Wykład 5
Ciało liczb zespolonych

Andrzej Sładek
sladek@ux2.math.us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Wykład jest przewidziany na 2-3 godziny lekcyjne

Wykład jest przewidziany na 2-3 godziny lekcyjne

Tematy poruszane na wykładzie można znaleźć w:

Wykład jest przewidziany na 2-3 godziny lekcyjne

Tematy poruszane na wykładzie można znaleźć w:

- A. Białynicki-Birula, *Algebra*, Bibl. Mat. 40, PWN 2009, [rozdz. III]
- A.I. Kostrykin, *Wstęp do algebry, t. I*, PWN 2004, [rozdz. V, §1]

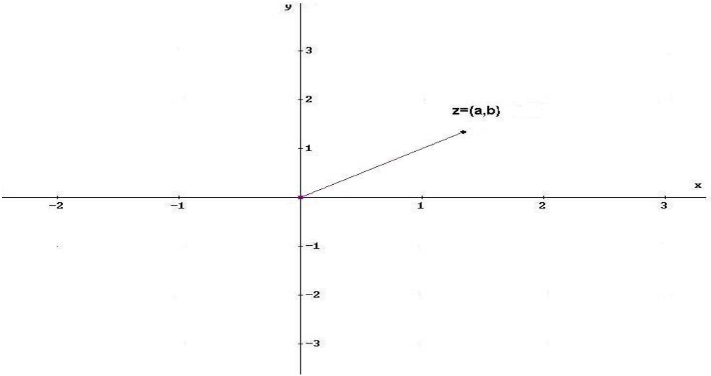
Niech

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Elementy zbioru $\mathbb{C}$ nazywamy **liczbami zespolonymi**.

Niech
$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$
Elementy zbioru $\mathbb{C}$ nazywamy **liczbami zespolonymi**.

Liczby zespolone możemy interpretować jako punkty na płaszczyźnie lub wektory zaczepione w początku układu współrzędnych.



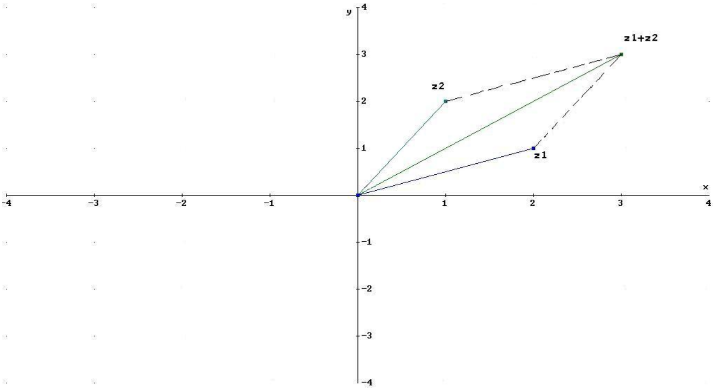
W zbiorze $\mathbb{C}$ wprowadzamy działanie dodawania:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

W zbiorze $\mathbb{C}$ wprowadzamy działanie dodawania:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Na rysunku wygląda to następująco:



$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Łatwo zauważyć, że:

- dodawanie jest łączne,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Łatwo zauważyć, że:

- dodawanie jest łączne,
- dodawanie jest przemienne,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Łatwo zauważyć, że:

- dodawanie jest łączne,
- dodawanie jest przemienne,
- $(0, 0)$ jest elementem neutralnym dodawania,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Łatwo zauważyć, że:

- dodawanie jest łączne,
- dodawanie jest przemienne,
- $(0, 0)$ jest elementem neutralnym dodawania,
- $(-a, -b)$ jest elementem przeciwnym do (a, b).

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Łatwo zauważyć, że:

- dodawanie jest łączne,
- dodawanie jest przemienne,
- $(0, 0)$ jest elementem neutralnym dodawania,
- $(-a, -b)$ jest elementem przeciwnym do (a, b).

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

Łatwo zauważyć, że:

- dodawanie jest łączne,
- dodawanie jest przemienne,
- $(0,0)$ jest elementem neutralnym dodawania,
- $(-a,-b)$ jest elementem przeciwnym do (a,b).

