphi, \sigma) + b(\psi, \sigma)$$

$$(\sigma, a\varphi + b\psi) = \overline{a}(\sigma, \varphi) + \overline{b}(\sigma, \psi).$$

2. $(\varphi|\varphi)$ jest liczbą rzeczywistą oraz $(\varphi|\varphi) > 0$ dla $\varphi \neq 0$.

Niech G będzie grupą skończoną. W zbiorze $\mathbb{C}^G$ określamy odwzorowanie

$$(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G :\longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi|\psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s)\overline{\psi(s)}.$$

Uwaga Odwzorowanie ma następujące własności:

1. Jest półtoraliniowe, tzn.

$$(a\varphi + b\psi, \sigma) = a(\varphi, \sigma) + b(\psi, \sigma)$$

$$(\sigma, a\varphi + b\psi) = \overline{a}(\sigma, \varphi) + \overline{b}(\sigma, \psi).$$

2. $(\varphi|\varphi)$ jest liczbą rzeczywistą oraz $(\varphi|\varphi) > 0$ dla $\varphi \neq 0$.
3. $(\varphi|\psi) = \overline{(\psi|\varphi)}$.

Niech G będzie grupą skończoną. W zbiorze $\mathbb{C}^G$ określamy odwzorowanie

$$(\cdot | \cdot) : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G :\longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi|\psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s)\overline{\psi(s)}.$$

Uwaga Odwzorowanie ma następujące własności:

1. Jest półtoraliniowe, tzn.

$$(a\varphi + b\psi, \sigma) = a(\varphi, \sigma) + b(\psi, \sigma)$$

$$(\sigma, a\varphi + b\psi) = \overline{a}(\sigma, \varphi) + \overline{b}(\sigma, \psi).$$

2. $(\varphi|\varphi)$ jest liczbą rzeczywistą oraz $(\varphi|\varphi) > 0$ dla $\varphi \neq 0$.
3. $(\varphi|\psi) = \overline{(\psi|\varphi)}$.
4. Jeśli φ oraz ψ są charakterami, to $(\varphi|\psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s)\psi(s^{-1})$.

Twierdzenie

1. Jeśli χ jest charakterem reprezentacji grupy G, to $(\chi|\chi) = 1$, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym (pokażemy później implikację w drugą stronę).

Dowód. Niech $\rho_s = (a_{ij}(s)),\ \rho'_s = (b_{ij}(s)),\ \chi(s) = \sum_i a_{ii}(s),\ \chi'(s) = \sum_j b_{jj}(s)$.

Twierdzenie

1. Jeśli χ jest charakterem reprezentacji grupy G, to $(\chi|\chi) = 1$, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym (pokażemy później implikację w drugą stronę).
2. Jeśli χ oraz χ' są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych nierównoważnych, to $(\chi|\chi') = 0$.

Dowód. Niech $\rho_s = (a_{ij}(s)),\ \rho'_s = (b_{ij}(s)),\ \chi(s) = \sum_i a_{ii}(s),\ \chi'(s) = \sum_j b_{jj}(s)$.

Twierdzenie

1. Jeśli χ jest charakterem reprezentacji grupy G, to $(\chi|\chi) = 1$, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym (pokażemy później implikację w drugą stronę).
2. Jeśli χ oraz χ' są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych nierównoważnych, to $(\chi|\chi') = 0$.

Dowód. Niech $\rho_s = (a_{ij}(s)),\ \rho'_s = (b_{ij}(s)),\ \chi(s) = \sum_i a_{ii}(s),\ \chi'(s) = \sum_j b_{jj}(s)$.

Twierdzenie

1. Jeśli χ jest charakterem reprezentacji grupy G, to $(\chi|\chi) = 1$, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym (pokażemy później implikację w drugą stronę).
2. Jeśli χ oraz χ' są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych nierównoważnych, to $(\chi|\chi') = 0$.

Dowód. Niech $\rho_s = (a_{ij}(s)),\ \rho'_s = (b_{ij}(s)),\ \chi(s) = \sum_i a_{ii}(s),\ \chi'(s) = \sum_j b_{jj}(s).$

Wtedy

$$(\chi|\chi') = \frac{1}{|G|} \sum_{s\in G} \sum_{i,j} a_{ii}(s) b_{jj}(s^{-1}) =$$

Twierdzenie

1. Jeśli χ jest charakterem reprezentacji grupy G, to $(\chi|\chi) = 1$, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym (pokażemy później implikację w drugą stronę).
2. Jeśli χ oraz χ' są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych nierównoważnych, to $(\chi|\chi') = 0$.

Dowód. Niech $\rho_s = (a_{ij}(s)),\ \rho'_s = (b_{ij}(s)),\ \chi(s) = \sum_i a_{ii}(s),\ \chi'(s) = \sum_j b_{jj}(s)$.

