Wykład 8
Układy równań liniowych

Andrzej Sładek
`sladek@ux2.math.us.edu.pl`

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Wykład jest przewidziany na 4 godziny lekcyjne

Wykład jest przewidziany na 4 godziny lekcyjne

Tematy poruszane na wykładzie można znaleźć w:

Wykład jest przewidziany na 4 godziny lekcyjne

Tematy poruszane na wykładzie można znaleźć w:

- A.I. Kostrykin, *Wstęp do algebry, t. I,* PWN 2004, [rozdz. I, §3, rozdz. III, §3]

Wykład jest przewidziany na 4 godziny lekcyjne

Tematy poruszane na wykładzie można znaleźć w:

- A.I. Kostrykin, *Wstęp do algebry, t. I,* PWN 2004, [rozdz. I, §3, rozdz. III, §3]

W innych podręcznikach niektóre rozważane na wykładzie pojęcia pojawiają się w szerszym kontekście mogąc sprawiać trudność studentom pierwszego semestru.

Definicja

Układem równań liniowych o n niewiadomych nad ciałem K nazywamy układ postaci

$$\mathcal{U}: \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

gdzie $a_{ij},\ b_i \in K,\ \ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$

Definicja

Układem równań liniowych o n niewiadomych nad ciałem K nazywamy układ postaci

$$\mathcal{U}: \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & ... & ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

gdzie $a_{ij},\ b_i \in K,\ \ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n.$
Jeżeli $b_1, ..., b_m$ (tzw. **wyrazy "wolne"**) nie wszystkie równe są zero, to układ nazywamy **niejednorodnym**.

Definicja

Układem równań liniowych o n niewiadomych nad ciałem K nazywamy układ postaci

$$\mathcal{U}: \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & ... & ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

gdzie $a_{ij}, b_i \in K, \ i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n.$
Jeżeli $b_1, ..., b_m$ (tzw. **wyrazy "wolne"**) nie wszystkie równe są zero, to układ nazywamy **niejednorodnym**.

Układ

$$\mathcal{U}_0: \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & ... & ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right. .$$

nazywamy układem **jednorodnym stowarzyszonym** z danym układem.

Definicja

Macierze

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A_u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

nazywamy odpowiednio **macierzą współczynników** i **macierzą uzupełnioną** tego układu.

Definicja

Macierze

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A_u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

nazywamy odpowiednio **macierzą współczynników** i **macierzą uzupełnioną** tego układu.

Nasz układ można zapisać macierzowo w następujący sposób

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Definicja

Macierze

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A_u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

nazywamy odpowiednio **macierzą współczynników** i **macierzą uzupełnioną** tego układu.

Nasz układ można zapisać macierzowo w następujący sposób

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

lub krócej $AX = B$.

Definicja

Rozwiązaniem układu

$$\mathcal{U}: \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

nazywamy każdy ciąg $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$ taki, że

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n & = & b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

Definicja

Rozwiązaniem układu

$$\mathcal{U}: \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ .... & ... & ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

nazywamy każdy ciąg $(c_1, ..., c_n) \in K^n$ taki, że

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1n}c_n & = & b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{2n}c_n & = & b_2 \\ .... & ... & ... \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + ... + a_{mn}c_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

Zbiór wszystkich rozwiązań układu $\mathcal{U}$ oznaczamy $z(\mathcal{U})$ lub $sol(\mathcal{U})$.

Przykład Każdy z Was spotkał się z następującym układem równań:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} .$$

Przykład Każdy z Was spotkał się z następującym układem równań:

$$\left\{\begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{array}\right. .$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez d a drugie przez b i od pierwszego odejmijmy drugie równanie.

Przykład Każdy z Was spotkał się z następującym układem równań:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}.$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez d a drugie przez b i od pierwszego odejmijmy drugie równanie. Wtedy mamy

$$(ad - bc)x = ed - fb.$$

Przykład Każdy z Was spotkał się z następującym układem równań:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} .$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez d a drugie przez b i od pierwszego odejmijmy drugie równanie. Wtedy mamy

$$(ad - bc)x = ed - fb.$$

Zatem jeśli $ad - bc \neq 0$, to $x = \frac{ed - fb}{ad - bc}$.

Przykład Każdy z Was spotkał się z następującym układem równań:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} .$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez d a drugie przez b i od pierwszego odejmijmy drugie równanie. Wtedy mamy

$$(ad - bc)x = ed - fb.$$

Zatem jeśli $ad - bc \neq 0$, to $x = \frac{ed-fb}{ad-bc}$.

Podobnie, jeżeli pierwsze równanie pomnożymy przez c a drugie przez a i od drugiego równania odejmiemy pierwsze, to dostajemy

$$(ad - bc)y = af - ce.$$

Przykład Każdy z Was spotkał się z następującym układem równań:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} .$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez d a drugie przez b i od pierwszego odejmijmy drugie równanie. Wtedy mamy

$$(ad - bc)x = ed - fb.$$

Zatem jeśli $ad - bc \neq 0$, to $x = \frac{ed - fb}{ad - bc}$.

Podobnie, jeżeli pierwsze równanie pomnożymy przez c a drugie przez a i od drugiego równania odejmiemy pierwsze, to dostajemy

$$(ad - bc)y = af - ce.$$

Zatem jeśli $ad - bc \neq 0$, to $y = \frac{af - ce}{ad - bc}$.

Jeśli $ad - bc \neq 0$, to nasz układ

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie i jest ono równe

$$x = \frac{ed - fb}{ad - bc} = \frac{\det \begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}, \quad y = \frac{af - ce}{ad - bc} = \frac{\det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}.$$

Zadanie

Rozwiąż układ równań $2x + y - 3z = 1$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

Zadanie

Rozwiąż układ równań $2x + y - 3z = 1$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie.
Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań i są one postaci

$$y = 1 - 2x + 3z, \quad x, z \in \mathbb{R}$$

Zadanie

Rozwiąż układ równań $2x + y - 3z = 1$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie.
Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań i są one postaci

$$y = 1 - 2x + 3z, \quad x, z \in \mathbb{R}$$

lub macierzowo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x, z \in \mathbb{R}.$$

Zadanie

Rozwiąż układ równań $2x + y - 3z = 1$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie.
Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań i są one postaci

$$y = 1 - 2x + 3z, \quad x, z \in \mathbb{R}$$

lub macierzowo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x, z \in \mathbb{R}.$$

W powyższym rozwiązaniu x oraz z należy traktować jako tzw. *parametry* przybierające dowolne wartości, a y wylicza się z podanego wzoru.