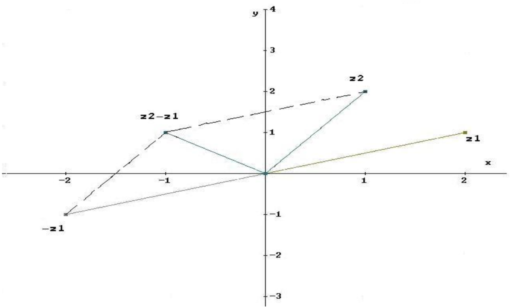
Zatem $\mathbb{C}$ z działaniem dodawania jest grupą.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Łatwo zauważyć, że:

- dodawanie jest łączne,
- dodawanie jest przemienne,
- $(0, 0)$ jest elementem neutralnym dodawania,
- $(-a, -b)$ jest elementem przeciwnym do (a, b).

Zatem $\mathbb{C}$ z działaniem dodawania jest grupą. Odejmowanie w tej grupie możemy zinterpretować na rysunku następująco:



Liczby zespolone mnożymy zgodnie z regułą:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Interpretacja geometryczna tego działania jest trudniejsza - będzie później.

Liczby zespolone mnożymy zgodnie z regułą:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Interpretacja geometryczna tego działania jest trudniejsza - będzie później.

Mnożenie jest:

- działanie mnożenia jest łączne,

Liczby zespolone mnożymy zgodnie z regułą:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Interpretacja geometryczna tego działania jest trudniejsza - będzie później.

Mnożenie jest:

- działanie mnożenia jest łączne,
- działanie mnożenia jest przemienne,

Liczby zespolone mnożymy zgodnie z regułą:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Interpretacja geometryczna tego działania jest trudniejsza - będzie później.

Mnożenie jest:

- działanie mnożenia jest łączne,
- działanie mnożenia jest przemienne,
- $(1, 0)$ jest elementem neutralnym mnożenia,

Liczby zespolone mnożymy zgodnie z regułą:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Interpretacja geometryczna tego działania jest trudniejsza - będzie później.

Mnożenie jest:

- działanie mnożenia jest łączne,
- działanie mnożenia jest przemienne,
- $(1, 0)$ jest elementem neutralnym mnożenia,
- każdy element $(a, b) \neq (0, 0)$ ma element odwrotny,

Liczby zespolone mnożymy zgodnie z regułą:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Interpretacja geometryczna tego działania jest trudniejsza - będzie później.

Mnożenie jest:

- działanie mnożenia jest łączne,
- działanie mnożenia jest przemienne,
- $(1, 0)$ jest elementem neutralnym mnożenia,
- każdy element $(a, b) \neq (0, 0)$ ma element odwrotny,
- działanie mnożenia jest rozdzielne względem dodawania.

Liczby zespolone mnożymy zgodnie z regułą:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Interpretacja geometryczna tego działania jest trudniejsza - będzie później.

Mnożenie jest:

- działanie mnożenia jest łączne,
- działanie mnożenia jest przemienne,
- $(1, 0)$ jest elementem neutralnym mnożenia,
- każdy element $(a, b) \neq (0, 0)$ ma element odwrotny,
- działanie mnożenia jest rozdzielne względem dodawania.

Liczby zespolone mnożymy zgodnie z regułą:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Interpretacja geometryczna tego działania jest trudniejsza - będzie później.

Mnożenie jest:

- działanie mnożenia jest łączne,
- działanie mnożenia jest przemienne,
- $(1, 0)$ jest elementem neutralnym mnożenia,
- każdy element $(a, b) \neq (0, 0)$ ma element odwrotny,
- działanie mnożenia jest rozdzielne względem dodawania.

Nietrudno zauważyć przemienność.

Liczby zespolone mnożymy zgodnie z regułą:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Interpretacja geometryczna tego działania jest trudniejsza - będzie później.

Mnożenie jest:

- działanie mnożenia jest łączne,
- działanie mnożenia jest przemienne,
- $(1, 0)$ jest elementem neutralnym mnożenia,
- każdy element $(a, b) \neq (0, 0)$ ma element odwrotny,
- działanie mnożenia jest rozdzielne względem dodawania.

