

Wybrane metody algebraiczne

Zadania - zestaw 4

- Wykazać, że liczba reprezentacji stopnia 1 grupy G jest równa indeksowi $[G : [G, G]]$ komutanta $[G, G]$ grupy G w grupie G i dzieli $|G|$.
- Niech $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$ będzie epimorfizmem grup oraz niech $\tilde{\rho} : \tilde{G} \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy \tilde{G} . Uzasadnić, że
 - $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$, $\rho_g = \tilde{\rho}_{\varphi(g)}$, $g \in G$, jest reprezentacją grupy G ,
 - ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{\rho}$ jest reprezentacją nieprzywiedlną.
- Wykorzystując epimorfizm grupy $S(4)$ na grupę $S(3)$ (zestaw 1, zad. 7) oraz poprzednie zadanie skonstruuj nieprzywiedlną zespoloną reprezentację stopnia 2 grupy $S(4)$.
- Wcześniej dowiedzieliśmy się (zestaw 1, zad. 8), że
 - grupa obrotów sześciangu jest izomorficzna z grupą $S(4)$,
 - grupa obrotów czworościanu foremego jest izomorficzna z grupą $A(4)$,
 - grupa izometrii czworościanu foremego jest izomorficzna z grupą $S(4)$.Wykorzystując te fakty skonstruować:
 - dwie nieprzywiedlne, zespolone reprezentacje stopnia 3 grupy $S(4)$,
 - nieprzywiedlną zespoloną reprezentację stopnia 3 grupy $A(4)$.
- Wyznacz wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje oraz ich charaktery grupy $S(4)$.
- Wyznacz wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje oraz ich charaktery grupy $A(4)$.
- Wyznacz wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje oraz ich charaktery grupy kwaternionów Quat.
- Wyznacz wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje oraz ich charaktery grupy $D(4)$ izometrii kwadratu.
- Wyznacz charakter reprezentacji ρ grupy $S(n)$ w przestrzeni z bazą $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ zdefiniowaną wzorem $\rho_\sigma(\varepsilon_i) = \varepsilon_{\sigma(i)}$ dla $\sigma \in S(n)$. Dla $n = 4$ dokonaj rozkładu tej reprezentacji na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych.
- Rozłożyć reprezentacje regularne grup $C_2 \times C_2$, $C_2 \times C_3$, $C_2 \times C_4$ na sumy proste podreprezentacji nieprzywiedlnych.
- Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $K = \mathbb{R}$, $m = 4$. Rozłożyć reprezentację ρ^A (patrz zestaw 3, zad. 6) na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych.
- Niech G będzie grupą rzędu p^k , p - liczba pierwsza. Pokazać, że kwadrat stopnia dowolnej reprezentacji nieprzywiedlnej grupy G jest mniejszy lub równy p^{k-1} .
- Wyznaczyć liczbę nieprzywiedlnych reprezentacji zespolonych nieabelowej grupy rzędu p^3 , gdzie p jest liczbą pierwszą.
- Niech G będzie grupą nieabelową rzędu pq , gdzie $p > q$ są liczbami pierwszymi.
 - Pokazać, że $|[G, G]| = p$.
 - Pokazać, że $q|p-1$ oraz G ma $q + \frac{p-1}{q}$ reprezentacji nieprzywiedlnych.