Zadanie

Rozwiąż układ równań $2x + y - 3z = 1$ nad ciałem $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie.
Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań i są one postaci

$$y = 1 - 2x + 3z, \quad x, z \in \mathbb{R}$$

lub macierzowo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x, z \in \mathbb{R}.$$

W powyższym rozwiązaniu x oraz z należy traktować jako tzw. *parametry* przybierające dowolne wartości, a y wylicza się z podanego wzoru.
Wstaw do lewej strony naszego równania trójki $[0, 1, 0]$, $[1, -2, 0]$, $[0, 3, 1]$ i wyciągnij odpowiednie wnioski.

Pewnie zauważyliście, że trójka $[0, 1, 0]$ jest rozwiązaniem równania

$$2x + y - 3z = 1,$$

a trójki $[1, -2, 0]$, $[0, 3, 1]$ są rozwiązaniami równania

$$2x + y - 3z = 0,$$

czyli równania jednorodnego stowarzyszonego z wyjściowym równaniem.

Pewnie zauważyliście, że trójka $[0, 1, 0]$ jest rozwiązaniem równania

$$2x + y - 3z = 1,$$

a trójki $[1, -2, 0]$, $[0, 3, 1]$ są rozwiązaniami równania

$$2x + y - 3z = 0,$$

czyli równania jednorodnego stowarzyszonego z wyjściowym równaniem.

Co więcej, możesz sprawdzić, że rozwiązaniem równania jednorodnego jest dowolna trójka postaci

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pewnie zauważyliście, że trójka $[0, 1, 0]$ jest rozwiązaniem równania

$$2x + y - 3z = 1,$$

a trójki $[1, -2, 0]$, $[0, 3, 1]$ są rozwiązaniami równania

$$2x + y - 3z = 0,$$

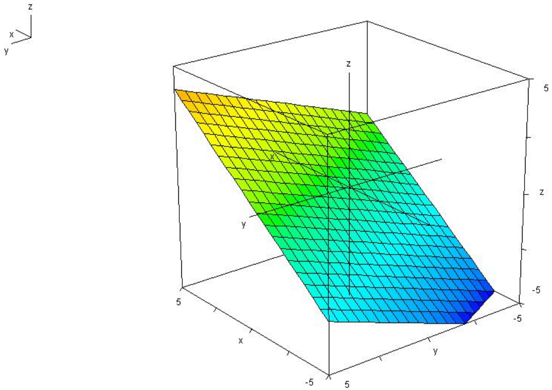
czyli równania jednorodnego stowarzyszonego z wyjściowym równaniem.

Co więcej, możesz sprawdzić, że rozwiązaniem równania jednorodnego jest dowolna trójka postaci

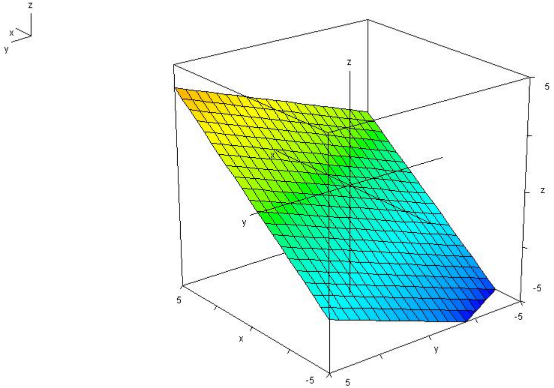
$$x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jak widać dowolne rozwiązanie równania niejednorodnego jest sumą jednego rozwiązania tego równania oraz dowolnego rozwiązania równania jednorodnego stowarzyszonego z nim. To nie jest przypadek!

Zbiór rozwiązań naszego równania ma odpowiednią interpretację geometryczną



Zbiór rozwiązań naszego równania ma odpowiednią interpretację geometryczną



Jak widać zbiór rozwiązań jest płaszczyzną w przestrzeni. Jest to jednak temat na oddzielny wykład i to nie w tym roku.

Zadanie

Rozwiąż nad ciałem $\mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

Zadanie

Rozwiąż nad ciałem $\mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Pomnóżny pierwsze równanie przez 2 i dodajmy do drugiego. Mamy wtedy

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 7y + 7z = 2 \end{cases}$$

Zadanie

Rozwiąż nad ciałem $\mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Pomnóżny pierwsze równanie przez 2 i dodajmy do drugiego. Mamy wtedy

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \phantom{x + {}} 7y + 7z = 2 \end{cases}$$

Dzielimy drugie równanie stronami przez 7 otrzymując

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + z = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Zadanie

Rozwiąż nad ciałem $\mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Pomnóżny pierwsze równanie przez 2 i dodajmy do drugiego. Mamy wtedy

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 7y + 7z = 2 \end{cases}$$

Dzielimy drugie równanie stronami przez 7 otrzymując

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + z = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Teraz pomnóżmy drugie równanie przez -2 i dodajmy do pierwszego. Mamy

$$\begin{cases} x + z = -\frac{4}{7} \\ y + z = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Możemy już łatwo napisać rozwiązanie

$$x = \frac{4}{7} - z,\ y = \frac{2}{7} - z,\ z \in \mathbb{R}.$$

Możemy już łatwo napisać rozwiązanie

$$x = \frac{4}{7} - z, \ y = \frac{2}{7} - z, \ z \in \mathbb{R}.$$

lub macierzowo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$$

Ten układ też ma nieskończenie wiele rozwiązań, ale zależnych jedynie od jednego parametru.

Możemy już łatwo napisać rozwiązanie

$$x = \frac{4}{7} - z,\ y = \frac{2}{7} - z,\ z \in \mathbb{R}.$$

lub macierzowo

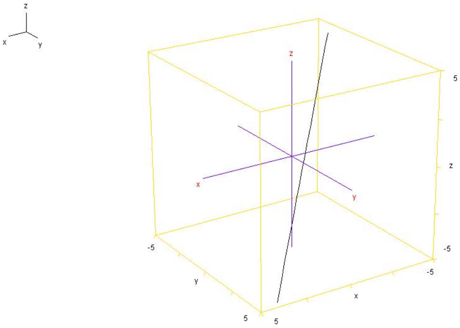
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$$

Ten układ też ma nieskończenie wiele rozwiązań, ale zależnych jedynie od jednego parametru.

Podobnie jak w poprzednim zadaniu zastanów się nad rolą jaką grają trójki $[-\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, 0]$, $[-1, -1, 1]$ dla naszego układu

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

Popatrz na interpretację geometryczną rozwiązania



Jak widać zbiór rozwiązań jest prostą w przestrzeni.

Domyślasz się dlaczego?

Zbiór rozwiązań każdego z dwóch równań naszego układu

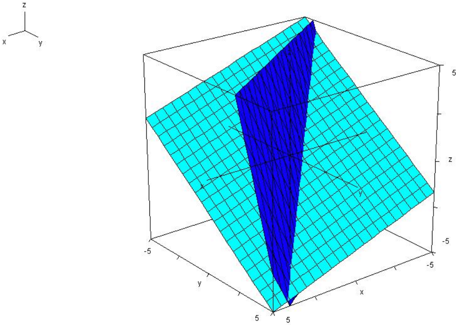
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ -2x & + & 3y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$$

jest płaszczyzną, a zbiór rozwiązań całego układu jest częścią wspólną tych płaszczyzn.