Nietrudno zauważyć przemienność.
Neutralność $(1, 0)$:

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b).$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Łączność mnożenia:

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)=$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Łączność mnożenia:

$$((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) =$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Łączność mnożenia:

$$((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) =$$

$$= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) =$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Łączność mnożenia:

$$((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) =$$

$$= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) =$$

$$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) =$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Łączność mnożenia:

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)=(ac-bd,ad+bc)\cdot(e,f)=$$

$$=((ac-bd)e-(ad+bc)f,(ac-bd)f+(ad+bc)e)=$$

$$=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)=$$

$$=(a(ce-df)-b(cf+de),a(cf+de)+b(ce-df))=$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Łączność mnożenia:

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)=(ac-bd,ad+bc)\cdot(e,f)=$$

$$=((ac-bd)e-(ad+bc)f,(ac-bd)f+(ad+bc)e)=$$

$$=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)=$$

$$=(a(ce-df)-b(cf+de),a(cf+de)+b(ce-df))=$$

$$=(a,b)\cdot(ce-df,cf+de)=$$

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

Łączność mnożenia:

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f) = (ac-bd, ad+bc)\cdot(e,f) =$$

$$= ((ac-bd)e-(ad+bc)f, (ac-bd)f+(ad+bc)e) =$$

$$= (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce) =$$

$$= (a(ce-df)-b(cf+de), a(cf+de)+b(ce-df)) =$$

$$= (a,b)\cdot(ce-df, cf+de) = (a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Łączność mnożenia:

$$((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) =$$

$$= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) =$$

$$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) =$$

$$= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) =$$

$$= (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f))$$

Element odwrotny (czyli dzielenie przez element $\neq (0, 0)$):

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) =$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Łączność mnożenia:

$$((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) =$$

$$= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) =$$

$$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) =$$

$$= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) =$$

$$= (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f))$$

Element odwrotny (czyli dzielenie przez element $\neq (0, 0)$):

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{-b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ba}{a^2 + b^2} \right)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Łączność mnożenia:

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)=(ac-bd,ad+bc)\cdot(e,f)=$$

$$=((ac-bd)e-(ad+bc)f,(ac-bd)f+(ad+bc)e)=$$

$$=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)=$$

$$=(a(ce-df)-b(cf+de),a(cf+de)+b(ce-df))=$$

$$=(a,b)\cdot(ce-df,cf+de)=(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))$$

Element odwrotny (czyli dzielenie przez element $\neq(0,0)$):

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{-b^2}{a^2+b^2},\frac{-ab}{a^2+b^2}+\frac{ba}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Łączność mnożenia:

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f)=(ac-bd,ad+bc)\cdot(e,f)=$$

$$=((ac-bd)e-(ad+bc)f,(ac-bd)f+(ad+bc)e)=$$

$$=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)=$$

$$=(a(ce-df)-b(cf+de),a(cf+de)+b(ce-df))=$$

$$=(a,b)\cdot(ce-df,cf+de)=(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))$$

Element odwrotny (czyli dzielenie przez element $\neq(0,0)$):

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{-b^2}{a^2+b^2},\frac{-ab}{a^2+b^2}+\frac{ba}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

Zatem jeśli $(a,b)\neq(0,0)$, to

$$(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Rozdzielność mnożenia względem dodawania proszę sprawdzić we własnym zakresie.

Rozdzielność mnożenia względem dodawania proszę sprawdzić we własnym zakresie.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{C}$ z działaniami dodawania i mnożenia oraz wyróżnionymi elementami $(0,0)$ i $(1,0)$ jest ciałem.

Rozdzielność mnożenia względem dodawania proszę sprawdzić we własnym zakresie.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{C}$ z działaniami dodawania i mnożenia oraz wyróżnionymi elementami $(0,0)$ i $(1,0)$ jest ciałem.
Podzbiór
$$\mathbb{R}' = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$$
jest podciałem ciała $\mathbb{C}$ izomorficznym z ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Rozdzielność mnożenia względem dodawania proszę sprawdzić we własnym zakresie.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{C}$ z działaniami dodawania i mnożenia oraz wyróżnionymi elementami $(0,0)$ i $(1,0)$ jest ciałem.
Podzbiór
$$\mathbb{R}' = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$$
jest podciałem ciała $\mathbb{C}$ izomorficznym z ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Dowód. Pierwszą część sprawdziliśmy wcześniej.

