Wybrane metody algebraiczne
Wykład 2 - działanie grupy na zbiorze

Andrzej Sładek
sladek@ux2.math.us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \overline{g}(x) = gx = x^g$.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \overline{g}(x) = gx = x^g$.
Odwzorowanie $\overline{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\overline{\phi} : g \longmapsto \overline{g}$ jest homomorfizmem grup.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \overline{g}(x) = gx = x^g$.
Odwzorowanie $\overline{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\overline{\phi} : g \longmapsto \overline{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \overline{g}(x) = gx = x^g$.
Odwzorowanie $\overline{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\overline{\phi} : g \longmapsto \overline{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \overline{g}(x) = gx = x^g$.
Odwzorowanie $\overline{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\overline{\phi} : g \longmapsto \overline{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \overline{g}(x) = gx = x^g$.
Odwzorowanie $\overline{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\overline{\phi} : g \longmapsto \overline{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \overline{g}(x) = gx = x^g$.
Odwzorowanie $\overline{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\overline{\phi} : g \longmapsto \overline{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gxg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \overline{g}(x) = gx = x^g$.
Odwzorowanie $\overline{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\overline{\phi} : g \longmapsto \overline{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gxg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gA$ - przesunięcie lewostronne zbioru A.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \overline{g}(x) = gx = x^g$.
Odwzorowanie $\overline{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\overline{\phi} : g \longmapsto \overline{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gxg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gA$ - przesunięcie lewostronne zbioru A.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := Ag^{-1}$ - przesunięcie prawostronne zbioru A.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \overline{g}(x) = gx = x^g$.
Odwzorowanie $\overline{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\overline{\phi} : g \longmapsto \overline{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gxg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gA$ - przesunięcie lewostronne zbioru A.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := Ag^{-1}$ - przesunięcie prawostronne zbioru A.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gAg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \overline{g}(x) = gx = x^g$.
Odwzorowanie $\overline{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\overline{\phi} : g \longmapsto \overline{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gxg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gA$ - przesunięcie lewostronne zbioru A.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := Ag^{-1}$ - przesunięcie prawostronne zbioru A.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gAg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = \mathcal{G}(G)$, $\phi(g, H) := gHg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \overline{g}(x) = gx = x^g$.
Odwzorowanie $\overline{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\overline{\phi} : g \longmapsto \overline{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gxg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gA$ - przesunięcie lewostronne zbioru A.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := Ag^{-1}$ - przesunięcie prawostronne zbioru A.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gAg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = \mathcal{G}(G)$, $\phi(g, H) := gHg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $G = GL(n, K)$, $X = K^n$, $\phi(A, v) := Av$ - działanie za pomocą przekształceń liniowych.

Definicja

Niech grupa G działa na zbiorze X.
Orbitą elementu $x \in X$ nazywamy

$$\mathrm{orb}(x) := \{y \in X : \underset{g \in G}{\exists}\, y = gx\} = \{gx \in X : g \in G\}.$$

Definicja

Niech grupa G działa na zbiorze X.
Orbitą elementu $x \in X$ nazywamy

$$\mathrm{orb}(x) := \{y \in X : \underset{g \in G}{\exists} \, y = gx\} = \{gx \in X : g \in G\}.$$

Stabilizatorem elementu $x \in X$ nazywamy

$$\mathrm{stab}(x) = \{g \in G : \ gx = x\}.$$

Definicja

Niech grupa G działa na zbiorze X.
Orbitą elementu $x \in X$ nazywamy

$$\operatorname{orb}(x) := \{y \in X : \underset{g \in G}{\exists} y = gx\} = \{gx \in X : g \in G\}.$$

Stabilizatorem elementu $x \in X$ nazywamy

$$\operatorname{stab}(x) = \{g \in G : \ gx = x\}.$$

Zbiór

$$\operatorname{fix}(g) = \{x \in X : \ gx = x\}$$

nazywamy **zbiorem elementów stałych** elementu $g \in G$.

Definicja

Niech grupa G działa na zbiorze X.
Orbitą elementu $x \in X$ nazywamy

$$\operatorname{orb}(x) := \{y \in X : \underset{g \in G}{\exists} y = gx\} = \{gx \in X : g \in G\}.$$

Stabilizatorem elementu $x \in X$ nazywamy

$$\operatorname{stab}(x) = \{g \in G : \; gx = x\}.$$

Zbiór

$$\operatorname{fix}(g) = \{x \in X : \; gx = x\}$$

nazywamy **zbiorem elementów stałych** elementu $g \in G$.