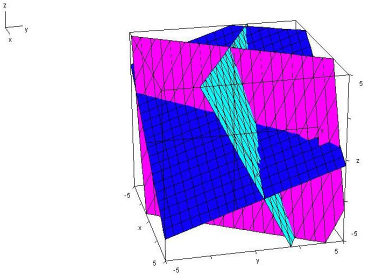
Zbiór rozwiązań każdego z dwóch równań naszego układu

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

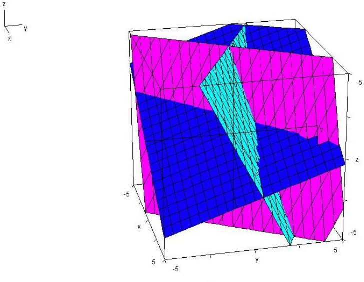
jest płaszczyzną, a zbiór rozwiązań całego układu jest częścią wspólną tych płaszczyzn. Popatrz na rysunek

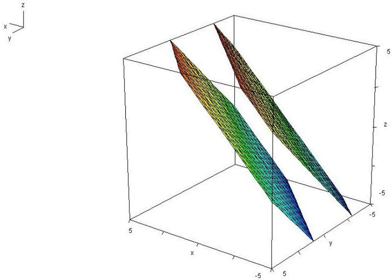


Jakie układy równań liniowych o 3 niewiadomych opisują rysunki?

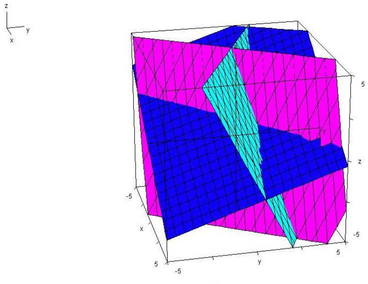


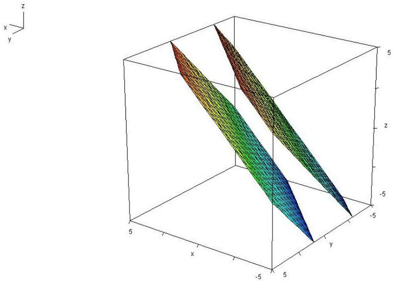
Jakie układy równań liniowych o 3 niewiadomych opisują rysunki?

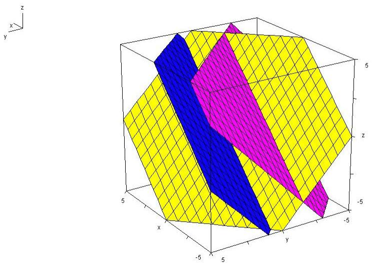




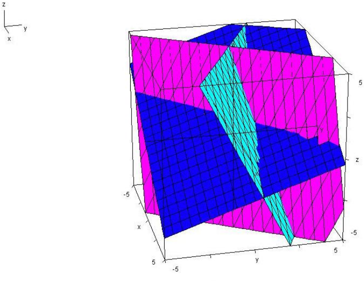
Jakie układy równań liniowych o 3 niewiadomych opisują rysunki?

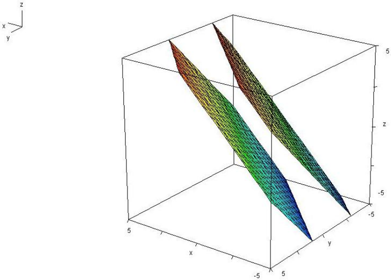


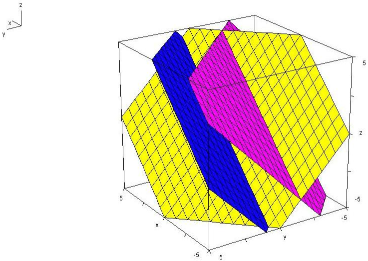


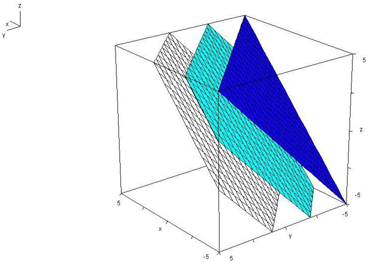


Jakie układy równań liniowych o 3 niewiadomych opisują rysunki?









Pytanie

Jak rozwiązuje się dowolne układy równań liniowych?

Pytanie

Jak rozwiązuje się dowolne układy równań liniowych?

Znane są dwie metody rozwiązywania dowolnych układów równań:

Pytanie

Jak rozwiązuje się dowolne układy równań liniowych?

Znane są dwie metody rozwiązywania dowolnych układów równań:

- metoda Gaussa eliminacji niewiadomych,

Pytanie

Jak rozwiązuje się dowolne układy równań liniowych?

Znane są dwie metody rozwiązywania dowolnych układów równań:

- metoda Gaussa eliminacji niewiadomych,
- metoda wyznacznikowa.

Pytanie

Jak rozwiązuje się dowolne układy równań liniowych?

Znane są dwie metody rozwiązywania dowolnych układów równań:

- metoda Gaussa eliminacji niewiadomych,
- metoda wyznacznikowa.

W ramach tego wykładu poznamy dokładnie metodę eliminacji oraz szczególny przypadek metody wyznacznikowej.

Pytanie

Jak rozwiązuje się dowolne układy równań liniowych?

Znane są dwie metody rozwiązywania dowolnych układów równań:

- metoda Gaussa eliminacji niewiadomych,
- metoda wyznacznikowa.

W ramach tego wykładu poznamy dokładnie metodę eliminacji oraz szczególny przypadek metody wyznacznikowej.
Pełna metoda wyznacznikowa pojawi się w następnym semestrze.

Pytanie

Jak rozwiązuje się dowolne układy równań liniowych?

Znane są dwie metody rozwiązywania dowolnych układów równań:

- metoda Gaussa eliminacji niewiadomych,
- metoda wyznacznikowa.

W ramach tego wykładu poznamy dokładnie metodę eliminacji oraz szczególny przypadek metody wyznacznikowej.
Pełna metoda wyznacznikowa pojawi się w następnym semestrze.
Rozpoczniemy od szczególnego przypadku metody wyznacznikowej.

Twierdzenie (G.Cramer (1704-1742))

Niech A będzie macierzą współczynników układu

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. .$$

Jeśli $\det A \neq 0$, to układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie i jest ono postaci

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A},$$

gdzie A_i dla $i = 1, \ldots, n$ jest macierzą powstałą z macierzy A przez zastąpienie $i-$ tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

Dowód. Macierzowo nasz układ można zapisać w postaci $AX = B$.