Rozdzielność mnożenia względem dodawania proszę sprawdzić we własnym zakresie.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{C}$ z działaniami dodawania i mnożenia oraz wyróżnionymi elementami $(0,0)$ i $(1,0)$ jest ciałem.
Podzbiór
$$\mathbb{R}' = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$$
jest podciałem ciała $\mathbb{C}$ izomorficznym z ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Dowód. Pierwszą część sprawdziliśmy wcześniej.

Drugą część sprawdzimy na tablicy. ¶

Rozdzielność mnożenia względem dodawania proszę sprawdzić we własnym zakresie.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{C}$ z działaniami dodawania i mnożenia oraz wyróżnionymi elementami $(0,0)$ i $(1,0)$ jest ciałem.
Podzbiór

$$\mathbb{R}' = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$$

jest podciałem ciała $\mathbb{C}$ izomorficznym z ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

Dowód. Pierwszą część sprawdziliśmy wcześniej.

Drugą część sprawdzimy na tablicy. ¶

Ze względu na drugą część tezy powyższego twierdzenia możemy zamiast pary $(a,0)$ pisać po prostu a.

Przyjmijmy oznaczenie

$$i = (0, 1).$$

Zauważmy, że

$$i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1,$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$i = (0, 1).$$

Zauważmy, że

$$i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1,$$

tzn.

$$\boxed{\mathbf{i} = \pm\sqrt{-\mathbf{1}}}$$

Przyjmijmy oznaczenie
$$i = (0, 1).$$
Zauważmy, że
$$i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1,$$
tzn.
$$\boxed{\mathbf{i} = \pm\sqrt{-1}}$$
Liczbę zespoloną $i = (0, 1)$ nazywamy jednostką urojoną.

Przy tak przyjętych umowach mamy
$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Od tego momentu liczbę zespoloną będziemy pisali w postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$,

Od tego momentu liczbę zespoloną będziemy pisali w postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, pamiętając jednak, że

$$a + bi = c + di \iff a = c, \ b = d.$$

Od tego momentu liczbę zespoloną będziemy pisali w postaci $a+bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, pamiętając jednak, że

$$a+bi = c+di \iff a=c,\ b=d.$$

Przy tak przyjętej umowie działania w $\mathbb{C}$ przyjmują postać:

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i,\\ (a+bi)\cdot(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i,\\ i^2 &= -1.\end{aligned}$$

Od tego momentu liczbę zespoloną będziemy pisali w postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, pamiętając jednak, że

$$a + bi = c + di \iff a = c, \ b = d.$$

Przy tak przyjętej umowie działania w $\mathbb{C}$ przyjmują postać:

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i, \\ (a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i, \\ i^2 &= -1. \end{aligned}$$

Wtedy też

$$a + bi \in \mathbb{R} \iff b = 0$$

Od tego momentu liczbę zespoloną będziemy pisali w postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, pamiętając jednak, że

$$a + bi = c + di \iff a = c,\ b = d.$$

Przy tak przyjętej umowie działania w $\mathbb{C}$ przyjmują postać:

$$\begin{aligned} (a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i, \\ (a+bi)\cdot(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i, \\ i^2 &= -1. \end{aligned}$$

Wtedy też

$$a + bi \in \mathbb{R} \iff b = 0$$

i ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ można uważać jako podciało ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

Definicja

Jeśli $z = a + bi$, to

Definicja

Jeśli $z = a + bi$, to

$\mathrm{re(z)} := \mathrm{a}$ nazywamy częścią rzeczywistą liczby z,

Definicja

Jeśli $z = a + bi$, to

$\mathrm{re}(z) := \mathrm{a}$ nazywamy częścią rzeczywistą liczby z,

$\mathrm{im}(z) := \mathrm{b}$ nazywamy częścią urojoną liczby z.