Spójrzmy na poprzednie przykłady i dla kilku z nich wyznaczmy powyższe zbiory.

Własności

- $x \in \mathrm{orb}(x)$;

Własności

- $x \in \mathrm{orb}(x)$;
- $y \in \mathrm{orb}(x) \iff \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$;

Własności

- $x \in \mathrm{orb}(x)$;
- $y \in \mathrm{orb}(x) \iff \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$;
- $\mathrm{orb}(x) \cap \mathrm{orb}(y) \neq \emptyset \implies \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$.

Własności

- $x \in \mathrm{orb}(x)$;
- $y \in \mathrm{orb}(x) \iff \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$;
- $\mathrm{orb}(x) \cap \mathrm{orb}(y) \neq \emptyset \implies \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$.

Własności

- $x \in \mathrm{orb}(x)$;
- $y \in \mathrm{orb}(x) \iff \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$;
- $\mathrm{orb}(x) \cap \mathrm{orb}(y) \neq \emptyset \implies \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$.

Twierdzenie

1. $\mathrm{stab}(x) < G$,

Własności

- $x \in \mathrm{orb}(x)$;
- $y \in \mathrm{orb}(x) \iff \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$;
- $\mathrm{orb}(x) \cap \mathrm{orb}(y) \neq \emptyset \implies \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$.

Twierdzenie

1. $\mathrm{stab}(x) < G$,
2. $|\mathrm{orb}(x)| = |G : \mathrm{stab}(x)|$,

Własności

- $x \in \mathrm{orb}(x)$;
- $y \in \mathrm{orb}(x) \iff \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$;
- $\mathrm{orb}(x) \cap \mathrm{orb}(y) \neq \emptyset \Longrightarrow \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$.

Twierdzenie

1. $\mathrm{stab}(x) < G$,
2. $|\mathrm{orb}(x)| = |G : \mathrm{stab}(x)|$,
3. $|G| = |\mathrm{orb}(x)||\mathrm{stab}(x)|$,

Własności

- $x \in \mathrm{orb}(x)$;
- $y \in \mathrm{orb}(x) \iff \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$;
- $\mathrm{orb}(x) \cap \mathrm{orb}(y) \neq \emptyset \implies \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$.

Twierdzenie

1. $\mathrm{stab}(x) < G$,
2. $|\mathrm{orb}(x)| = |G : \mathrm{stab}(x)|$,
3. $|G| = |\mathrm{orb}(x)||\mathrm{stab}(x)|$,
4. $y = gx \implies \mathrm{stab}(y) = g\mathrm{stab}(x)g^{-1}$,

Własności

- $x \in \text{orb}(x)$;
- $y \in \text{orb}(x) \iff \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$;
- $\text{orb}(x) \cap \text{orb}(y) \neq \emptyset \implies \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$.

Twierdzenie

1. $\text{stab}(x) < G$,
2. $|\text{orb}(x)| = |G : \text{stab}(x)|$,
3. $|G| = |\text{orb}(x)||\text{stab}(x)|$,
4. $y = gx \implies \text{stab}(y) = g\,\text{stab}(x)g^{-1}$,
5. $y \in \text{orb}(x) \implies |\text{stab}(y)| = |\text{stab}(x)|$.

Stwierdzenie

Niech $\mathcal{R} = \{x_i : i \in I\}$ będzie zbiorem reprezentantów orbit. Wtedy

$$| X |= \sum_{i \in I} | \operatorname{orb}(x_i) |= \sum_{i \in I} |G : \operatorname{stab}(x_i)|.$$

Stwierdzenie

Niech $\mathcal{R} = \{x_i : i \in I\}$ będzie zbiorem reprezentantów orbit. Wtedy

$$| X | = \sum_{i \in I} | \operatorname{orb}(x_i) | = \sum_{i \in I} |G : \operatorname{stab}(x_i)|.$$

Dowód na tablicy.

Stwierdzenie

Niech $\mathcal{R} = \{x_i : i \in I\}$ będzie zbiorem reprezentantów orbit. Wtedy

$$| X |= \sum_{i \in I} | \operatorname{orb}(x_i) |= \sum_{i \in I} |G : \operatorname{stab}(x_i)|.$$

Dowód na tablicy.

Wniosek

- Jeśli $|G| = p^n$, $|X| = p^m$, $m, n \geqslant 1$ p- liczba pierwsza, to liczba orbit jednoelementowych jest podzielna przez p.

