Wybrane metody algebraiczne
Wykład 3 - reprezentacje liniowe grup

Andrzej Sładek
sladek@ux2.math.us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Na początku dwie ważne informacje:

Na początku dwie ważne informacje:

- Zbiór $\mathrm{Aut}(V)$ automorfizmów przestrzeni liniowej V (nad dowolnym ciałem K) z działaniem składania odwzorowań jest grupą.

Na początku dwie ważne informacje:

- Zbiór $\mathrm{Aut}(V)$ automorfizmów przestrzeni liniowej V (nad dowolnym ciałem K) z działaniem składania odwzorowań jest grupą.
- Jeżeli $\dim_K V = n < \infty$, to grupa $\mathrm{Aut}(V)$ jest izomorficzna z ogólną grupą liniową $\mathrm{GL}(n, K)$.

Na początku dwie ważne informacje:

- Zbiór $\mathrm{Aut}(V)$ automorfizmów przestrzeni liniowej V (nad dowolnym ciałem K) z działaniem składania odwzorowań jest grupą.

- Jeżeli $\dim_K V = n < \infty$, to grupa $\mathrm{Aut}(V)$ jest izomorficzna z ogólną grupą liniową $\mathrm{GL}(n, K)$.
  Przyporządkowanie automorfizmowi jego macierzy (w dowolnie ustalonej) bazie jest izomorfizmem pomiędzy tymi grupami.

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$.

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$.

Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s.

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$.
Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s.
Stopniem reprezentacji będziemy nazywać wymiar przestrzeni V.

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$.
Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s.
Stopniem reprezentacji będziemy nazywać wymiar przestrzeni V.
Reprezentację ρ nazywamy **wierną**, jeśli ρ jest monomorfizmem.

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$.
Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s.
Stopniem reprezentacji będziemy nazywać wymiar przestrzeni V.
Reprezentację ρ nazywamy **wierną**, jeśli ρ jest monomorfizmem.
Uwzględniając informację z poprzedniego slajdu w przypadku, gdy $\dim_K V = n < \infty$, reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ możemy traktować jako homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, K)$.

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$.
Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s.
Stopniem reprezentacji będziemy nazywać wymiar przestrzeni V.
Reprezentację ρ nazywamy **wierną**, jeśli ρ jest monomorfizmem.
Uwzględniając informację z poprzedniego slajdu w przypadku, gdy $\dim_K V = n < \infty$, reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ możemy traktować jako homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, K)$.

Uwaga

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją, to

- $\rho_1 = \mathrm{id}_V$,

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$.
Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s.
Stopniem reprezentacji będziemy nazywać wymiar przestrzeni V.
Reprezentację ρ nazywamy **wierną**, jeśli ρ jest monomorfizmem.
Uwzględniając informację z poprzedniego slajdu w przypadku, gdy $\dim_K V = n < \infty$, reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ możemy traktować jako homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, K)$.

Uwaga

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją, to

- $\rho_1 = \mathrm{id}_V$,
- $\rho_{s^{-1}} = \rho_s^{-1}$ dla $s \in G$,

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$.
Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s.
Stopniem reprezentacji będziemy nazywać wymiar przestrzeni V.
Reprezentację ρ nazywamy **wierną**, jeśli ρ jest monomorfizmem.
Uwzględniając informację z poprzedniego slajdu w przypadku, gdy $\dim_K V = n < \infty$, reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ możemy traktować jako homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, K)$.