Definicja

Jeśli $z = a + bi$, to

$\mathrm{re(z)} := \mathrm{a}$ nazywamy częścią rzeczywistą liczby z,

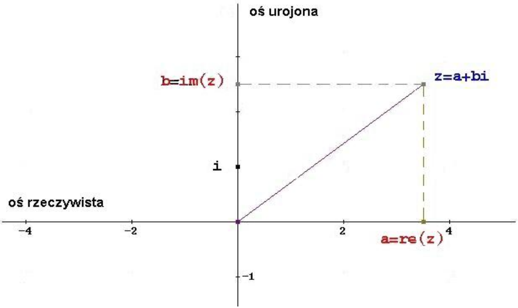
$\mathrm{im(z)} := \mathrm{b}$ nazywamy częścią urojoną liczby z.

Definicja

Jeśli $z = a + bi$, to

$\mathrm{re}(z) := \mathrm{a}$ nazywamy częścią rzeczywistą liczby z,

$\mathrm{im}(z) := \mathrm{b}$ nazywamy częścią urojoną liczby z.



Definicja

Niech $z = a + bi$.

Definicja

Niech $z = a + bi$.

Liczbą sprzężoną z liczbą z nazywamy liczbę $\overline{z} := a - bi$.

Definicja

Niech $z = a + bi$.

Liczbą sprzężoną z liczbą z nazywamy liczbę $\overline{z} := a - bi$.

Modułem liczby z nazywamy $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

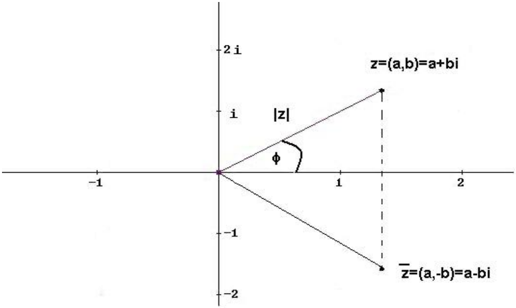
Definicja

Niech $z = a + bi$.

Liczbą sprzężoną z liczbą z nazywamy liczbę $\overline{z} := a - bi$.

Modułem liczby z nazywamy $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

Argumentem liczby z nazywamy kąt $\arg(z) := \phi$.



Mają miejsce następujące własności (*część z nich sprawdzimy na tablicy*):

Mają miejsce następujące własności (*część z nich sprawdzimy na tablicy*):

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Mają miejsce następujące własności (*część z nich sprawdzimy na tablicy*):

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

Mają miejsce następujące własności (*część z nich sprawdzimy na tablicy*):

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 - z_2} &= \overline{z_1} - \overline{z_2} \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\end{aligned}$$

Mają miejsce następujące własności (*część z nich sprawdzimy na tablicy*):

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Mają miejsce następujące własności (*część z nich sprawdzimy na tablicy*):

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Mają miejsce następujące własności (*część z nich sprawdzimy na tablicy*):

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Mają miejsce następujące własności (*część z nich sprawdzimy na tablicy*):

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

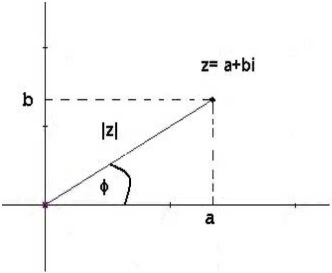
Mają miejsce następujące własności (*część z nich sprawdzimy na tablicy*):

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} \qquad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$



Jeśli liczba zespolona z jest różna od zera, to można ją zapisać w tzw. postaci trygonometrycznej:

$$z = a + bi = |z| \left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|} i \right) = |z| (\cos\phi + i \sin\phi)$$

Twierdzenie

Jeśli

$$z_1 = |z_1| \left(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1\right), \quad z_2 = |z_2| \left(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2\right),$$

to

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \left(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)\right).$$

Twierdzenie

Jeśli
$$z_1 = |z_1|\left(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1\right), \quad z_2 = |z_2|\left(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2\right),$$
to
$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)\right)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2)\right).$$

Dowód na tablicy.

Twierdzenie

Jeśli

$$z_1 = |z_1|\left(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1\right), \quad z_2 = |z_2|\left(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2\right),$$

to

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2)\right).$$

Dowód na tablicy.

Wniosek

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Twierdzenie

Jeśli

$$z_1 = |z_1|\left(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1\right), \quad z_2 = |z_2|\left(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2\right),$$

to

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)\right)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2)\right).$$

Dowód na tablicy.