Dowód. Macierzowo nasz układ można zapisać w postaci $AX = B$.
Zauważ, że jeżeli $\det A \neq 0$, to A jest macierzą odwracalną i

$$AX = B \iff A^{-1}(AX) = A^{-1}B \iff$$

$$\iff (A^{-1}A)X = A^{-1}B \iff I_n X = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B.$$

Dowód. Macierzowo nasz układ można zapisać w postaci $AX = B$.
Zauważ, że jeżeli $\det A \neq 0$, to A jest macierzą odwracalną i

$$AX = B \iff A^{-1}(AX) = A^{-1}B \iff$$

$$\iff (A^{-1}A)X = A^{-1}B \iff I_nX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B.$$

Oznacza to, że układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Dowód. Macierzowo nasz układ można zapisać w postaci $AX = B$.
Zauważ, że jeżeli $\det A \neq 0$, to A jest macierzą odwracalną i

$$AX = B \iff A^{-1}(AX) = A^{-1}B \iff$$

$$\iff (A^{-1}A)X = A^{-1}B \iff I_n X = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B.$$

Oznacza to, że układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
Wystarczy zatem sprawdzić, że $(x_1, ..., x_n)$ podane w tezie tweirdzenia jest rozwiązaniem naszego układu.

Dowód. Macierzowo nasz układ można zapisać w postaci $AX = B$.
Zauważ, że jeżeli $\det A \neq 0$, to A jest macierzą odwracalną i

$$AX = B \iff A^{-1}(AX) = A^{-1}B \iff$$

$$\iff (A^{-1}A)X = A^{-1}B \iff I_nX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B.$$

Oznacza to, że układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
Wystarczy zatem sprawdzić, że $(x_1, ..., x_n)$ podane w tezie tweirdzenia jest rozwiązaniem naszego układu. Wstawmy nasze $(x_1, ..., x_n)$ do lewej strony l-tego równania w tym układzie, gdzie $l \in \{1, ..., n\}$.

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{ln}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{lj}\frac{\det A_j}{\det A} = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} a_{lj}\det A_j$$

"Rozwińmy" $\det A_j$ względem j-tej kolumny:

Dowód. Macierzowo nasz układ można zapisać w postaci $AX = B$.
Zauważ, że jeżeli $\det A \neq 0$, to A jest macierzą odwracalną i

$$AX = B \iff A^{-1}(AX) = A^{-1}B \iff$$

$$\iff (A^{-1}A)X = A^{-1}B \iff I_nX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B.$$

Oznacza to, że układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
Wystarczy zatem sprawdzić, że $(x_1, ..., x_n)$ podane w tezie tweirdzenia jest rozwiązaniem naszego układu. Wstawmy nasze $(x_1, ..., x_n)$ do lewej strony l-tego równania w tym układzie, gdzie $l \in \{1, ..., n\}$.

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{ln}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{lj}\frac{\det A_j}{\det A} = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} a_{lj}\det A_j$$

"Rozwińmy" $\det A_j$ względem j-tej kolumny: $\det A_j = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}b_i \det A_{ij}$.

Dowód. Macierzowo nasz układ można zapisać w postaci $AX = B$.
Zauważ, że jeżeli $\det A \neq 0$, to A jest macierzą odwracalną i

$$AX = B \iff A^{-1}(AX) = A^{-1}B \iff$$

$$\iff (A^{-1}A)X = A^{-1}B \iff I_n X = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B.$$

Oznacza to, że układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
Wystarczy zatem sprawdzić, że $(x_1, \ldots, x_n)$ podane w tezie tweirdzenia jest rozwiązaniem naszego układu. Wstawmy nasze $(x_1, \ldots, x_n)$ do lewej strony l-tego równania w tym układzie, gdzie $l \in \{1, \ldots, n\}$.

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{lj} \frac{\det A_j}{\det A} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} a_{lj} \det A_j$$

"Rozwińmy" $\det A_j$ względem j-tej kolumny: $\det A_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i \det A_{ij}$.

Wtedy $a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n =$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} a_{lj} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i \det A_{ij} = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{lj} \det A_{ij} =$$

Dowód. Macierzowo nasz układ można zapisać w postaci $AX = B$.
Zauważ, że jeżeli $\det A \neq 0$, to A jest macierzą odwracalną i

$$AX = B \iff A^{-1}(AX) = A^{-1}B \iff$$

$$\iff (A^{-1}A)X = A^{-1}B \iff I_nX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B.$$

Oznacza to, że układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
Wystarczy zatem sprawdzić, że $(x_1, ..., x_n)$ podane w tezie tweirdzenia jest rozwiązaniem naszego układu. Wstawmy nasze $(x_1, ..., x_n)$ do lewej strony l-tego równania w tym układzie, gdzie $l \in \{1, ..., n\}$.

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{ln}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{lj}\frac{\det A_j}{\det A} = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} a_{lj} \det A_j$$

"Rozwińmy" $\det A_j$ względem j-tej kolumny: $\det A_j = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} b_i \det A_{ij}$.

Wtedy $a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{ln}x_n =$

$$= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} a_{lj}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} b_i \det A_{ij} = \frac{1}{\det A}\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{lj} \det A_{ij} = b_l.$$

Czy wiecie dlaczego?

Dowód. Macierzowo nasz układ można zapisać w postaci $AX = B$.
Zauważ, że jeżeli $\det A \neq 0$, to A jest macierzą odwracalną i

$$AX = B \iff A^{-1}(AX) = A^{-1}B \iff$$

$$\iff (A^{-1}A)X = A^{-1}B \iff I_nX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B.$$

Oznacza to, że układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
Wystarczy zatem sprawdzić, że $(x_1, \dots, x_n)$ podane w tezie tweirdzenia jest rozwiązaniem naszego układu. Wstawmy nasze $(x_1, \dots, x_n)$ do lewej strony l-tego równania w tym układzie, gdzie $l \in \{1, \dots, n\}$.

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ln}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{lj}\frac{\det A_j}{\det A} = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} a_{lj}\det A_j$$

"Rozwińmy" $\det A_j$ względem j-tej kolumny: $\det A_j = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}b_i \det A_{ij}$.