Uwaga

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją, to

- $\rho_1 = \mathrm{id}_V$,
- $\rho_{s^{-1}} = \rho_s^{-1}$ dla $s \in G$,
- $\rho_{st} = \rho_s \circ \rho_t$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X, to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X, to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X, to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujmy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X, to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujmy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X, to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujmy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X. Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n),\ X = \{1, ..., n\},\ \sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n),\ k \in \{1, ..., n\}$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X, to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujmy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X. Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n)$, $X = \{1, ..., n\}$, $\sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n)$, $k \in \{1, ..., n\}$.
  Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X, to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujmy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X. Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n)$, $X = \{1, ..., n\}$, $\sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n)$, $k \in \{1, ..., n\}$.
  Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G.Taka reprezentacja okaże się bardzo ważną.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X, to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujmy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X. Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n),\ X = \{1, ..., n\},\ \sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n),\ k \in \{1, ..., n\}$.
  Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G.Taka reprezentacja okaże się bardzo ważną. Nazywamy ją **reprezentacją regularną** grupy G.
- $G = \mathrm{GL}(n, K),\ V = \mathrm{M}(n, K),\ \rho_A(X) = AX$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K),\ X \in \mathrm{M}(n, K)$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X, to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujmy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X. Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n),\ X = \{1, ..., n\},\ \sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n),\ k \in \{1, ..., n\}$.
  Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G.Taka reprezentacja okaże się bardzo ważną. Nazywamy ją **reprezentacją regularną** grupy G.
- $G = \mathrm{GL}(n, K),\ V = \mathrm{M}(n, K),\ \rho_A(X) = AX$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K),\ X \in \mathrm{M}(n, K)$.
- $G = \mathrm{GL}(n, K),\ V = \mathrm{M}(n, K),\ \rho_A(X) = AXA^{-1}$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K),\ X \in \mathrm{M}(n, K)$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X, to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujmy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X. Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n),\ X = \{1, ..., n\},\ \sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n),\ k \in \{1, ..., n\}$.
  Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G.Taka reprezentacja okaże się bardzo ważną. Nazywamy ją **reprezentacją regularną** grupy G.
- $G = \mathrm{GL}(n, K),\ V = \mathrm{M}(n, K),\ \rho_A(X) = AX$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K),\ X \in \mathrm{M}(n, K)$.
- $G = \mathrm{GL}(n, K),\ V = \mathrm{M}(n, K),\ \rho_A(X) = AXA^{-1}$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K),\ X \in \mathrm{M}(n, K)$.
- Niech $G = (a)$ będzie grupą cykliczną rzędu m oraz niech $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ będzie macierzą taką, że $A^m = I_n$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X, to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujmy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X. Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n),\ X = \{1, ..., n\},\ \sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n),\ k \in \{1, ..., n\}$.
  Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G.Taka reprezentacja okaże się bardzo ważną. Nazywamy ją **reprezentacją regularną** grupy G.
- $G = \mathrm{GL}(n, K),\ V = \mathrm{M}(n, K),\ \rho_A(X) = AX$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K),\ X \in \mathrm{M}(n, K)$.
- $G = \mathrm{GL}(n, K),\ V = \mathrm{M}(n, K),\ \rho_A(X) = AXA^{-1}$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K),\ X \in \mathrm{M}(n, K)$.
- Niech $G = (a)$ będzie grupą cykliczną rzędu m oraz niech $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ będzie macierzą taką, że $A^m = I_n$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X, to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujmy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X. Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n),\ X = \{1, ..., n\},\ \sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n),\ k \in \{1, ..., n\}$.
  Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G.Taka reprezentacja okaże się bardzo ważną. Nazywamy ją **reprezentacją regularną** grupy G.
- $G = \mathrm{GL}(n, K),\ V = \mathrm{M}(n, K),\ \rho_A(X) = AX$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K),\ X \in \mathrm{M}(n, K)$.
- $G = \mathrm{GL}(n, K),\ V = \mathrm{M}(n, K),\ \rho_A(X) = AXA^{-1}$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K),\ X \in \mathrm{M}(n, K)$.
- Niech $G = (a)$ będzie grupą cykliczną rzędu m oraz niech $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ będzie macierzą taką, że $A^m = I_n$. Wtedy

$$\rho^A : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(K^n),\ \rho^A_{a^k}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = A^k \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

jest reprezentacją.