Wniosek

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Wniosek (wzór Moivre'a)

$$\left(|z|\left(\cos\phi + i\sin\phi\right)\right)^n = |z|^n\left(\cos n\phi + i\sin n\phi\right)$$

Zadanie

Oblicz $(1+i)^{1443}$.

Zadanie

Oblicz $(1+i)^{1443}$.

Korzystając z postaci trygonometrycznej liczby $1+i$ oraz wzoru Moivre'a mamy

$$(1+i)^{1443}$$

Zadanie

Oblicz $(1+i)^{1443}$.

Korzystając z postaci trygonometrycznej liczby $1+i$ oraz wzoru Moivre'a mamy

$$(1+i)^{1443} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{1443}$$

Zadanie

Oblicz $(1+i)^{1443}$.

Korzystając z postaci trygonometrycznej liczby $1+i$ oraz wzoru Moivre'a mamy

$$(1+i)^{1443} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{1443} = 2^{\frac{1443}{2}}\left(\cos\frac{1443\pi}{4} + i\sin\frac{1443\pi}{4}\right) =$$

Zadanie

Oblicz $(1+i)^{1443}$.

Korzystając z postaci trygonometrycznej liczby $1+i$ oraz wzoru Moivre'a mamy

$$(1+i)^{1443} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{1443} = 2^{\frac{1443}{2}}\left(\cos\frac{1443\pi}{4} + i\sin\frac{1443\pi}{4}\right) =$$

$$= 2^{\frac{1443}{2}}\left(\cos\left(360\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(360\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Zadanie

Oblicz $(1+i)^{1443}$.

Korzystając z postaci trygonometrycznej liczby $1+i$ oraz wzoru Moivre'a mamy

$$(1+i)^{1443} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{1443} = 2^{\frac{1443}{2}}\left(\cos\frac{1443\pi}{4} + i\sin\frac{1443\pi}{4}\right) =$$

$$= 2^{\frac{1443}{2}}\left(\cos\left(360\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(360\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2^{\frac{1443}{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$

Zadanie

Oblicz $(1+i)^{1443}$.

Korzystając z postaci trygonometrycznej liczby $1+i$ oraz wzoru Moivre'a mamy

$$(1+i)^{1443} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{1443} = 2^{\frac{1443}{2}}\left(\cos\frac{1443\pi}{4} + i\sin\frac{1443\pi}{4}\right) =$$

$$= 2^{\frac{1443}{2}}\left(\cos\left(360\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(360\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2^{\frac{1443}{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= 2^{721}(-1+i).$$

Zauważ, że

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=1^3=1.$$

Zauważ, że

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1^3 = 1.$$

Zatem liczby $1, \ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ są rozwiązaniami równania $X^3 = 1$, tzn. są pierwiastkami trzeciego stopnia z 1.

Zauważ, że

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=1^3=1.$$

Zatem liczby $1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ są rozwiązaniami równania $X^3=1$, tzn. są pierwiastkami trzeciego stopnia z 1.

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby zespolonej $z\neq 0$ istnieje n różnych $n-$tego stopnia pierwiastków z z.

Zauważ, że

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=1^3=1.$$

Zatem liczby $1, \ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ są rozwiązaniami równania $X^3=1$, tzn. są pierwiastkami trzeciego stopnia z 1.

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby zespolonej $z \neq 0$ istnieje n różnych $n-$tego stopnia pierwiastków z z.

Dowód. Jeśli $|z|\,(\cos\phi + i\sin\phi)$, to

$$w_k=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right), \quad i=0,1,...,n-1,$$

są wszystkimi pierwiastkami $n-$tego stopnia z liczby z.

Zauważ, że
$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1^3 = 1.$$
Zatem liczby $1, \ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ są rozwiązaniami równania $X^3 = 1$, tzn. są pierwiastkami trzeciego stopnia z 1.

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby zespolonej $z \neq 0$ istnieje n różnych $n-$tego stopnia pierwiastków z z.