Wtedy

$$(\chi|\chi') = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \sum_{i,j} a_{ii}(s) b_{jj}(s^{-1}) = \begin{cases} 1, & \text{w pierwszym przypadku} \\ 0, & \text{w drugim przypadku} \end{cases}$$

Twierdzenie

1. Jeśli χ jest charakterem reprezentacji grupy G, to $(\chi|\chi) = 1$, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym (pokażemy później implikację w drugą stronę).
2. Jeśli χ oraz χ' są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych nierównoważnych, to $(\chi|\chi') = 0$.

Dowód. Niech $\rho_s = (a_{ij}(s)),\ \rho'_s = (b_{ij}(s)),\ \chi(s) = \sum_i a_{ii}(s),\ \chi'(s) = \sum_j b_{jj}(s).$

Wtedy

$$(\chi|\chi') = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \sum_{i,j} a_{ii}(s) b_{jj}(s^{-1}) = \begin{cases} 1, & \text{w pierwszym przypadku} \\ 0, & \text{w drugim przypadku} \end{cases} \qquad \clubsuit$$

Twierdzenie

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy skończonej G oraz niech χ będzie jej charakterem.

Twierdzenie

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy skończonej G oraz niech χ będzie jej charakterem. Niech

$$(*) \quad \rho = \rho^1 \oplus ... \oplus \rho^k$$

będzie rozkładem na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych wyznaczonym przez ten rozkład przestrzeni V.

Twierdzenie

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy skończonej G oraz niech χ będzie jej charakterem. Niech

$$(*) \quad \rho = \rho^1 \oplus ... \oplus \rho^k$$

będzie rozkładem na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych wyznaczonym przez ten rozkład przestrzeni V.
Jeśli $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W)$ jest reprezentacją nieprzywiedlną grupy G o charakterze χ', to liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w powyższym rozkładzie równoważnych ρ' jest równa $(\chi|\chi')$.

Twierdzenie

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy skończonej G oraz niech χ będzie jej charakterem. Niech

$$(*) \quad \rho = \rho^1 \oplus ... \oplus \rho^k$$

będzie rozkładem na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych wyznaczonym przez ten rozkład przestrzeni V.
Jeśli $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W)$ jest reprezentacją nieprzywiedlną grupy G o charakterze χ', to liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w powyższym rozkładzie równoważnych ρ' jest równa $(\chi|\chi')$.

Dowód. Niech χ_i będzie charakterem reprezentacji ρ^i dla $i = 1, ..., k$.

Twierdzenie

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy skończonej G oraz niech χ będzie jej charakterem. Niech

$$(*) \quad \rho = \rho^1 \oplus \ldots \oplus \rho^k$$

będzie rozkładem na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych wyznaczonym przez ten rozkład przestrzeni V.
Jeśli $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W)$ jest reprezentacją nieprzywiedlną grupy G o charakterze χ', to liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w powyższym rozkładzie równoważnych ρ' jest równa $(\chi|\chi')$.

Dowód. Niech χ_i będzie charakterem reprezentacji ρ^i dla $i = 1, \ldots, k$.
Wtedy $\chi = \chi_1 + \ldots + \chi_k$ oraz

$$(\chi|\chi') = (\chi_1 + \ldots + \chi_k|\chi') = (\chi_1|\chi') + \ldots + (\chi_k|\chi') = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k,$$

gdzie

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \rho^i \cong \rho' \\ 0, & \text{gdy } \rho^i \ncong \rho' \end{cases} . \quad \clubsuit$$

Wnioski

- Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w rozkładzie $(*)$ równoważnych ustalonej reprezentacji nieprzywiedlnej nie zależy od rozkładu.

Wnioski

- Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w rozkładzie $(*)$ równoważnych ustalonej reprezentacji nieprzywiedlnej nie zależy od rozkładu.
- Dwie reprezentacje grupy G są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe charaktery.

Wnioski

- Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w rozkładzie $(*)$ równoważnych ustalonej reprezentacji nieprzywiedlnej nie zależy od rozkładu.
- Dwie reprezentacje grupy G są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe charaktery.
- Jeśli $\rho = m_1\rho^1 \oplus \ldots \oplus m_k\rho^k$ jest rozkładem reprezentacji o charakterze χ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych, to

$$(\chi|\chi) = \sum_{i=1}^{k} m_i^2.$$

Wnioski

- Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w rozkładzie $(*)$ równoważnych ustalonej reprezentacji nieprzywiedlnej nie zależy od rozkładu.
- Dwie reprezentacje grupy G są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe charaktery.
- Jeśli $\rho = m_1\rho^1 \oplus \ldots \oplus m_k\rho^k$ jest rozkładem reprezentacji o charakterze χ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych, to

$$(\chi|\chi) = \sum_{i=1}^{k} m_i^2 .$$

- $(\chi|\chi) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym.

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases} .$$

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases} .$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \mathrm{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases} .$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \text{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \mathrm{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases} .$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \mathrm{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \mathrm{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej ρ grupy G.