Definicja

Reprezentacje $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ oraz $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V')$ grupy G nazywamy **równoważnymi**, jeśli istnieje izomorfizm $\tau : V \longrightarrow V'$ taki, że

$$\underset{s \in G}{\forall} \ \tau \circ \rho_s = \rho'_s \circ \tau.$$

Definicja

Reprezentacje $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ oraz $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V')$ grupy G nazywamy **równoważnymi**, jeśli istnieje izomorfizm $\tau : V \longrightarrow V'$ taki, że

$$\underset{s \in G}{\forall} \ \tau \circ \rho_s = \rho'_s \circ \tau.$$

Uwaga

Jeśli wartości reprezentacji traktujemy macierzowo, tzn. $\rho_s = A_s$, $\rho'_s = A'_s$, to warunek równoważności tych reprezentacji przyjmuje następującą postać:

$$\underset{C \in \mathrm{GL}(n,K)}{\exists} \ \underset{s \in G}{\forall} \ CA_s = A'_s C.$$

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G. Podprzestrzeń U przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią G-**niezmienniczą**, jeśli $\underset{s\in G}{\forall}\ \rho_s(U) \subseteq U$.

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G. Podprzestrzeń U przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią G-**niezmienniczą**, jeśli $\underset{s \in G}{\forall} \rho_s(U) \subseteq U$.

Przykłady

- Podprzestrzeń zerowa oraz cała przestrzeń są podprzestrzeniami G-niezmienniczymi.

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G. Podprzestrzeń U przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią G-**niezmienniczą**, jeśli $\underset{s\in G}{\forall} \rho_s(U) \subseteq U$.

Przykłady

- Podprzestrzeń zerowa oraz cała przestrzeń są podprzestrzeniami G-niezmienniczymi.
- W reprezentacji regularnej podprzestrzeń $W = \mathrm{lin}\left(\sum_{g\in G} e_g\right)$ jest G-niezmiennicza.

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G. Podprzestrzeń U przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią G-**niezmienniczą**, jeśli $\underset{s \in G}{\forall} \; \rho_s(U) \subseteq U$.

Przykłady

- Podprzestrzeń zerowa oraz cała przestrzeń są podprzestrzeniami G-niezmienniczymi.
- W reprezentacji regularnej podprzestrzeń $W = \mathrm{lin}\left(\sum_{g \in G} e_g\right)$ jest G-niezmiennicza.
- W przykładzie reprezentacji
  $G = \mathrm{GL}(n, K)$, $V = \mathrm{M}(n, K)$, $\rho_A(X) = AX$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K)$, $X \in \mathrm{M}(n, K)$, zbiór macierzy z zerową ustaloną kolumną jest podprzestrzenią G-niezmienniczą.

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G. Podprzestrzeń U przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią G-**niezmienniczą**, jeśli $\underset{s\in G}{\forall} \rho_s(U) \subseteq U$.

Przykłady

- Podprzestrzeń zerowa oraz cała przestrzeń są podprzestrzeniami G-niezmienniczymi.
- W reprezentacji regularnej podprzestrzeń $W = \mathrm{lin}\left(\sum_{g\in G} e_g\right)$ jest G-niezmiennicza.
- W przykładzie reprezentacji $G = \mathrm{GL}(n, K)$, $V = \mathrm{M}(n, K)$, $\rho_A(X) = AX$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K)$, $X \in \mathrm{M}(n, K)$, zbiór macierzy z zerową ustaloną kolumną jest podprzestrzenią G-niezmienniczą.
- W przykładzie reprezentacji $G = \mathrm{GL}(n, K)$, $V = \mathrm{M}(n, K)$, $\rho_A(X) = AXA^{-1}$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K)$, $X \in \mathrm{M}(n, K)$, zbiór macierzy skalarnych (jak i zbiór macierzy z zerowym śladem) jest podprzestrzenią G-niezmienniczą.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G-niezmienniczymi przestrzeni V.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G-niezmienniczymi przestrzeni V.