Dowód. Jeśli $|z|\left(\cos\phi + i\sin\phi\right)$, to
$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right), \ i = 0, 1, ..., n-1,$$
są wszystkimi pierwiastkami $n-$tego stopnia z liczby z.
Wystarczy sprawdzić (*zróbmy to na tablicy*), że
$$w_k^n = 1. \quad ¶$$

Przed chwilą przekonaliśmy się, że dla dowolnej liczby zespolonej z oraz dowolnej liczby naturalnej n równanie

$$X^n - z = 0$$

ma rozwiązanie w liczbach zespolonych.

Przed chwilą przekonaliśmy się, że dla dowolnej liczby zespolonej z oraz dowolnej liczby naturalnej n równanie

$$X^n - z = 0$$

ma rozwiązanie w liczbach zespolonych.

Prawdziwe jest dużo głębsze twierdzenie

Zasadnicze Twierdzenie Algebry

Dowolne równanie postaci

$$a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 = 0, \quad a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$$

ma rozwiązanie w liczbach zespolonych.

A teraz zadanie o charakterze geometrycznym.

A teraz zadanie o charakterze geometrycznym.

Zadanie

Wykazać równość

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2$$

i podać jej interpretację geometryczną.

A teraz zadanie o charakterze geometrycznym.

Zadanie

Wykazać równość

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

i podać jej interpretację geometryczną.

Równość sprawdzimy na ćwiczeniach,

A teraz zadanie o charakterze geometrycznym.

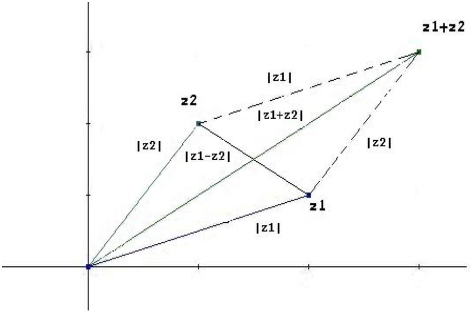
Zadanie

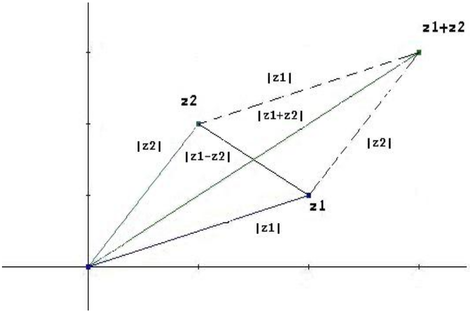
Wykazać równość

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2$$

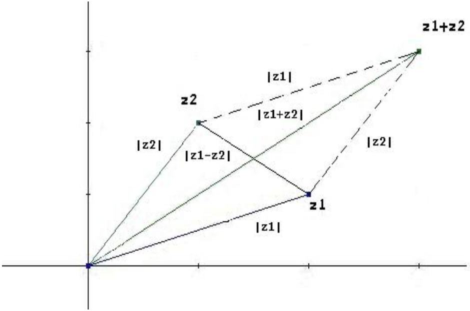
i podać jej interpretację geometryczną.

Równość sprawdzimy na ćwiczeniach, a interpretację geometryczną spróbujmy odczytać z rysunku:





$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$



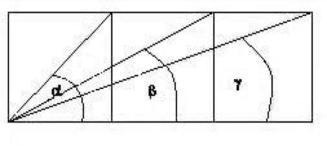
$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2$$

Twierdzenie

Suma kwadratów długości przekątnych w równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości boków tego równoległoboku.

Zadanie

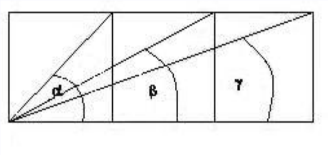
Rozwiążmy za pomocą liczb zespolonych jeszcze jedno zadanie o charakterze geometrycznym. Dane są trzy przystające kwadraty.



Pokaż, że $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Zadanie

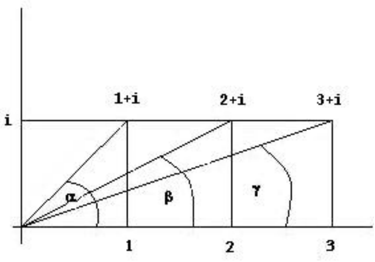
Rozwiążmy za pomocą liczb zespolonych jeszcze jedno zadanie o charakterze geometrycznym. Dane są trzy przystające kwadraty.