Wtedy $a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ln}x_n =$

$$= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} a_{lj}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}b_i \det A_{ij} = \frac{1}{\det A}\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{lj}\det A_{ij} = b_l.$$

Czy wiecie dlaczego? ¶

Przykład

Rozwiąż układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 13 \end{array}\right.$$

Przykład

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

Rozw. Należy policzyć cztery wyznaczniki macierzy stopnia 3.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

Przykład

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

Rozw. Należy policzyć cztery wyznaczniki macierzy stopnia 3.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19,$$

Przykład

Rozwiąż układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 13 \end{array}\right.$$

Rozw. Należy policzyć cztery wyznaczniki macierzy stopnia 3.

$$\det A = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19, \quad \det A_1 = \det\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

Przykład

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

Rozw. Należy policzyć cztery wyznaczniki macierzy stopnia 3.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19, \quad \det A_1 = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19$$

Przykład

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

Rozw. Należy policzyć cztery wyznaczniki macierzy stopnia 3.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19, \quad \det A_1 = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 11 & 1 \\ -1 & 13 & 2 \end{bmatrix} =$$

Przykład

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

Rozw. Należy policzyć cztery wyznaczniki macierzy stopnia 3.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19, \quad \det A_1 = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 11 & 1 \\ -1 & 13 & 2 \end{bmatrix} = -38,$$

Przykład

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

Rozw. Należy policzyć cztery wyznaczniki macierzy stopnia 3.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19, \quad \det A_1 = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 11 & 1 \\ -1 & 13 & 2 \end{bmatrix} = -38, \quad \det A_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 11 \\ -1 & 4 & 13 \end{bmatrix} =$$

Przykład

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

Rozw. Należy policzyć cztery wyznaczniki macierzy stopnia 3.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19, \quad \det A_1 = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 11 & 1 \\ -1 & 13 & 2 \end{bmatrix} = -38, \quad \det A_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 11 \\ -1 & 4 & 13 \end{bmatrix} = -57.$$

Przykład

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

Rozw. Należy policzyć cztery wyznaczniki macierzy stopnia 3.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19, \quad \det A_1 = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 11 & 1 \\ -1 & 13 & 2 \end{bmatrix} = -38, \quad \det A_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 11 \\ -1 & 4 & 13 \end{bmatrix} = -57.$$

Zatem

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-19}{-19} = 1, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-38}{-19} = 2, \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-57}{-19} = 3.$$

A teraz metoda eliminacji Gaussa.

A teraz metoda eliminacji Gaussa.

Definicja

Niech $AX = B$ oraz $A'X = B'$ będą dwoma układami równań o $n-$niewiadomych. Układy te nazywamy **równoważnymi**, jeśli mają identyczne zbiory rozwiązań tzn. każde rozwiązanie pierwszego układu jest rozwiązaniem drugiego układu i na odwrót każde rozwiązanie drugiego układu jest rozwiązaniem pierwszego układu.

A teraz metoda eliminacji Gaussa.

Definicja

Niech $AX = B$ oraz $A'X = B'$ będą dwoma układami równań o $n-$niewiadomych. Układy te nazywamy **równoważnymi**, jeśli mają identyczne zbiory rozwiązań tzn. każde rozwiązanie pierwszego układu jest rozwiązaniem drugiego układu i na odwrót każde rozwiązanie drugiego układu jest rozwiązaniem pierwszego układu.

Układ nazywamy **sprzecznym**, jeśli zbiór rozwiązań tego układu jest zbiorem pustym.

A teraz metoda eliminacji Gaussa.

Definicja

Niech $AX = B$ oraz $A'X = B'$ będą dwoma układami równań o $n-$niewiadomych. Układy te nazywamy **równoważnymi**, jeśli mają identyczne zbiory rozwiązań tzn. każde rozwiązanie pierwszego układu jest rozwiązaniem drugiego układu i na odwrót każde rozwiązanie drugiego układu jest rozwiązaniem pierwszego układu.

Układ nazywamy **sprzecznym**, jeśli zbiór rozwiązań tego układu jest zbiorem pustym.

Przykład

Układy

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 7y + 7z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ y + z = \frac{2}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} x + z = -\frac{4}{7} \\ y + z = \frac{2}{7} \end{cases}$$

są równoważne. Wiesz dlaczego?

Metoda eliminacji polega na przekształceniu za pomocą tzw. operacji elementarnych wyjściowego układu tak, aby otrzymać układ równoważny, którego zbiór rozwiązań można już łatwo znaleźć.

Metoda eliminacji polega na przekształceniu za pomocą tzw. operacji elementarnych wyjściowego układu tak, aby otrzymać układ równoważny, którego zbiór rozwiązań można już łatwo znaleźć.

Operacjom elemntarnym na układzie odpowiadają jednoznacznie operacje na macierzy uzupełnionej tego układu. Wystarczy jedynie pamiętać, że wiersze tej macierzy odpowiadają równaniom, a kolumy niewiadomym.

$$\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{niewiadome}} \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
[A|B] = & \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot\cdot & a_{mn} & b_m \end{array}\right] & \begin{array}{l} \longleftarrow \textbf{1-sze równanie} \\ \longleftarrow \textbf{2-gie równanie} \\ \\ \longleftarrow \textbf{m-te równanie} \end{array}
\end{array}$$

Następujące operacje (zwane **operacjami elementarnymi**) na wierszach macierzy uzupełnionej $[A|B]$ układu równań liniowych $AX = B$ przekształcają go na układ równoważny:

- zamiana wierszy miejscami;

Następujące operacje (zwane **operacjami elementarnymi**) na wierszach macierzy uzupełnionej $[A|B]$ układu równań liniowych $AX = B$ przekształcają go na układ równoważny:

- zamiana wierszy miejscami;
- pomnożenie wiersza przez stałą różną od zera;

Następujące operacje (zwane **operacjami elementarnymi**) na wierszach macierzy uzupełnionej $[A|B]$ układu równań liniowych $AX = B$ przekształcają go na układ równoważny:

- zamiana wierszy miejscami;
- pomnożenie wiersza przez stałą różną od zera;
- dodanie do wszystkich wyrazów ustalonego wiersza odpowiadajacych im wyrazów innego wiersza pomnożonych przez stałą;

Następujące operacje (zwane **operacjami elementarnymi**) na wierszach macierzy uzupełnionej $[A|B]$ układu równań liniowych $AX = B$ przekształcają go na układ równoważny:

- zamiana wierszy miejscami;
- pomnożenie wiersza przez stałą różną od zera;
- dodanie do wszystkich wyrazów ustalonego wiersza odpowiadajacych im wyrazów innego wiersza pomnożonych przez stałą;
- skreślenie wiersza złożonego z samych zer;

Następujące operacje (zwane **operacjami elementarnymi**) na wierszach macierzy uzupełnionej $[A|B]$ układu równań liniowych $AX = B$ przekształcają go na układ równoważny:

- zamiana wierszy miejscami;
- pomnożenie wiersza przez stałą różną od zera;
- dodanie do wszystkich wyrazów ustalonego wiersza odpowiadajacych im wyrazów innego wiersza pomnożonych przez stałą;
- skreślenie wiersza złożonego z samych zer;
- skreślenie jednego z wierszy równych lub proporcjonalnych.