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G-niezmienniczymi przestrzeni V.

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G-niezmienniczymi przestrzeni V.

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G-niezmienniczą przestrzeni V.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G-niezmienniczymi przestrzeni V.

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G-niezmienniczą przestrzeni V. Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|U$ jest automorfizmem przestrzeni U

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G-niezmienniczymi przestrzeni V.

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G-niezmienniczą przestrzeni V. Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|U$ jest automorfizmem przestrzeni U i $\rho^U : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U)$ jest również reprezentacją grupy G.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G-niezmienniczymi przestrzeni V.

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G-niezmienniczą przestrzeni V. Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|U$ jest automorfizmem przestrzeni U i $\rho^U : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U)$ jest również reprezentacją grupy G. Nazywamy ją **podreprezentacją** reprezentacji ρ.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G-niezmienniczymi przestrzeni V.

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G-niezmienniczą przestrzeni V. Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|U$ jest automorfizmem przestrzeni U i $\rho^U : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U)$ jest również reprezentacją grupy G. Nazywamy ją **podreprezentacją** reprezentacji ρ.

Niech $V = U_1 \oplus ... \oplus U_k$ oraz niech $\rho^{U_i} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U_i)$, $i = 1, ..., k$, będą reprezentacjami grupy G.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G-niezmienniczymi przestrzeni V.

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G-niezmienniczą przestrzeni V. Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|U$ jest automorfizmem przestrzeni U i $\rho^U : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U)$ jest również reprezentacją grupy G. Nazywamy ją **podreprezentacją** reprezentacji ρ.

Niech $V = U_1 \oplus ... \oplus U_k$ oraz niech $\rho^{U_i} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U_i)$, $i = 1, ..., k$, będą reprezentacjami grupy G. Wtedy $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$

$$\rho_s(\alpha_1 + ... + \alpha_k) = \rho_s^{U_1}(\alpha_1) + ... + \rho_s^{U_k}(\alpha_k);\ s \in G,\ \alpha_i \in U_i,\ i = 1, ..., k,$$

jest reprezentacją grupy G w przestrzeni liniowej V,

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G-niezmienniczymi przestrzeni V.

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G-niezmienniczą przestrzeni V. Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|U$ jest automorfizmem przestrzeni U i $\rho^U : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U)$ jest również reprezentacją grupy G. Nazywamy ją **podreprezentacją** reprezentacji ρ.

Niech $V = U_1 \oplus ... \oplus U_k$ oraz niech $\rho^{U_i} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U_i)$, $i = 1, ..., k$, będą reprezentacjami grupy G. Wtedy $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$

$$\rho_s(\alpha_1 + ... + \alpha_k) = \rho_s^{U_1}(\alpha_1) + ... + \rho_s^{U_k}(\alpha_k); \; s \in G, \alpha_i \in U_i, i = 1, ..., k,$$

jest reprezentacją grupy G w przestrzeni liniowej V, a ρ^{U_i} są jej podreprezentacjami.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G-niezmienniczymi przestrzeni V.

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G-niezmienniczą przestrzeni V. Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|U$ jest automorfizmem przestrzeni U i $\rho^U : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U)$ jest również reprezentacją grupy G. Nazywamy ją **podreprezentacją** reprezentacji ρ.

Niech $V = U_1 \oplus ... \oplus U_k$ oraz niech $\rho^{U_i} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U_i)$, $i = 1, ..., k$, będą reprezentacjami grupy G. Wtedy $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$

$$\rho_s(\alpha_1 + ... + \alpha_k) = \rho_s^{U_1}(\alpha_1) + ... + \rho_s^{U_k}(\alpha_k); \; s \in G, \, \alpha_i \in U_i, \, i = 1, ..., k,$$

jest reprezentacją grupy G w przestrzeni liniowej V, a ρ^{U_i} są jej podreprezentacjami. Reprezentację ρ nazywamy **sumą prostą podreprezentacji** ρ^{U_i} i oznaczamy

$$\rho = \rho^{U_1} \oplus ... \oplus \rho^{U_k}.$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to dla każdej podprzestrzeni G-niezmieniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G-niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to dla każdej podprzestrzeni G-niezmieniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G-niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W'.

