

Zadania ze wstępu do algebry i teorii liczb

Zestaw 1

- Podziel z resztą:
 - 134 przez 26,
 - 134 przez 26,
 - 134 przez -26,
 - 134 przez -26.
- Liczba 100 przy dzieleniu z resztą przez pewną liczbę b daje resztę 6 i iloraz q . Wyznacz b i q .
- Liczba 42157 przy dzieleniu przez pewną liczbę naturalną b daje iloraz $q = 231$. Wyznacz dzielnik b oraz resztę r .
- Pokazać, że jeśli a i b , ($b < a$) są liczbami naturalnymi, to $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ jest ilorazem natomiast $a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor b$ jest resztą z dzielenia a przez b . Funkcja $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ przyporządkowuje liczbie rzeczywistej x część całkowitą liczby x .
- Rozkładając na czynniki pierwsze liczby a oraz b wyznaczyć $\text{NWD}(a, b)$ oraz $\text{NWW}(a, b)$, jeśli:
 - $a = 360$, $b = 504$,
 - $a = 2520$, $b = 6600$,
 - $a = 187$, $b = 533$.
- Wykaż, że:
 - $\text{NWD}(a, 0) = a$
 - $\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(a - kb, b)$; w szczególności $\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(b, (a)_b)$ o ile $b \neq 0$.
 - $\text{NWD}(ac, bc) = c \text{NWD}(a, b)$
 - jeśli $d = \text{NWD}(a, b)$, to $\text{NWD}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$
 - $c | ab$, $\text{NWD}(c, a) = 1 \implies c | b$
 - $a | c$, $b | c$, $\text{NWD}(a, b) = 1 \implies ab | c$.
 - $\text{NWD}(a_1, \dots, a_n) = \text{NWD}(\text{NWD}(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$. Podobnie dla NWW.

Wskazówka:
ad e. $c | ab \wedge c | bc \implies c | \text{NWD}(ab, bc) = b$.
ad f. $ab | ac \wedge ab | bc \implies ab | \text{NWD}(ac, bc) = c$.
- Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczyć $\text{NWD}(a, b)$, jeśli:
 - $a = 237$, $b = 87$,
 - $a = 5720$, $b = 4370$,
 - $a = 2345$, $b = 525$.
- Pokazać, że dla dowolnych liczb całkowitych a i b zachodzi równość $\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(5a + 2b, 13a + 5b)$.
- Rozwiąż w liczbach naturalnych następujące układy równań:
 - $$\begin{cases} x + y = 180 \\ \text{NWD}(x, y) = 30 \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} xy = 720 \\ \text{NWD}(x, y) = 4 \end{cases}$$
- Niech a, b, c będą liczbami naturalnymi i $a = cq_1 + r_1$, $b = cq_2 + r_2$. Pokazać, że $\text{NWD}(a, b, c) = \text{NWD}(c, r_1, r_2)$. Wyprowadzić stąd metodę wyznaczania NWD trzech liczb. Wyznaczyć możliwie najprostszy sposóbem $\text{NWD}(1411, 4641, 5253)$, $\text{NWD}(299, 391, 667)$, $\text{NWD}(279, 372, 1395)$.
- Pokazać, że $\text{NWD}(a, b)\text{NWW}(a, b) = ab$. Czy ten fakt jest prawdziwy dla trzech liczb naturalnych?
- Udowodnić, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b, c zachodzą równości:
 - $$\text{NWW}(a, b, c) = \frac{abc \text{NWD}(a, b, c)}{\text{NWD}(a, b) \text{NWD}(a, c) \text{NWD}(b, c)}$$

- (b) $\text{NWD}(a, b) \text{NWD}(a, c) \text{NWD}(b, c) \text{NWW}(a, b) \text{NWW}(a, c) \text{NWW}(b, c) = (abc)^2$.
13. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ w przedziale $[n, n! - 1]$ istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza. Wyciągnij stąd wniosek, że zbiór liczb pierwszych jest nieskończony.
14. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz a, b liczbami całkowitymi. Pokazać, że $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.
15. Wykorzystując kongruencje:
 $100 \equiv 1 \pmod{11}$, $100 \equiv -1 \pmod{101}$, $1000 \equiv -1 \pmod{7, 13, 11}$, $1000 \equiv 1 \pmod{27, 37}$
wyprowadź cechy podzielności przez 7, 11, 13, 27, 37, 101.
16. Wykorzystując kongruencje: $10 \equiv 3 \pmod{7}$, $100 \equiv -2 \pmod{51}$ wyprowadź cechy podzielności przez 7 oraz 51.
17. Wykazać, że $7 \mid 100a + 10b + c \iff 7 \mid a + 4(10b + c)$ dla każdych $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Wykorzystując tę równoważność sformułuj cechę podzielności przez 7 i zastosuj ją do liczby 138264.
18. Rozwiąż w liczbach całkowitych równania:
- (a) $3X + 4Y = 13$,
 - (b) $21X + 111Y = 2$,
 - (c) $25X + 100Y = 6$,
 - (d) $39X - 13Y = 111$,
 - (e) $122X + 129Y = 2$.
19. Fabryka wysyła towar w paczkach po 3 kg i po 5 kg. Wykazać, że w ten sposób można wysłać każdą całkowitą ilość kilogramów większą od 7. Czy można w tym zadaniu zastąpić dane liczby innymi liczbami?
20. Do przewozu zboża są do dyspozycji worki 60-cio i 80-cio kilogramowe. Ile potrzeba poszczególnych worków do przewozu 440 kg zboża (wszystkie worki muszą być pełne!).