Wybrane metody algebraiczne

Zadania - zestaw 3

1. Wyznacz wszystkie reprezentacje zespolone stopnia jeden następujących grup: C_4, C_6, $C_2 \times C_2$, $C_4 \times C_2$, gdzie C_n oznacza grupę cykliczną rzędu n.

2. Rozważmy reprezentację ρ grupy $G = \mathrm{GL}(n, K)$ w przestrzeni $M_n(K)$ określoną następująco: $\rho_A(X) = AX$. Niech $M_n^{(i)}(K)$ oznacza podprzestrzeń przestrzeni $M_n(K)$, której elementami są macierze z wszystkimi, prócz $i-$tej, zerowymi kolumnami. Na wykładzie zauważylismy, że $M_n^{(i)}(K)$ jest $G-$ niezmiennicza dla każdego $i = 1, ..., n$. Pokaż, że otrzymana w ten sposób podreprezentacja $\rho^{(i)}$ grupy G w przestrzeni $M_n^{(i)}(K)$ jest nieprzywiedlna oraz reprezentacje $\rho^{(i)}$ oraz $\rho^{(j)}$ są równoważne dla każdych $i, j = 1, ..., n$.

3. Rozważmy reprezentację ρ grupy $G = \mathrm{GL}(n, K)$ w przestrzeni $M_n(K)$ określoną następująco: $\rho_A(X) = AXA^{-1}$. Niech $M_n^0(K) = \{X \in M_n(K); \mathrm{tr}(X) = 0\}$. Na wykładzie zauważyliśmy, że $M_n^0(K)$ jest podprzestrzenią niezmienniczą. Jaki jest wymiar podprzestrzeni $M_n^0(K)$? Podprzestrzenią niezmienniczą jest również $W = \{aI_n; a \in K\}$. Co trzeba założyć o ciele K, aby $M_n(K) = W \oplus M_n^0(K)$? Czy dla $n = 2, 3$ oraz $K = \mathbb{C}$ otrzymana powyżej reprezentacja grupy G w przestrzeni $M_n^0(K)$ jest nieprzywiedlna?

4. Rozważmy reprezentację ρ grupy $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ w przestrzeni $M_n(\mathbb{R})$ określoną następująco: $\rho_A(X) = AXA^T$. Niech
$$M_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = A^T\}, \quad M_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = -A^T\}.$$
Pokaż, że $M_n^+(\mathbb{R})$ oraz $M_n^-(\mathbb{R})$ są podprzestrzeniami $G-$niezmienniczymi oraz $M_n(\mathbb{R}) = M_n^+(\mathbb{R}) \oplus M_n^-(\mathbb{R})$.

5. Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G (nad ciałem K). Znajdź warunek równoważny na to, aby przestrzeń V zawierała 1-wymiarową podprzestrzeń niezmienniczą.

6. Niech $A \in \mathrm{GL}(n, K)$, $A^m = I_n$. Pokaż, że odwzorowanie
$$\rho^A : C_m = (a) \longrightarrow \mathrm{Aut}(K^n), \ \ \rho^A_{a^k}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = A^k \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$
jest reprezentacją grupy cyklicznej C_m. Kiedy reprezentacje ρ^A oraz ρ^B są równoważne?

7. (a) W poprzednim zadaniu weź $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, $m = 3$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Pokaż, że reprezentacja ρ^A jest nieprzywiedlna. A co będzie, gdy zamiast ciała $\mathbb{R}$ weźmiemy ciało $\mathbb{C}$? W tym przypadku znajdź wszystkie podreprezentacje tej reprezentacji.
   (b) Teraz weź $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, $A_k = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2k\pi}{m}) & -\sin(\frac{2k\pi}{m}) \\ \sin(\frac{2k\pi}{m}) & \cos(\frac{2k\pi}{m}) \end{bmatrix}$, gdzie $0 < k < m$. Pokaż, że reprezentacja ρ^{A_k} jest nieprzywiedlna, jeśli $k \neq \frac{m}{2}$. Sprawdź, że reprezentacje ρ^{A_k} oraz ρ^{A_l} są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $k = l$ lub $k + l = m$.

8. Pokazać, że dowolna rzeczywista nieprzywiedlna reprezentacja stopnia 2 grupy cyklicznej C_m jest równoważna reprezentacji ρ^{A_k} (z punktu (b) poprzedniego zadania) dla pewnego k.

9. Pokaż, że rzeczywista nieprzywiedlna reprezentacja grupy cyklicznej C_m ma stopień $\leqslant 2$.

10. Wyznacz liczbę rzeczywistych nieprzywiedlnych reprezentacji grupy cyklicznej C_m.

11. Niech
$$\rho : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2), \ \ \rho_k\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$
Pokaż, że ρ jest przywiedlną reprezentacją grupy $\mathbb{Z}$. Czy istnieje rozkład przestrzeni $\mathbb{C}^2$ na sumę prostą dwóch właściwych podprzestrzeni $\mathbb{Z}-$ niezmienniczych?

12. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech
$$\rho : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p^2), \ \ \rho_k\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$
Pokaż, że ρ jest przywiedlną reprezentacją grupy $\mathbb{Z}_p$. Czy istnieje rozkład przestrzeni $\mathbb{Z}_p^2$ na sumę prostą dwóch właściwych podprzestrzeni $\mathbb{Z}_p-$ niezmienniczych?

13. Wyznaczyć wszystkie nierównoważne zespolone reprezentacje stopnia 1 grup $S(3)$ oraz $A(4)$.

14. Skonstruuj zespoloną nieprzywiedlną reprezentację stopnia 2 grupy $S(3)$ i znajdź charakter tej reprezentacji. *Wsk.* grupa $S(3)$ jest izomorficzna z grupą $D(3)$.