Stwierdzenie

Niech $\mathcal{R} = \{x_i : i \in I\}$ będzie zbiorem reprezentantów orbit. Wtedy

$$| X | = \sum_{i \in I} | \operatorname{orb}(x_i) | = \sum_{i \in I} |G : \operatorname{stab}(x_i)|.$$

Dowód na tablicy.

Wniosek

- Jeśli $|G| = p^n$, $|X| = p^m$, $m, n \geqslant 1$ p- liczba pierwsza, to liczba orbit jednoelementowych jest podzielna przez p.
- Jeśli $|G| = p^n, n \geqslant 1$, to centrum

$$Z(G) = \{g \in G : \underset{h \in G}{\forall} gh = hg\}$$

grupy G jest nietrywialne.

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X, to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G,X) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathrm{fix}(g)|.$$

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X, to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G,X) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathrm{fix}(g)|.$$

Dowód.
Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X, to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G,X) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathrm{fix}(g)|.$$

Dowód.

Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.
Liczba jedynek w g-tym wierszu $= |\{x \in X : gx = x\}| = |\mathrm{fix}(g)|$

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X, to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G,X) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathrm{fix}(g)|.$$

Dowód.

Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.
Liczba jedynek w g-tym wierszu $= |\{x \in X : gx = x\}| = |\mathrm{fix}(g)|$
Liczba jedynek w x-tej kolumnie $= |\{g \in G : gx = x\}| = |\mathrm{stab}(x)|$

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X, to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G, X) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |\mathrm{fix}(g)|.$$

Dowód.

Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.
Liczba jedynek w g-tym wierszu $= |\{x \in X : gx = x\}| = |\mathrm{fix}(g)|$
Liczba jedynek w x-tej kolumnie $= |\{g \in G : gx = x\}| = |\mathrm{stab}(x)|$
Jeśli N - liczba jedynek w całej macierzy, a $\mathcal{R}$ - zbiór reprezentantów orbit, to $|\mathcal{R}| = n(G, X)$.

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X, to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G,X) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathrm{fix}(g)|.$$

Dowód.

Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.
Liczba jedynek w g-tym wierszu $= |\{x \in X : gx = x\}| = |\mathrm{fix}(g)|$
Liczba jedynek w x-tej kolumnie $= |\{g \in G : gx = x\}| = |\mathrm{stab}(x)|$
Jeśli N - liczba jedynek w całej macierzy, a $\mathcal{R}$ - zbiór reprezentantów orbit, to $|\mathcal{R}| = n(G,X)$.
Wtedy z jednej strony

$$N = \sum_{g\in G} |\mathrm{fix}(g)|,$$

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X, to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G, X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{fix}(g)|.$$

Dowód.

Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.
Liczba jedynek w g-tym wierszu $= |\{x \in X : gx = x\}| = |\mathrm{fix}(g)|$
Liczba jedynek w x-tej kolumnie $= |\{g \in G : gx = x\}| = |\mathrm{stab}(x)|$
Jeśli N - liczba jedynek w całej macierzy, a $\mathcal{R}$ - zbiór reprezentantów orbit, to $|\mathcal{R}| = n(G, X)$.
Wtedy z jednej strony

$$N = \sum_{g \in G} |\mathrm{fix}(g)|,$$

a z drugiej

$$N = \sum_{x \in X} |\mathrm{stab}(x)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} \sum_{y \in \mathrm{orb}(x)} |\mathrm{stab}(y)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} |\mathrm{orb}(x)||\mathrm{stab}(x)| = |\mathcal{R}||G| = n(G, X)|G|.$$

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X, to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G,X) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathrm{fix}(g)|.$$

Dowód.
Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.
Liczba jedynek w g-tym wierszu $= |\{x \in X : gx = x\}| = |\mathrm{fix}(g)|$
Liczba jedynek w x-tej kolumnie $= |\{g \in G : gx = x\}| = |\mathrm{stab}(x)|$
Jeśli N - liczba jedynek w całej macierzy, a $\mathcal{R}$ - zbiór reprezentantów orbit, to $|\mathcal{R}| = n(G,X)$.
Wtedy z jednej strony

$$N = \sum_{g\in G} |\mathrm{fix}(g)|,$$

a z drugiej

$$N = \sum_{x\in X} |\mathrm{stab}(x)| = \sum_{x\in\mathcal{R}} \sum_{y\in \mathrm{orb}(x)} |\mathrm{stab}(y)| = \sum_{x\in\mathcal{R}} |\mathrm{orb}(x)||\mathrm{stab}(x)| = |\mathcal{R}||G| = n(G,X)|G|.$$

Stąd teza. ¶