Wybrane metody algebraiczne

Zadania - zestaw 0

We własnym zakresie należy przypomnieć sobie następujące tematy:

- Działania na macierzach, ślad i wyznacznik macierzy oraz ich własności.
- Przekształcenie liniowe, wyznaczanie przekształcenia liniowego poprzez zadanie wartości na ustalonej bazie.
- Macierz przekształcenia liniowego i jej zależność od bazy.
- Wartości i wektory własne endomorfizmu, diagonalizacja endomorfizmu.
- Podprzestrzenie niezmiennicze endomorfizmu.

Aby sprawdzić czy powtórka powyższych tematów była udana rozwiąż następujące zadania:

1. Które z podanych niżej przekształceń $\varphi : K^n \to K^m$ są przekształceniami liniowymi:

(a) $n = m = 3$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+z \\ 2x+z \\ 3x-y+z \end{bmatrix}$, **(b)** $n = m = 3$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x \\ y+1 \\ z+2 \end{bmatrix}$,

(c) $n = m = 3$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x+z \\ z \end{bmatrix}$, **(d)** $n = m = 3$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x-y+z \\ z \\ y \end{bmatrix}$,

(e) $n = 4$, $m = 3$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x+3y+5z-t \\ x+z-t \end{bmatrix}$,

(f) $n = 4$, $m = 3$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x-3y+5z-t \\ x-z-t \end{bmatrix}$,

(g) $n = m = 4$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+3y-2t \\ x+y+z \\ 2y+t \\ y+z \end{bmatrix}$,

(h) $n = m = 4$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+3y-2t \\ x+y+z \\ 2y-3t \\ 2x+4y+z-2t \end{bmatrix}$,

(i) $n = m = 3$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+z \\ 2xz \\ 3x-y+z \end{bmatrix}$.

W przypadku, gdy przekształcenie φ jest przekształceniem liniowym, zbadać czy jest to monomorfizm, epimorfizm.

2. Przekształcenie liniowe $\varphi : K^2 \to K^3$ dane jest wzorem $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ x-y \\ 3y \end{bmatrix}$. Wyznaczyć:

(a) obrazy podprzestrzeni: K^2, $\operatorname{lin}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})$, $\operatorname{lin}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$, $\operatorname{lin}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$, $\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in K^2 : 2x+3y = 0\}$;

(b) przeciwobrazy podprzestrzeni: K^3, $\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$, $\operatorname{lin}(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix})$, $\operatorname{lin}(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$, $\operatorname{lin}(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$,

$\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in K^3 : x+y+z = 0\}$.

3. Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające warunki:

(a) $\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$

(b) $\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix};$

(c) $\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix};$

(d) $\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}?$

W przypadku pozytywnej odpowiedzi przeanalizować liczbę rozwiązań i znaleźć wzór przynajmniej jednego takiego przekształcenia liniowego.

4. Znaleźć wzór analityczny:

(a) symetrii przestrzeni $\mathbb{R}^2$ względem $\operatorname{lin}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix})$ i wzdłuż $\operatorname{lin}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$;

(b) symetrii przestrzeni $\mathbb{R}^3$ względem $\operatorname{lin}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix})$ i wzdłuż $\operatorname{lin}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$;

(c) rzutu przestrzeni $\mathbb{R}^2$ na $\operatorname{lin}(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix})$ wzdłuż $\operatorname{lin}(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix})$;

(d) rzutu przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na $\operatorname{lin}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ wzdłuż $\operatorname{lin}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix})$.

5. W przestrzeni K^3 wybrano bazy

$\mathcal{A}_3 = (\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ oraz $\mathcal{B}_3 = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$,

natomiast w przestrzeni K^4 wybrano bazy

$\mathcal{A}_4 = (\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ oraz

$\mathcal{B}_4 = (\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$.

Znaleźć macierz przekształcenia liniowego $\varphi : K^n \to K^m$ w bazach $\mathcal{A}_n$ oraz $\mathcal{B}_m$ ($\mathcal{A}_n$ oraz $\mathcal{A}_m$; $\mathcal{B}_n$ oraz $\mathcal{B}_m$; $\mathcal{B}_n$ oraz $\mathcal{A}_m$), jeżeli:

(a) $n = m = 3$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+z \\ 2x+z \\ 3x-y+z \end{bmatrix}$, **(b)** $n = m = 3$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x-y+z \\ y \\ z \end{bmatrix}$,

(c) $n = 4, m = 3$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x+3y+5z-t \\ x+z-t \end{bmatrix}$, **(d)** $n = 4, m = 3$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x-y+2t \\ 2x-3y+5z \\ x-z-t \end{bmatrix}$,

(e) $n = 3, m = 4$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+3y-2z \\ x+y+z \\ 2y \\ y+z \end{bmatrix}$, **(f)** $n = 3, m = 4$, $\varphi(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+3y-2z \\ x+y+z \\ 2y-3z \\ 2x+4y+z \end{bmatrix}$.

6. Przekształcenie liniowe $\varphi : K^2 \to K^3$ względem baz $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ oraz $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ ma macierz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Znaleźć wzór (analityczny) na $\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$.

7. Endomorfizm ψ przestrzeni K ma w bazie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ macierz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Znaleźć wzór analityczny opisujący ψ.

8. Endomorfizm ψ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma w bazie $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Znaleźć bazę jądra i bazę obrazu przekształcenia ψ. Czy wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ należy do jądra ψ? Jaki jest obraz wektora $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$?