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to dla każdej podprzestrzeni G-niezmieniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G-niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W'. Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to dla każdej podprzestrzeni G-niezmieniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G-niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W'. Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$,

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to dla każdej podprzestrzeni G-niezmieniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G-niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W'. Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to dla każdej podprzestrzeni G-niezmieniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G-niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W'. Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to dla każdej podprzestrzeni G-niezmieniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G-niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W'. Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.
Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to dla każdej podprzestrzeni G-niezmieniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G-niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W'. Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.
Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.
Ponieważ

$$\rho_s \circ \pi^0 \circ \rho_s^{-1} =$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to dla każdej podprzestrzeni G-niezmieniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G-niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W'. Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.
Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.
Ponieważ

$$\rho_s \circ \pi^0 \circ \rho_s^{-1} = \rho_s \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1} \right) \circ \rho_s^{-1}$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to dla każdej podprzestrzeni G-niezmieniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G-niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W'. Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.
Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.
Ponieważ

$$\rho_s \circ \pi^0 \circ \rho_s^{-1} = \rho_s \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1} \right) \circ \rho_s^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_{st} \circ \pi \circ \rho_{st}^{-1} =$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to dla każdej podprzestrzeni G-niezmieniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G-niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W'. Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.
Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.
Ponieważ

$$\rho_s \circ \pi^0 \circ \rho_s^{-1} = \rho_s \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1} \right) \circ \rho_s^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_{st} \circ \pi \circ \rho_{st}^{-1} = \pi^0,$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to dla każdej podprzestrzeni G-niezmieniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G-niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W'. Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.
Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.
Ponieważ

$$\rho_s \circ \pi^0 \circ \rho_s^{-1} = \rho_s \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1} \right) \circ \rho_s^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_{st} \circ \pi \circ \rho_{st}^{-1} = \pi^0,$$

więc $\rho_s \circ \pi^0 = \pi^0 \circ \rho_s$ dla $s \in G$.

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to dla każdej podprzestrzeni G-niezmieniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G-niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W'. Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.
Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.
Ponieważ

$$\rho_s \circ \pi^0 \circ \rho_s^{-1} = \rho_s \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1} \right) \circ \rho_s^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_{st} \circ \pi \circ \rho_{st}^{-1} = \pi^0,$$

więc $\rho_s \circ \pi^0 = \pi^0 \circ \rho_s$ dla $s \in G$.
Jeśli teraz $\alpha \in W^0$, to $\pi^0(\alpha) = \theta$ oraz $(\pi^0 \circ \rho_s)(\alpha) = (\rho_s \circ \pi^0)(\alpha) = \theta$, czyli $\rho_s(\alpha) \in W^0$.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **rozkładalną**, jeśli V jest sumą prostą dwóch niezerowych podprzestrzeni G-niezmienniczych.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **rozkładalną**, jeśli V jest sumą prostą dwóch niezerowych podprzestrzeni G-niezmienniczych.
Reprezentację nazywamy **całkowicie przywiedlną**, jeśli jest sumą prostą swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **rozkładalną**, jeśli V jest sumą prostą dwóch niezerowych podprzestrzeni G-niezmienniczych.
Reprezentację nazywamy **całkowicie przywiedlną**, jeśli jest sumą prostą swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji.

Wniosek

Każda reprezentacja liniowa skończonej grupy nad ciałem, którego charakterystyka nie dzieli rzędu grupy, jest całkowicie przywiedlna tzn. jest sumą prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **rozkładalną**, jeśli V jest sumą prostą dwóch niezerowych podprzestrzeni G-niezmienniczych.
Reprezentację nazywamy **całkowicie przywiedlną**, jeśli jest sumą prostą swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji.