Dodatkowo otrzymuje się układ równoważny, jeżeli w macierzy A zamienimy miejscami dwie kolumny przy jednoczesnej zamianie niewiadomych.

$$A = \begin{array}{c} \text{niewiadome} \\ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & \enclose{circle}{x_j} & & \enclose{circle}{x_l} & & x_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{ml} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \boxed{k_j \longleftrightarrow k_l} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{niewiadome} \\ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & \enclose{circle}{x_l} & & \enclose{circle}{x_j} & & x_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{ml} & \dots & a_{m} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} =$$

Dodatkowo otrzymuje się układ równoważny, jeżeli w macierzy A zamienimy miejscami dwie kolumny przy jednoczesnej zamianie niewiadomych.

$$A = \begin{array}{c} \text{n i e w i a d o m e} \\ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & \textcircled{x_j} & & \textcircled{x_l} & & x_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{ml} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \boxed{k_j \longleftrightarrow k_l} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{n i e w i a d o m e} \\ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & \textcircled{x_l} & & \textcircled{x_j} & & x_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{ml} & \dots & a_{m} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} =$$

Czy teraz już wiesz jak odpowiedzieć na wcześniej postawione pytanie?

Aby rozwiązać układ równań $AX = B$ postępujemy następująco:

1. budujemy macierz uzupełnioną układu

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{niewiadome}} \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
[A|B] = & \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \begin{array}{l} \longleftarrow \text{1-sze równanie} \\ \longleftarrow \text{2-gie równanie} \\ \\ \longleftarrow \text{m-te równanie} \end{array}
\end{array}
$$

Aby rozwiązać układ równań $AX = B$ postępujemy następująco:

1. budujemy macierz uzupełnioną układu

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{niewiadome}} \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
[A|B] = & \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} & b_m \end{array}\right] & \begin{array}{l} \longleftarrow \text{1-sze równanie} \\ \longleftarrow \text{2-gie równanie} \\ \\ \longleftarrow \text{m-te równanie} \end{array}
\end{array}$$

2. na macierzy uzupełnionej wykonujemy operacje elementarne, aby sprowadzić ją do postaci

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc|ccc|c} \multicolumn{4}{c}{\text{niewiadome}} & \multicolumn{3}{c}{\text{parametry}} & \\ x_1' & x_2' & & x_r' & x_{r+1}' & & x_n' & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \end{array} \\
[A'|B'] = & \left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_{1r+1} & \dots & s_{1n} & z_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_{2r+1} & \dots & s_{2n} & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_{rr+1} & \dots & s_{rn} & z_r \\ \hdashline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right]
\end{array}$$

przy czy ostatni wiersz może nie pojawić się wcale albo wystąpi ze współczynnikiem $z_{r+1} \neq 0$.

Wówczas,

1. jeżeli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny (nie posiada rozwiązania);

Wówczas,

1. jeżeli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny (nie posiada rozwiązania);
2. jeżeli ostatni wiersz macierzy $[A'|B']$ nie pojawi się i $n = r$, to układ jest układem Cramera i jego jedyne rozwiązanie ma postać $x_1 = z_1, ..., x_n = z_n$ lub $x_1' = z_1, ..., x_n' = z_n$, o ile przy przekształcaniu macierzy wystapiła operacja zamiany kolumn.

Wówczas,

1. jeżeli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny (nie posiada rozwiązania);
2. jeżeli ostatni wiersz macierzy $[A'|B']$ nie pojawi się i $n = r$, to układ jest układem Cramera i jego jedyne rozwiązanie ma postać $x_1 = z_1, \dots, x_n = z_n$ lub $x'_1 = z_1, \dots, x'_n = z_n$, o ile przy przekształcaniu macierzy wystapiła operacja zamiany kolumn.
3. jeżeli ostatni wiersz macierzy $[A'|B']$ nie pojawi się i $n > r$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów $x'_{r+1}, \dots, x'_n$ należących do ciała nad którym rozwiązujemy układ

$$\begin{cases} x'_1 = z_1 - s_{1\,r+1} \cdot x'_{r+1} - s_{1\,r+2} \cdot x'_{r+2} - \dots - s_{1\,n} \cdot x'_n \\ x'_2 = z_2 - s_{2\,r+1} \cdot x'_{r+1} - s_{2\,r+2} \cdot x'_{r+2} - \dots - s_{2\,n} \cdot x'_n \\ \dotfill \\ x'_r = z_r - s_{r\,r+1} \cdot x'_{r+1} - s_{r\,r+2} \cdot x'_{r+2} - \dots - s_{r\,n} \cdot x'_n \end{cases}$$

Rozwiązanie z poprzedniego slajdu można zapisać macierzowo

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_r' \\ x_{r+1}' \\ x_{r+2}' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - x_{r+1}' \begin{bmatrix} s_{1\ r+1} \\ s_{2\ r+1} \\ \vdots \\ s_{r\ r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - x_{r+2}' \begin{bmatrix} s_{1\ r+1} \\ s_{2\ r+2} \\ \vdots \\ s_{r\ r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \cdots - x_n' \begin{bmatrix} s_{1\ r+1} \\ s_{2\ n} \\ \vdots \\ s_{r\ n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie z poprzedniego slajdu można zapisać macierzowo

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_r' \\ x_{r+1}' \\ x_{r+2}' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - x_{r+1}' \begin{bmatrix} s_{1\ r+1} \\ s_{2\ r+1} \\ \vdots \\ s_{r\ r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - x_{r+2}' \begin{bmatrix} s_{1\ r+1} \\ s_{2\ r+2} \\ \vdots \\ s_{r\ r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \cdots - x_n' \begin{bmatrix} s_{1\ r+1} \\ s_{2\ n} \\ \vdots \\ s_{r\ n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Czy rozpoznajesz w powyższym wyrażeniu rozwiązania równania jednorodnego stowarzyszonego z wyjściowym układem.

Rozwiązanie z poprzedniego slajdu można zapisać macierzowo

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_r' \\ x_{r+1}' \\ x_{r+2}' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - x_{r+1}' \begin{bmatrix} s_{1\ r+1} \\ s_{2\ r+1} \\ \vdots \\ s_{r\ r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - x_{r+2}' \begin{bmatrix} s_{1\ r+1} \\ s_{2\ r+2} \\ \vdots \\ s_{r\ r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \cdots - x_n' \begin{bmatrix} s_{1\ r+1} \\ s_{2\ n} \\ \vdots \\ s_{r\ n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Czy rozpoznajesz w powyższym wyrażeniu rozwiązania równania jednorodnego stowarzyszonego z wyjściowym układem.

Jeśli tak, to zauważysz, że obserwacja uczyniona w przykładach na początku tego wykładu nie była przypadkowa. Umiesz ją sformułować w tym ogólnym przypadku?

Fakt

Dowolne rozwiązanie układu równań liniowych jest sumą jednego rozwiazania tego równania oraz dowolnego rozwiązania równania jednorodnego stowarzyszonego z danym układem.

