nazwisko i imię .... *nr* ......

1. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3_3$. Wiadomo (i tego nie trzeba sprawdzać), że $A^4 = I_3$. Rozłożyć reprezentację $\rho^A : C_4 = (a) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^3)$, $\rho^A_{a^k}([x,y,z]^T) = A^k[x,y,z]^T$, na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych wskazując rozkład przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ na sumę prostą podprzestrzeni odpowiadających reprezentacjom nieprzywiedlnym występujących w rozkładzie reprezentacji ρ^A.

2. Zapisz tabelę charakterów grupy Quat i przedstaw funkcję centralną określoną na grupie Quat w następujący sposób:

x	I	$-I$	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
$f(x)$	6	2	a	a	-4	-4	2	2

jako kombinację liniową charakterów reprezentacji nieprzywiedlnych tej grupy. Wyznacz wszystkie liczby całkowite a, dla których ta funkcja centralna jest charakterem reprezentacji grupy Quat.

3. Niech (e_1, e_2, e_3) będzie bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{C}$. Dla $\sigma \in S(3)$ przekształcenie liniowe ρ_σ na przestrzeni V na bazie określone jest następująco: $\rho_\sigma(e_i) = \mathrm{sgn}(\sigma)e_{\sigma(i)}$. Rozłóż V na składowe jednorodne tej reprezentacji ρ (nie musisz pokazywać, że ρ jest reprezentacją).

4. Zbiór $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \right\}$ z działaniem mnożenia jest grupą (tego nie trzeba pokazywać!). Grupa G działa na zbiorze $\mathbb{R}^2$ w następujący sposób: $(A, \bar{x}) \longmapsto A\bar{x}$ dla $A \in G$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ (tego też nie musisz pokazywać!). Wyznacz wszystkie orbity, stabilizatory oraz zbiory elementów stałych dla tego działania.

5. Pokazać, że odwzorowanie $\rho : \mathrm{GL}(n,K) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{M}(n,K))$, $\rho_A(X) = AXA^T$ dla $A \in \mathrm{GL}(n,K)$, $X \in \mathrm{M}(n,K)$, jest poprawnie określoną reprezentacją grupy $\mathrm{GL}(n,K)$.

Rozwiązania.