Wybrane metody algebraiczne

Zadania - zestaw 2

1. Udowodnić, że funkcja $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ określa działanie grupy G na zbiorze X:

   (a) X - dowolny zbior niepusty , $G = S(X)$, $\varphi(\sigma, x) = \sigma(x)$.

   (b) G - dowolna grupa, $X = G$, $\varphi(g, x) = gx$.

   (c) G - dowolna grupa, $X = G$, $\varphi(g, x) = xg^{-1}$.

   (d) G - dowolna grupa, $X = 2^G$, $\varphi(g, A) = gA = \{gx \in G : x \in A\}$.

   (e) G - dowolna grupa, $X = G$, $\varphi(g, x) = gxg^{-1}$.

   (f) G - dowolna grupa, $X = 2^G$, $\varphi(g, A) = gAg^{-1} = \{gxg^{-1} \in G : x \in A\}$.

   (g) G - dowolna grupa, $X = G$ - zbiór wszystkich podgrup grupy G , $\varphi(g, H) = gHg^{-1}$.

   (h) K - dowolne ciało, $G = GL(n, K)$, $X = K^n$, $\varphi(A, \overline{x}) = A\overline{x}$.

   (i) $G = \{f \in S(\mathbb{R}) \ : \ \exists_{a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0} \forall_{x \in \mathbb{R}} \ f(x) := ax + b\}$, $X = \mathbb{R}$, $\varphi(f, x) = f(x)$.

   W każdym przykładzie opisać orbity, stabilizatory i zbiory elementów stałych.

2. Grupa
$$T(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} \in GL(n, \mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R} \right\}.$$
   działa na zbiorze $\mathbb{R}^2$ następująco: $(A, \overline{x}) \longrightarrow A\overline{x}$ dla każdego $A \in T(2, \mathbb{R})$ i $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$. Wyznaczyć $\mathrm{orb}(\overline{x})$ i $\mathrm{stab}(\overline{x})$ dla każdego elementu $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$. Dla każdej macierzy $A \in T(2, \mathbb{R})$ wyznaczyć zbiór elementów stałych $\mathrm{fix}(A)$. Podać interpretację geometryczną orbit i zbiorów elementów stałych.

3. Działanie grupy na zbiorze X nazywamy przechodnim, jeżeli cały zbiór X jest orbitą tego działania. Zbadać czy działania grupy na zbiorze określone w zadaniu 1 są przechodnie.

4. Obliczyć na ile sposobów można pomalować n kolorami kwadrat podzielony przekątnymi na 4 części, jeżeli dwa pomalowane kwadraty uważamy za jednakowe jeżeli jeden otrzymujemy z drugiego przez obrót.

5. Na szachownicy o 4×4 polach należy umieścić 4 wieże w taki sposób, by się wzajemnie nie szachowały. Na ile istotnie różnych sposobów jest to możliwe? Przy tym dwa rozmieszczenia uważamy za równe, jeżeli z jednego można otrzymać drugie za pomocą pewnego obrotu szachownicy.

6. Dla M będącego odpowiednio czworościanem, sześcianem, ośmiościanem oblicz na ile sposobów można pomalować ściany tego wielościanu n kolorami, jeżeli dwa pomalowane wielościany uważamy za jednakowe jeżeli jeden otrzymujemy z drugiego przez obrót.