Prześledźmy tą metodę na przykładach.

Zadanie

Rozwiąż układ równań liniowych

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & t & = & -1 \\ 3x & + & 6y & + & 7z & + & t & = & 5 \\ 2x & + & 4y & + & 7z & - & 4t & = & -6 \end{array}\right. .$$

Prześledźmy tą metodę na przykładach.

Zadanie

Rozwiąż układ równań liniowych

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = -1 \\ 3x + 6y + 7z + t = 5 \\ 2x + 4y + 7z - 4t = -6 \end{cases}.$$

Najpierw budujemy macierz uzupełnioną tego układu

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & -4 & -6 \end{array}\right],$$

na której wykonywać będziemy operacje elementarne.

$$\left[\begin{array}{cccr|r} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & -4 & -6 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & -4 & -6 \end{array}\right]$$

Teraz mnożymy pierwszy wiersz przez -3 i dodajemy do drugiego wiersza, a następnie pierwszy wiersz mnożymy przez -2 i dodajemy do trzeciego wiersza.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & -4 & -6 \end{array}\right]$$

Teraz mnożymy pierwszy wiersz przez -3 i dodajemy do drugiego wiersza, a następnie pierwszy wiersz mnożymy przez -2 i dodajemy do trzeciego wiersza.
Nowa macierz ma postać

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & -4 & -6 \end{array}\right]$$

Teraz mnożymy pierwszy wiersz przez -3 i dodajemy do drugiego wiersza, a następnie pierwszy wiersz mnożymy przez -2 i dodajemy do trzeciego wiersza.
Nowa macierz ma postać

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

Następnie mnożymy trzeci wiersz przez 2 i dodajemy do drugiego wiersza otrzymując

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & -4 & -6 \end{array}\right]$$

Teraz mnożymy pierwszy wiersz przez -3 i dodajemy do drugiego wiersza, a następnie pierwszy wiersz mnożymy przez -2 i dodajemy do trzeciego wiersza.

Nowa macierz ma postać

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

Następnie mnożymy trzeci wiersz przez 2 i dodajemy do drugiego wiersza otrzymując

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

Drugi wiersz zawiera same zera, więc skreślamy go. Pozostaje macierz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

Zamieniamy drugą kolumnę z trzecią (pamietając, że w ten sposób należy zamienić niewiadomą y z niewiadomą z)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

Zamieniamy drugą kolumnę z trzecią (pamietając, że w ten sposób należy zamienić niewiadomą y z niewiadomą z)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

Jeśli teraz pomnożymy drugi wiersz przez -3 i dodamy do pierwszego wiersza, to otrzymamy

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

Zamieniamy drugą kolumnę z trzecią (pamietając, że w ten sposób należy zamienić niewiadomą y z niewiadomą z)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

Jeśli teraz pomnożymy drugi wiersz przez -3 i dodamy do pierwszego wiersza, to otrzymamy

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right].$$

Otrzymana macierz jest macierzą uzupełnioną układu

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & 2y & + & 5t & = & 11 \\ & & z & & & - & 2t & = & -4 \end{array}\right. .$$

$$\begin{cases} x & & + & 2y & + & 5t & = & 11 \\ & z & & & - & 2t & = & -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \quad\quad\; + \; 2y + 5t = 11 \\ \quad z \quad\quad\quad\; - \; 2t = -4 \end{cases}$$

Teraz pozostaje już tylko napisanie rozwiązań

$$\begin{cases} x = 11 - 2y - 5t \\ z = -4 + 2t \end{cases} \qquad y, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x & & + & 2y & + & 5t & = & 11 \\ & z & & & - & 2t & = & -4 \end{cases}$$

Teraz pozostaje już tylko napisanie rozwiązań

$$\begin{cases} x = 11 - 2y - 5t \\ z = -4 + 2t \end{cases} \qquad y, t \in \mathbb{R}$$

lub

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y, t \in \mathbb{R}$$

Pytanie

Czy każdy układ i w jaki sposób można sprowadzić do postaci zredukowanej?

Pytanie

Czy każdy układ i w jaki sposób można sprowadzić do postaci zredukowanej?

Prześledźmy to na kolejnych przykładach rozwiązanych na tablicy.

Pytanie

Czy każdy układ i w jaki sposób można sprowadzić do postaci zredukowanej?

Prześledźmy to na kolejnych przykładach rozwiązanych na tablicy.

Zad. 1.

Rozwiąż następujące układy równań:

$$\begin{cases} x + 6y - z = 0 \\ -x - 4y + 5z = 6 \\ 2x + 13y + 5z = 8 \\ 3x + 17y = 2 \end{cases},$$

Pytanie

Czy każdy układ i w jaki sposób można sprowadzić do postaci zredukowanej?

Prześledźmy to na kolejnych przykładach rozwiązanych na tablicy.

Zad. 1.

Rozwiąż następujące układy równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 6y & - & z & = & 0 \\ -x & - & 4y & + & 5z & = & 6 \\ 2x & + & 13y & + & 5z & = & 8 \\ 3x & + & 17y & & & = & 2 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & 2z & + & 2t & = & -2 \\ 5x & - & 3y & - & z & + & t & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & - & 2t & = & -4 \end{array}\right. .$$

Pytanie

Czy każdy układ i w jaki sposób można sprowadzić do postaci zredukowanej?

Prześledźmy to na kolejnych przykładach rozwiązanych na tablicy.

Zad. 1.

Rozwiąż następujące układy równań:

$$\begin{cases} x + 6y - z = 0 \\ -x - 4y + 5z = 6 \\ 2x + 13y + 5z = 8 \\ 3x + 17y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - y - 2z + 2t = -2 \\ 5x - 3y - z + t = 3 \\ 2x + y - z + t = 1 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = -4 \end{cases}.$$

Zad. 2.

W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ 5x + 2y - z = a \end{cases},$$

Pytanie

Czy każdy układ i w jaki sposób można sprowadzić do postaci zredukowanej?

Prześledźmy to na kolejnych przykładach rozwiązanych na tablicy.

Zad. 1.

Rozwiąż następujące układy równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 6y & - & z & = & 0 \\ -x & - & 4y & + & 5z & = & 6 \\ 2x & + & 13y & + & 5z & = & 8 \\ 3x & + & 17y & & & = & 2 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & 2z & + & 2t & = & -2 \\ 5x & - & 3y & - & z & + & t & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & - & 2t & = & -4 \end{array}\right. .$$

Zad. 2.

W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + 2y - z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ 5x + 2y - z = a \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ ax - y + 3z = 2 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{array}\right. .$$

Definicja

Minorem stopnia k macierzy $A \in K_n^n$ nazywamy wyznacznik utworzony z elementów macierzy A stojących na przecięciu k kolumn i k wierszy.