9. Endomorfizm γ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ma względem bazy standardowej macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Znaleźć macierz γ względem bazy:
(a) $(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_4)$, **(b)** $(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$.

10. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dane są bazy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$. Oznaczmy przez $\mathcal{E}$ bazę standardową $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$. Znaleźć macierze przejścia od $\mathcal{E}$ do $\mathcal{A}$, od $\mathcal{E}$ do $\mathcal{B}$, od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{E}$ oraz od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, gdy:

    (a) $n = 2,\ \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}\right),\ \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right);$

    (b) $n = 3,\ \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}\right),\ \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right);$

    (c) $n = 4,\ \mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right),\ \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$

    W każdym z powyższych przypadków zapisać wektor $x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$ jako kombinację liniową wektorów bazy $\mathcal{A}$.

11. Endomorfizm $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ ma w bazie $\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}\right)$ macierz **(a)** $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

    Znaleźć wartości własne i wektory własne endomorfizmu φ. Jakie będzie rozwiązanie, jeżeli założymy, że $\mathcal{A}$ jest bazą standardową ? Jakie będzie rozwiązanie, jeżeli założymy, że $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$?

12. Macierz A jest macierzą endomorfizmu $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ w bazie standardowej. Obliczyć wartości oraz wektory własne endomorfizmu φ. Skonstruować (o ile to możliwe) bazę przestrzeni $\mathbb{C}^n$ złożoną z wektorów własnych φ. Znaleźć (o ile to możliwe) macierz $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ taką, że macierz $C^{-1}AC$ jest macierzą diagonalną.
    $n = 2:$ **(a)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$; **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; **(c)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$; **(d)** $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$,
    $n = 3:$ **(e)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$; **(f)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; **(g)** $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$,

$n=4:$ **(h)** $A=\begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&2&0\\ 0&3&0&0\\ 4&0&0&0 \end{bmatrix}$; **(i)** $A=\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&2&0&0\\ 3&0&0&0 \end{bmatrix}$; **(j)** $A=\begin{bmatrix} 1&1&2&3\\ 0&2&2&4\\ 0&0&1&-2\\ 0&0&0&2 \end{bmatrix}$;

(k) $A=\begin{bmatrix} 1&1&2&3\\ 0&1&1&2\\ 0&0&2&0\\ 0&0&0&2 \end{bmatrix}$; **(l)** $A=\begin{bmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ -6&1&7&-1 \end{bmatrix}$; **(m)** $A=\begin{bmatrix} 1&1&0&0\\ 3&0&1&0\\ -1&0&0&1\\ -2&0&0&0 \end{bmatrix}$.

13. Znaleźć wartości własne oraz odpowiadające im podprzestrzenie wektorów własnych endomorfizmów liniowych rzeczywistych przestrzeni współrzędnych o następujących macierzach w bazie kanonicznej

(a) $\begin{bmatrix} -3&4\\ 2&-1 \end{bmatrix}$; **(b)** $\begin{bmatrix} 1&1\\ 1&-1 \end{bmatrix}$; **(c)** $\begin{bmatrix} 1&2\\ 2&-2 \end{bmatrix}$; **(d)** $\begin{bmatrix} 2&4\\ 5&3 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 5&6&-3\\ -1&0&1\\ 1&2&-1 \end{bmatrix}$; **(f)** $\begin{bmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{bmatrix}$; **(g)** $\begin{bmatrix} 0&2&1\\ -2&0&3\\ -1&-3&0 \end{bmatrix}$.

14. Znaleźć wartości własne oraz odpowiadające im podprzestrzenie wektorów własnych endomorfizmów liniowych zespolonych przestrzeni współrzędnych o następujących macierzach w bazie kanonicznej:

(a) $\begin{bmatrix} -1&2i\\ -2i&2 \end{bmatrix}$; **(b)** $\begin{bmatrix} 0&a\\ -a&0 \end{bmatrix}$ dla $a\in\mathbb{R}$; **(c)** $\begin{bmatrix} 0&1&0&\cdots&0&0\\ -1&0&1&\cdots&0&0\\ 0&-1&0&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&0&1\\ 0&0&0&\cdots&-1&0 \end{bmatrix}$.

15. Zbadać czy dana podprzestrzeń U przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ jest niezmiennicza względem endomorfizmu $\varphi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $\varphi([x,y,z]^T)=[3x-y+z,2x+z,2x-2y+3z]^T$, jeśli
(a) $U=\mathrm{lin}([0,1,0]^T,[0,0,1]^T)$, **(b)** $U=\mathrm{lin}(1,0,-1]^T,[1,2,1]^T)$.

16. Zbadać czy dana podprzestrzeń U przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ jest niezmiennicza względem endomorfizmu $\varphi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $\varphi([x,y,z]^T)=[-3x-2y-4z,2x+7y+10z,x-2y-2z]^T$, jeśli
(a) $U=\mathrm{lin}(1,1,-1]^T)$, **(b)** $U=\mathrm{lin}([3,2,1]^T,[1,0,1]^T)$, **(c)** $U=\mathrm{lin}([0,7,-4]^T,[4,-3,0]^T)$,
(d) $U=\mathrm{lin}([1,1,1]^T)$, **(e)** $U=\mathrm{lin}([1,0,0]^T,[0,1,0]^T)$.

17. Pokaż, że endomorfizm przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ posiada podprzestrzeń niezmienniczą wymiaru $\leqslant 2$.