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \operatorname{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej ρ grupy G. Wtedy liczba podreprezentacji reprezentacji regularnej równoważnych ρ jest równa

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \mathrm{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej ρ grupy G. Wtedy liczba podreprezentacji reprezentacji regularnej równoważnych ρ jest równa

$$(r_G|\chi) =$$

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \mathrm{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g\in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej ρ grupy G. Wtedy liczba podreprezentacji reprezentacji regularnej równoważnych ρ jest równa

$$(r_G|\chi) = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G} r_G(s)\chi(s^{-1}) =$$

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \mathrm{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej ρ grupy G. Wtedy liczba podreprezentacji reprezentacji regularnej równoważnych ρ jest równa

$$(r_G|\chi) = \frac{1}{|G|}\sum_{s \in G} r_G(s)\chi(s^{-1}) = \frac{1}{|G|} r_G(1)\chi(1) =$$

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \mathrm{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g\in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej ρ grupy G. Wtedy liczba podreprezentacji reprezentacji regularnej równoważnych ρ jest równa

$$(r_G|\chi) = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G} r_G(s)\chi(s^{-1}) = \frac{1}{|G|} r_G(1)\chi(1) = \chi(1) =$$

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \operatorname{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g\in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej ρ grupy G. Wtedy liczba podreprezentacji reprezentacji regularnej równoważnych ρ jest równa

$$(r_G|\chi) = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G} r_G(s)\chi(s^{-1}) = \frac{1}{|G|} r_G(1)\chi(1) = \chi(1) = \operatorname{st}\rho. \quad ♣$$

Wniosek

1. Jeżeli $n_1, \ldots, n_h$ są stopniami wszystkich reprezentacji nieprzywiedlnych grupy skończonej G, to
$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|.$$

Wniosek

1. Jeżeli $n_1, \ldots, n_h$ są stopniami wszystkich reprezentacji nieprzywiedlnych grupy skończonej G, to
$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|.$$
2. Jeśli $1 \neq s \in G$ oraz $\chi_1, \ldots, \chi_h$ są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G, to
$$\sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s) = 0.$$

Wniosek

1. Jeżeli $n_1, \ldots, n_h$ są stopniami wszystkich reprezentacji nieprzywiedlnych grupy skończonej G, to
$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|.$$
2. Jeśli $1 \neq s \in G$ oraz $\chi_1, \ldots, \chi_h$ są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G, to
$$\sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s) = 0.$$

Wniosek

1. Jeżeli $n_1, \dots, n_h$ są stopniami wszystkich reprezentacji nieprzywiedlnych grupy skończonej G, to
$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|.$$
2. Jeśli $1 \neq s \in G$ oraz $\chi_1, \dots, \chi_h$ są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G, to
$$\sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s) = 0.$$

Dowód. Z poprzedniego wniosku oraz stwierdzenia mamy

$$r_G(s) = \sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases} \qquad \clubsuit$$

Wyprowadziliśmy bardzo ważny wzór dotyczący stopni reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|.$$

Wyprowadziliśmy bardzo ważny wzór dotyczący stopni reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|.$$

Uwagi

- Później pokażemy, że jeszcze dodatkowo $n_i||G|$.

Wyprowadziliśmy bardzo ważny wzór dotyczący stopni reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|.$$

Uwagi

- Później pokażemy, że jeszcze dodatkowo $n_i \| G|$.
- Zwróćmy uwagę na pożyteczność powyższego wzoru, gdy już znamy pewne reprezentacje nieprzywiedlne grupy G.

Wyprowadziliśmy bardzo ważny wzór dotyczący stopni reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|.$$

Uwagi

- Później pokażemy, że jeszcze dodatkowo $n_i||G|$.
- Zwróćmy uwagę na pożyteczność powyższego wzoru, gdy już znamy pewne reprezentacje nieprzywiedlne grupy G.
- Jakie możliwe są stopnie reprezentacji nieprzywiedlnych grupy 6-cio elementowej?

Wyprowadziliśmy bardzo ważny wzór dotyczący stopni reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|.$$

Uwagi

- Później pokażemy, że jeszcze dodatkowo $n_i||G|$.
- Zwróćmy uwagę na pożyteczność powyższego wzoru, gdy już znamy pewne reprezentacje nieprzywiedlne grupy G.
- Jakie możliwe są stopnie reprezentacji nieprzywiedlnych grupy 6-cio elementowej?

Wyprowadziliśmy bardzo ważny wzór dotyczący stopni reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|.$$

Uwagi

- Później pokażemy, że jeszcze dodatkowo $n_i \mid |G|$.
- Zwróćmy uwagę na pożyteczność powyższego wzoru, gdy już znamy pewne reprezentacje nieprzywiedlne grupy G.
- Jakie możliwe są stopnie reprezentacji nieprzywiedlnych grupy 6-cio elementowej? To samo dla grupy 8-mio elementowej.