Wybrane metody algebraiczne

Zadania - zestaw 1 [1]

1. Niech $x = (1\ 2\ ...\ n), y = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & ... & n \\ n & n-1 & ... & 1 \end{array} \right) \in S(n),\ n \geqslant 3$ i niech G_n oznacza podgrupę grupy $S(n)$ generowaną przez x oraz y.

   (a) Sprawdzić, że $x^n = 1,\ y^2 = 1,\ xy = yx^{n-1}$.

   (b) Dowieść, że każdy element grupy G_n na jednoznaczne przedstawienie w postaci $y^r x^s$, $r = 0, 1,\ s = 0, 1, ..., n-1$.

   (c) Dowieść, że każdy element grupy G_n na jednoznaczne przedstawienie w postaci $x^s y^r$, $r = 0, 1,\ s = 0, 1, ..., n-1$. W szczególności grupa G_n ma rząd $2n$.

   (d) Sprawdzić następujące reguły mnożenie i odwracania w grupie G_n:

   $$y^r x^s \cdot y^p x^q = y^{r+p} x^{q+(-1)^p s},\ \ (y^r x^s)^{-1} = y^r x^{(-1)^{r+1} s}$$

   $$x^s y^r \cdot x^q y^p = x^{s+(-1)^r q} y^{r+p},\ \ (x^s y^r)^{-1} = x^{(-1)^{r+1} s} y^r.$$

   (e) Pokazać, że podgrupa generowana przez x jest podgrupą normalną, natomiast grupa generowna przez y nie jest podgrupą normalną grupy G_n.

   (f) Narysować n-kąt foremny, ponumerować wierzchołki liczbami $1, 2, ..., n$ i zinterpretować x oraz y jako izometrie tego n-kąta.

   (g) Pokazać, że grupa G_n jest izomorficzna z grupą $D(n)$ izometrii n-kąta foremnego.

2. Pokaż, że jeżeli $G/Z(G)$ jest grupą cykliczną, to grupa G jest abelowa.

3. Wypisz wszystkie elementy grupy $D(3)$ oraz znajdź wszystkie podgrupy grupy $D(3)$ i sprawdź które z nich są podgrupami normalnymi. Wyznacz również klasy sprzężoności tej grupy. Znajdź centrum oraz komutant grupy $D(3)$. Uzasadnij, że grupa $D(3)$ jest izomorficzna z grupą $S(3)$.

4. Wypisz wszystkie elementy grupy $D(4)$ oraz znajdź wszystkie podgrupy grupy $D(4)$ i sprawdź które z nich są podgrupami normalnymi. Wyznacz również klasy sprzężoności tej grupy. Znajdź centrum oraz komutant grupy $D(4)$.

5. Znajdź wszystkie podgrupy grupy $A(4)$ i sprawdź które z nich są podgrupami normalnymi. Wyznacz również klasy sprzężoności tej grupy. Znajdź centrum oraz komutant grupy $A(4)$.

6. Niech $G < S(n)$. Pokazać, że jeżeli dwa elementy grupy G są sprzężone, to mają tego samego typu rozkłady na cykle rozłączne, tzn. w ich rozkładach jest tyle samo cykli tej samej długości. Uzasadnić, że jeżeli $G = S(n)$, to ten warunek jest warunkiem WKW.
   Wsk. Dla $\sigma \in S(n)$ mamy $\sigma(a_1, ..., a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), ..., \sigma(a_k))$.

7. Niech $H = \{\mathrm{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\},\ F = \{\sigma \in S(4) : \sigma(4) = 4\}$. Pokazać, że:

   (a) H oraz F są podgrupami grupy $S(4)$.

   (b) Każdy permutację $\sigma \in S(4)$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $\sigma = hf,\ h \in H, f \in F$.

   Skonstruować epimorfizm grupy $S(4)$ na grupę $S(3)$.

8. Pokazać, że

   (a) grupa obrotów sześcianu jest izomorficzna z grupą $S(4)$,

   (b) grupa obrotów czworościanu foremnego jest izomorficzna z grupą $A(4)$,

   (c) grupa izometrii czworościanu foremnego jest izomorficzna z grupą $S(4)$.

9. Rozważmy 8 następujących macierzy należących do $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$:

$$I = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right),\ i = \left(\begin{array}{cc} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{array} \right),\ j = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right),\ k = \left(\begin{array}{cc} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{array} \right),\ -I,\ -i,\ -j,\ -k.$$

[1] Większość zadań z tego zestawu będzie w istotny sposób wykorzystywana w rozwiązaniach zadań z następnych zestawów.

(a) Sprawdzić, że $i^2 = j^2 = k^2 = -I,\ ij = k = -ji,\ jk = i = -kj,\ ki = j = -ik$.

(b) Sprawdzić, że zbiór tych 8 macierzy tworzy grupę ze względu na mnożenie macierzy. Grupę tę oznaczać będziemy Quat i nazywać *grupą kwaternionów*.

(c) Sporządzić tabelkę działań w grupie Quat.

(d) Znajdź wszystkie podgrupy grupy Quat i sprawdź które z nich są podgrupami normalnymi. Wyznacz również klasy sprzężoności tej grupy. Znajdź centrum oraz komutant grupy Quat.

10. Dla elementu a grupy G zbiór $N_G(a) = \{b \in G; ab = ba\}$ nazywamy centralizatorem elementu a. Pokazać, że

(a) $N_G(a) < G$,

(b) $Z(G) = \bigcap_{a \in G} N_G(a)$,

(c) Jeśli $[a]_\sim$ oznacza klasę sprzężoności elementu a, to $|[a]_\sim| = [G : N_G(a)]$ oraz $|[a]_\sim|$ dzieli $|G|$.