Wniosek

Każda reprezentacja liniowa skończonej grupy nad ciałem, którego charakterystyka nie dzieli rzędu grupy, jest całkowicie przywiedlna tzn. jest sumą prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych.

Uwagi

- Jeżeli reprezentacja jest sumą prostą nieprzywiedlnych podreprezentacji, to odpowiadające im podprzestrzenie G-niezmiennicze nie są wyznaczone jednoznacznie (ale podreprezentacje są wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do równoważności).

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **rozkładalną**, jeśli V jest sumą prostą dwóch niezerowych podprzestrzeni G-niezmienniczych.
Reprezentację nazywamy **całkowicie przywiedlną**, jeśli jest sumą prostą swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji.

Wniosek

Każda reprezentacja liniowa skończonej grupy nad ciałem, którego charakterystyka nie dzieli rzędu grupy, jest całkowicie przywiedlna tzn. jest sumą prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych.

Uwagi

- Jeżeli reprezentacja jest sumą prostą nieprzywiedlnych podreprezentacji, to odpowiadające im podprzestrzenie G-niezmiennicze nie są wyznaczone jednoznacznie (ale podreprezentacje są wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do równoważności).
- Założenia w twierdzeniu Maschkego są istotne. Odpowiednie przykłady zobaczyny w zestawach zadań.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **rozkładalną**, jeśli V jest sumą prostą dwóch niezerowych podprzestrzeni G-niezmienniczych.
Reprezentację nazywamy **całkowicie przywiedlną**, jeśli jest sumą prostą swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji.

Wniosek

Każda reprezentacja liniowa skończonej grupy nad ciałem, którego charakterystyka nie dzieli rzędu grupy, jest całkowicie przywiedlna tzn. jest sumą prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych.

Uwagi

- Jeżeli reprezentacja jest sumą prostą nieprzywiedlnych podreprezentacji, to odpowiadające im podprzestrzenie G-niezmiennicze nie są wyznaczone jednoznacznie (ale podreprezentacje są wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do równoważności).
- Założenia w twierdzeniu Maschkego są istotne. Odpowiednie przykłady zobaczyny w zestawach zadań.
- Jeżeli reprezentacja jest sumą prostą nieprzywiedlnych podreprezentacji, to w przypadku interpretacji macierzowej tej reprezentacji, macierze będące wartościami tej reprezentacji są klatkowe, a klatki odpowiadają odpowiednim podreprezentacjom.

Przykłady

- Reprezentacja grupy $\mathrm{GL}(n, K)$ w $M_n(K)$, $\rho_A(X) = AX$, jest sumą prostą n swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji $\rho^i : \mathrm{GL}(n, K) \longrightarrow \mathrm{Aut}(U_i)$, gdzie U_i jest podprzestrzenią przestrzeni $M_n(K)$ złożoną z macierzy, których wszystkie kolumny prócz i-tej są zerowe.

Przykłady

- Reprezentacja grupy $\mathrm{GL}(n, K)$ w $M_n(K)$, $\rho_A(X) = AX$, jest sumą prostą n swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji $\rho^i : \mathrm{GL}(n, K) \longrightarrow \mathrm{Aut}(U_i)$, gdzie U_i jest podprzestrzenią przestrzeni $M_n(K)$ złożoną z macierzy, których wszystkie kolumny prócz i-tej są zerowe.
- Reprezentacja grupy $\mathrm{GL}(n, K)$ w $M_n(K)$, $\rho_A(X) = AXA^{-1}$, jest sumą prostą podreprezentacji stopnia 1 oraz podreprezentacji stopnia $n^2 - 1$, gdy $\mathrm{char}(K) \nmid n$.