Definicja

Minorem stopnia k macierzy $A \in K_n^n$ nazywamy wyznacznik utworzony z elementów macierzy A stojących na przecięciu k kolumn i k wierszy.
Rzędem macierzy A nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.

Definicja

Minorem stopnia k macierzy $A \in K_n^n$ nazywamy wyznacznik utworzony z elementów macierzy A stojących na przecięciu k kolumn i k wierszy.
Rzędem macierzy A nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.
Oznaczamy go $r(A)$ lub $rz(A)$.

Definicja

Minorem stopnia k macierzy $A \in K_n^n$ nazywamy wyznacznik utworzony z elementów macierzy A stojących na przecięciu k kolumn i k wierszy.
Rzędem macierzy A nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.
Oznaczamy go $r(A)$ lub $rz(A)$.

Twierdzenie

Rząd macierzy nie ulega zmianie, jeśli:

- przestawimy dwa wiersze (dwie kolumny),

Definicja

Minorem stopnia k macierzy $A \in K_n^n$ nazywamy wyznacznik utworzony z elementów macierzy A stojących na przecięciu k kolumn i k wierszy.
Rzędem macierzy A nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.
Oznaczamy go $r(A)$ lub $rz(A)$.

Twierdzenie

Rząd macierzy nie ulega zmianie, jeśli:

- przestawimy dwa wiersze (dwie kolumny),
- wiersze (kolumny) pomnożymy przez liczby różne od zera,

Definicja

Minorem stopnia k macierzy $A \in K_n^n$ nazywamy wyznacznik utworzony z elementów macierzy A stojących na przecięciu k kolumn i k wierszy.
Rzędem macierzy A nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.
Oznaczamy go $r(A)$ lub $rz(A)$.

Twierdzenie

Rząd macierzy nie ulega zmianie, jeśli:

- przestawimy dwa wiersze (dwie kolumny),
- wiersze (kolumny) pomnożymy przez liczby różne od zera,
- wykreślimy wiersz (kolumnę) zerowy,

Definicja

Minorem stopnia k macierzy $A \in K_n^n$ nazywamy wyznacznik utworzony z elementów macierzy A stojących na przecięciu k kolumn i k wierszy.
Rzędem macierzy A nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.
Oznaczamy go $r(A)$ lub $rz(A)$.

Twierdzenie

Rząd macierzy nie ulega zmianie, jeśli:

- przestawimy dwa wiersze (dwie kolumny),
- wiersze (kolumny) pomnożymy przez liczby różne od zera,
- wykreślimy wiersz (kolumnę) zerowy,
- do jednego wiersza (kolumny) dodamy inne wiersze (kolumny) pomnożone przez dowolne liczby.

Definicja

Minorem stopnia k macierzy $A \in K_n^n$ nazywamy wyznacznik utworzony z elementów macierzy A stojących na przecięciu k kolumn i k wierszy.
Rzędem macierzy A nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.
Oznaczamy go $r(A)$ lub $rz(A)$.

Twierdzenie

Rząd macierzy nie ulega zmianie, jeśli:

- przestawimy dwa wiersze (dwie kolumny),
- wiersze (kolumny) pomnożymy przez liczby różne od zera,
- wykreślimy wiersz (kolumnę) zerowy,
- do jednego wiersza (kolumny) dodamy inne wiersze (kolumny) pomnożone przez dowolne liczby.

Definicja

Minorem stopnia k macierzy $A \in K_n^n$ nazywamy wyznacznik utworzony z elementów macierzy A stojących na przecięciu k kolumn i k wierszy.
Rzędem macierzy A nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.
Oznaczamy go $r(A)$ lub $rz(A)$.

Twierdzenie

Rząd macierzy nie ulega zmianie, jeśli:

- przestawimy dwa wiersze (dwie kolumny),
- wiersze (kolumny) pomnożymy przez liczby różne od zera,
- wykreślimy wiersz (kolumnę) zerowy,
- do jednego wiersza (kolumny) dodamy inne wiersze (kolumny) pomnożone przez dowolne liczby.

Kilka przykładów na tablicy

Twierdzenie (Kroneckera- Capellego)

Jeżeli A jest macierzą współczynników układu równań liniowych $AX = B$, a $[A|B]$ jest jego macierzą uzupełnioną, to układ ten posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r([A|B])$.

Twierdzenie (Kroneckera- Capellego)

Jeżeli A jest macierzą współczynników układu równań liniowych $AX = B$, a $[A|B]$ jest jego macierzą uzupełnioną, to układ ten posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r([A|B])$.

Fakt

Niech $AX = B$ będzie układem równań liniowych o n niewiadomych. Wtedy:

- jeśli $r(A) \neq r([A|B]$, to układ nie posiada rozwiązania,
- jeśli $r(A) = r([A|B[) = n$, to układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie,
- jeśli $r(A) = r([A|B[) = r < n$, to układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów.

Metoda wyznacznikowa rozwiązywania układu równań liniowych:

1. Sprawdzamy czy układ posiada rozwiązanie. Jeśli "tak", to
2. Znajdujemy "podmacierz" C, której wyznacznik decyduje o rzędzie.
3. Wykreślamy równania "rozłączne" z tą podmacierzą C.
4. Zmienne "rozłączne" z C przenosimy na prawą stronę.
5. Rozwiązujemy otrzymany układ (np. stosujemy wzory Cramera).

Metoda wyznacznikowa rozwiązywania układu równań liniowych:

1. Sprawdzamy czy układ posiada rozwiązanie. Jeśli "tak", to
2. Znajdujemy "podmacierz" C, której wyznacznik decyduje o rzędzie.
3. Wykreślamy równania "rozłączne" z tą podmacierzą C.
4. Zmienne "rozłączne" z C przenosimy na prawą stronę.
5. Rozwiązujemy otrzymany układ (np. stosujemy wzory Cramera).

Przykład

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 11 & 2 \\ 5 & -4 & 11 & 9 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 28 & 5 \end{array}\right]$$

Metoda wyznacznikowa rozwiązywania układu równań liniowych:

1. Sprawdzamy czy układ posiada rozwiązanie. Jeśli "tak", to
2. Znajdujemy "podmacierz" C, której wyznacznik decyduje o rzędzie.
3. Wykreślamy równania "rozłączne" z tą podmacierzą C.
4. Zmienne "rozłączne" z C przenosimy na prawą stronę.
5. Rozwiązujemy otrzymany układ (np. stosujemy wzory Cramera).

Przykład

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 11 & 2 \\ 5 & -4 & 11 & 9 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 28 & 5 \end{array}\right] \qquad r(A) = r([A|B]) = 2.$$

Rozwiązujemy na tablicy.

♡♡♡

Życzę powodzenia przy rozwiązywaniu

układów równań i dziękuję za uwagę