

Zadania ze wstępu do algebry i teorii liczb

Zestaw 4

Zadanie 1 jest ćwiczeniem zasygnalizowanym i wykorzystywanym na wykładzie.

1. Niech P będzie pierścieniem całkowitym. Wykaż, że relacja \sim na zbiorze $P \times (P \setminus \{0\})$,

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc,$$

ma następujące własności:

(a) $(a, b) \sim (a', b'), (c, d) \sim (c', d') \implies (ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd'), (ac, bd) \sim (a'c', b'd')$.

(b) jeśli $P = \mathbb{Z}$, to

$$(a, b) \sim (a', b'), (c, d) \sim (c', d') \implies ((bc - ad)bd \in \mathbb{N} \iff (b'c' - a'd')b'd' \in \mathbb{N}).$$

2. Pokaż, że ciało ułamków pierścienia $\mathbb{Z}_{(p)} := \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, p \nmid n\}$, p – liczba pierwsza (ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia) jest izomorficzne z ciałem liczb wymiernych.
3. Jakie jest ciało ułamków dowolnego podpierścienia P ciała \mathbb{Q} ?
4. Pokaż, że jeżeli pierścień P jest podpierścieniem ciała F , to ciało ułamków pierścienia P jest izomorficzne z podciałem ciała F .
5. Pokaż, że pierścień $\mathbb{Z}[X]$ wielomianów o współczynnikach całkowitych jest pierścieniem całkowitym oraz jego ciało ułamków jest izomorficzne z ciałem $\mathbb{Q}(X)$.