Przykłady

- Reprezentacja grupy $\mathrm{GL}(n,K)$ w $M_n(K)$, $\rho_A(X)=AX$, jest sumą prostą n swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji $\rho^i : \mathrm{GL}(n,K) \longrightarrow \mathrm{Aut}(U_i)$, gdzie U_i jest podprzestrzenią przestrzeni $M_n(K)$ złożoną z macierzy, których wszystkie kolumny prócz i-tej są zerowe.
- Reprezentacja grupy $\mathrm{GL}(n,K)$ w $M_n(K)$, $\rho_A(X)=AXA^{-1}$, jest sumą prostą podreprezentacji stopnia 1 oraz podreprezentacji stopnia n^2-1, gdy $\mathrm{char}(K)\not| n$.
- Reprezentacja regularna skończonej grupy G jest sumą prostą reprezenracji stopnia 1 oraz reprezentacji stopnia $|G|-1$, gdy $\mathrm{char}(K)\not| n$.

Ogólne założenie: $|G| < \infty, \; K = \mathbb{C}$.

Ogólne założenie: $|G| < \infty, \ K = \mathbb{C}$.

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie zespoloną reprezentacją skończonej grupy G.
Charakterem reprezentacji ρ nazywamy funkcję $\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}, \ \chi_\rho(s) := \mathrm{tr}(\rho_s)$.

Ogólne założenie: $|G| < \infty, \ K = \mathbb{C}$.

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie zespoloną reprezentacją skończonej grupy G. **Charakterem** reprezentacji ρ nazywamy funkcję $\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}, \ \chi_\rho(s) := \mathrm{tr}(\rho_s)$.

Uwaga

Jeśli $r(s) = k$, to $\chi_\rho(s)$ jest sumą k-tego stopnia pierwiastków z 1 w ilości $\dim V$.

Ogólne założenie: $|G| < \infty, \ K = \mathbb{C}$.

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie zespoloną reprezentacją skończonej grupy G. **Charakterem** reprezentacji ρ nazywamy funkcję $\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}, \ \chi_\rho(s) := \mathrm{tr}(\rho_s)$.

Uwaga

Jeśli $r(s) = k$, to $\chi_\rho(s)$ jest sumą k-tego stopnia pierwiastków z 1 w ilości $\dim V$.

Twierdzenie

Jeśli χ jest charakterem reprezentacji stopnia n, to

1. $\chi(1) = n$,
2. $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$,
3. $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$

Ogólne założenie: $|G| < \infty, \ K = \mathbb{C}$.

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie zespoloną reprezentacją skończonej grupy G.
Charakterem reprezentacji ρ nazywamy funkcję $\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}, \ \chi_\rho(s) := \mathrm{tr}(\rho_s)$.

Uwaga
Jeśli $r(s) = k$, to $\chi_\rho(s)$ jest sumą k-tego stopnia pierwiastków z 1 w ilości $\dim V$.

Twierdzenie

Jeśli χ jest charakterem reprezentacji stopnia n, to

1. $\chi(1) = n$,
2. $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$,
3. $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$

Uwaga
Reprezentacje równoważne mają te same charaktery.

Ogólne założenie: $|G| < \infty$, $K = \mathbb{C}$.

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie zespoloną reprezentacją skończonej grupy G. **Charakterem** reprezentacji ρ nazywamy funkcję $\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $\chi_\rho(s) := \mathrm{tr}(\rho_s)$.

Uwaga

Jeśli $r(s) = k$, to $\chi_\rho(s)$ jest sumą k-tego stopnia pierwiastków z 1 w ilości $\dim V$.

Twierdzenie

Jeśli χ jest charakterem reprezentacji stopnia n, to

1. $\chi(1) = n$,
2. $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$,
3. $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$

Uwaga

Reprezentacje równoważne mają te same charaktery.

Twierdzenie

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest sumą reprezentacji $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U_i)$, $i = 1, 2$, to charakter reprezentacji ρ jest sumą charakterów reprezentacji ρ^1 oraz ρ^2.