Wybrane metody algebraiczne

Zadania - zestaw 5

1. Czy charakter grupy rzędu 8 może przyjmować wartości $(1, -1, 2, 0, 0, -2, 0, 0)$?

2. Rozłożyć funkcję centralną grupy Quat zdefiniowaną nastepująco: $(I, -I, i, -i, j, -j, k, -k) \longmapsto (5, -3, 0, 0, -1, -1, 0, 0)$ względem bazy charakterów nieprzywiedlnych. Czy jest ona charakterem jakiejś reprezentacji tej grupy?

3. Określić, która z podanych funkcji centralnych na $S(3)$:
$$f_1 : (e, (1, 2), (1, 3), (2, 3)(1, 2, 3), (1, 3, 2) \longmapsto (6, -4, -4, -4, 0, 0)$$
$$f_2 : (e, (1, 2), (1, 3), (2, 3)(1, 2, 3), (1, 3, 2) \longmapsto (6, -4, -4, -4, 3, 3)$$
jest charakterem i wskazać odpowiadającą jej reprezentację.

4. Wykazać, że jeżeli χ jest charakterem reprezentacji zespolonej stopnia 2 grupy G nieparzystego rzędu, to $\chi(g) \neq 0$ dla każdego $g \in G$.

5. Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją zespoloną stopnia 2 skończonej grupy G oraz niech χ będzie jej charakterem. Pokazać, że $\chi(g) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g \in \ker \rho$.
Wsk. Suma n pierwiastków zespolonych z 1 jest równa n wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki są równe 1.

6. Niech χ będzie charakterem reprezentacji zespolonej ρ skończonej grupy G, a $m = \max\{|\chi(g)|; g \in G\}$. Pokazać, że
$$H = \{g \in G; \chi(g) = m\} \quad \text{oraz} \quad K = \{g \in G; |\chi(g)| = m\}$$
są podgrupami normalnymi grupy G.
Wsk. W pierwszym przypadku wykorzystać poprzednie zadanie, a w drugim pokazć, że $g \in K$ wtedy i tylko wtedy, gdy ρ_g jest homotetią.

7. Udowodnić, że charakter χ reprezentacji zespolonej stopnia 2 grupy $S(3)$ jest charakterem nieprzywiedlnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi((1\ 2\ 3)) = -1$.
Wsk. Wykorzystać twierdzenie Maschkego i własności komutanta.

8. Niech χ będzie charakterem reprezentacji zespolonej stopnia 2 skończonej grupy G oraz niech $g \in [G, G]$. Pokazać, że jeśli $\chi(g) \neq 2$, to χ jest charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej.
Wsk. Wykorzystać twierdzenie Maschkego i własności komutanta.

9. Niech χ będzie charakterem nietrywialnej reprezentacji skończonej grupy G. Oblicz $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)$.
Wsk. Szukane wyrażenie jest równe $(\, \chi \,|\, 1 \,)$.

10. Wykazać, że dla dowolnego elementu g skończonej grupy G takiej, że $|G| > 1$ istnieje nietrywialna nieprzywiedlna reprezentacja zespolona χ tej grupy, dla której $\chi(g) \neq 0$.