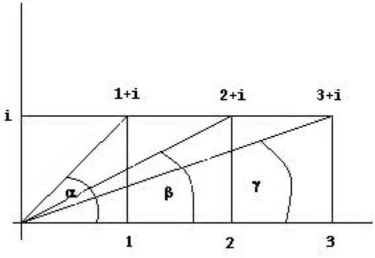
Pokaż, że $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Jak to zrobić najprościej?

Umieśćmy kwadraty na płaszczyźnie zespolonej.

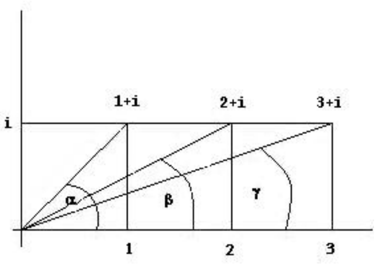


Umieśćmy kwadraty na płaszczyźnie zespolonej.



Sprawdź, że $(1 + i)(2 + i)(3 + i) = 10i$.

Umieśćmy kwadraty na płaszczyźnie zespolonej.

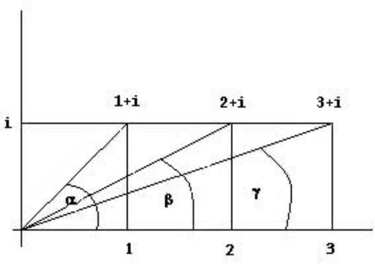


Sprawdź, że $(1+i)(2+i)(3+i) = 10i$.

Zatem

$$\alpha + \beta + \gamma$$

Umieśćmy kwadraty na płaszczyźnie zespolonej.

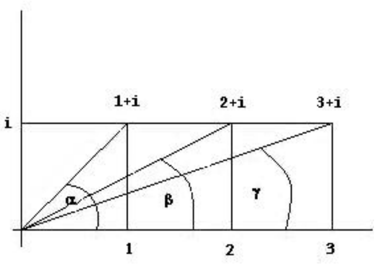


Sprawdź, że $(1+i)(2+i)(3+i) = 10i$.

Zatem

$$\alpha + \beta + \gamma = \arg(1+i) + \arg(2+i) + \arg(3+i) =$$

Umieśćmy kwadraty na płaszczyźnie zespolonej.



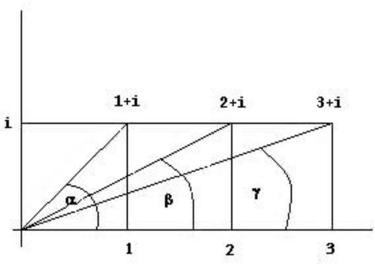
Sprawdź, że $(1+i)(2+i)(3+i) = 10i$.

Zatem

$$\alpha + \beta + \gamma = \arg(1+i) + \arg(2+i) + \arg(3+i) =$$

$$= \arg((1+i)(2+i)(3+i))$$

Umieśćmy kwadraty na płaszczyźnie zespolonej.



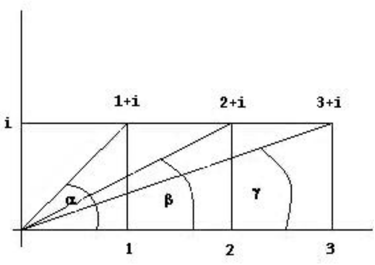
Sprawdź, że $(1+i)(2+i)(3+i) = 10i$.

Zatem

$$\alpha + \beta + \gamma = \arg(1+i) + \arg(2+i) + \arg(3+i) =$$

$$= \arg((1+i)(2+i)(3+i)) = \arg(10i)$$

Umieśćmy kwadraty na płaszczyźnie zespolonej.



Sprawdź, że $(1+i)(2+i)(3+i) = 10i$.

Zatem
$$\alpha + \beta + \gamma = \arg(1+i) + \arg(2+i) + \arg(3+i) =$$

$$= \arg((1+i)(2+i)(3+i)) = \arg(10i) = \frac{\pi}{2}.$$

To już koniec wykładu 5!

To już koniec wykładu 5!

♡♡♡

Dziękuję za uwagę