Wykład 2
Podstawowe struktury algebraiczne

Andrzej Sładek
sladek@ux2.math.us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Wykład jest przewidziany na 4-6 godzin lekcyjnych

Wykład jest przewidziany na 4-6 godzin lekcyjnych

Tematy poruszane na wykładzie można znaleźć w:

Wykład jest przewidziany na 4-6 godzin lekcyjnych

Tematy poruszane na wykładzie można znaleźć w:

- A. Białynicki-Birula, *Algebra*, Bibl. Mat. 40, PWN 2009, [rozdz. I, II, V, XI]
- A.I. Kostrykin, *Wstęp do algebry, t. I*, PWN 2004, [rozdz. IV]

Spójrzmy na własności działania dodawania w zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$

Spójrzmy na własności działania dodawania w zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$

$$a + b = b + a$$

Spójrzmy na własności działania dodawania w zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Spójrzmy na własności działania dodawania w zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Spójrzmy na własności działania dodawania w zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$

$$a+b=b+a$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

$$a+0=0+a=a$$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a+b=b+a=0$

Spójrzmy na własności działania dodawania w zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$

$a + b = b + a$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a + 0 = 0 + a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a + b = b + a = 0$

Spójrzmy na własności działania dodawania w zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$

$$a + b = b + a$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a + 0 = 0 + a = a$$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a + b = b + a = 0$

Powyższe prawa to

Spójrzmy na własności działania dodawania w zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a + b = b + a = 0$

Powyższe prawa to

prawo przemienności,

Spójrzmy na własności działania dodawania w zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$

$a + b = b + a$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a + 0 = 0 + a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a + b = b + a = 0$

Powyższe prawa to

prawo przemienności,

prawo łączności,

Spójrzmy na własności działania dodawania w zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$

$a + b = b + a$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a + 0 = 0 + a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a + b = b + a = 0$

Powyższe prawa to

prawo przemienności,

prawo łączności,

0 jest elementem neutralnym,

Spójrzmy na własności działania dodawania w zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$

$a + b = b + a$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a + 0 = 0 + a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a + b = b + a = 0$

Powyższe prawa to

prawo przemienności,

prawo łączności,

0 jest elementem neutralnym,

prawo istnienia elementu przeciwnego.

A teraz popatrzmy na własności działania mnożenia w zbiorze $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ liczb wymiernych różnych od zera.

A teraz popatrzmy na własności działania mnożenia w zbiorze $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ liczb wymiernych różnych od zera.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

A teraz popatrzmy na własności działania mnożenia w zbiorze $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ liczb wymiernych różnych od zera.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

A teraz popatrzmy na własności działania mnożenia w zbiorze $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ liczb wymiernych różnych od zera.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

A teraz popatrzmy na własności działania mnożenia w zbiorze $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ liczb wymiernych różnych od zera.

$a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ istnieje $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ takie, że $a \cdot b = b \cdot a = 1$

A teraz popatrzmy na własności działania mnożenia w zbiorze $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ liczb wymiernych różnych od zera.

$a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ istnieje $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ takie, że $a \cdot b = b \cdot a = 1$

A teraz popatrzmy na własności działania mnożenia w zbiorze $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ liczb wymiernych różnych od zera.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

dla każdego $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ istnieje $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ takie, że $a \cdot b = b \cdot a = 1$

Czy widzisz podobieństwo?

Porównajmy te własności

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a + b = b + a = 0$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

dla każdego $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ istnieje $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ takie, że $a \cdot b = b \cdot a = 1$

Porównajmy te własności

$a + b = b + a$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a + 0 = 0 + a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a + b = b + a = 0$

$a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ istnieje $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ takie, że $a \cdot b = b \cdot a = 1$

Porównajmy te własności

$a + b = b + a$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a + 0 = 0 + a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a + b = b + a = 0$

$a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ istnieje $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ takie, że $a \cdot b = b \cdot a = 1$

Porównajmy te własności

$a + b = b + a$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a + 0 = 0 + a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a + b = b + a = 0$

$a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ istnieje $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ takie, że $a \cdot b = b \cdot a = 1$

Porównajmy te własności

$a + b = b + a$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a + 0 = 0 + a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a + b = b + a = 0$

$a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ istnieje $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ takie, że $a \cdot b = b \cdot a = 1$

Porównajmy te własności

$a + b = b + a$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a + 0 = 0 + a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a + b = b + a = 0$

$a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ istnieje $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ takie, że $a \cdot b = b \cdot a = 1$

A jeśli zbiór liczb wymiernych lub wymiernych bez zera zastąpimy zbiorem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$?

Porównajmy te własności

$a + b = b + a$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a + 0 = 0 + a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a + b = b + a = 0$

$a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ istnieje $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ takie, że $a \cdot b = b \cdot a = 1$

A jeśli zbiór liczb wymiernych lub wymiernych bez zera zastąpimy zbiorem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$?

Które z praw nie zachodzi?

Porównajmy te własności

$a + b = b + a$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a + 0 = 0 + a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q}$ istnieje $b \in \mathbb{Q}$ takie, że $a + b = b + a = 0$

$a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

dla każdego $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ istnieje $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ takie, że $a \cdot b = b \cdot a = 1$

A jeśli zbiór liczb wymiernych lub wymiernych bez zera zastąpimy zbiorem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$?

Które z praw nie zachodzi?

Struktura algebraiczna

Struktura algebraiczna

Struktura algebraiczna

=

zbiór

Struktura algebraiczna

$$=$$

zbiór + działanie (działania)

Struktura algebraiczna

=

zbiór + działanie (działania) + prawa

Struktura algebraiczna

$=$

zbiór $+$ działanie (działania) $+$ prawa

Co to jest działanie?

Definicja

Działaniem w zbiorze A nazywamy przyporządkowanie, które każdej parze elementów a, b zbioru A przyporządkowuje element c należący do zbioru A nazywany wynikiem.

Definicja

Działaniem w zbiorze A nazywamy przyporządkowanie, które każdej parze elementów a, b zbioru A przyporządkowuje element c należący do zbioru A nazywany wynikiem.

Definicja

Działaniem w zbiorze A nazywamy przyporządkowanie, które każdej parze elementów a, b zbioru A przyporządkowuje element c należący do zbioru A nazywany wynikiem.

Na oznaczenie działania stosujemy różne znaki: $+$, $\cdot$, $*$, $\oplus$, $\odot$, ...

Definicja

Działaniem w zbiorze A nazywamy przyporządkowanie, które każdej parze elementów a, b zbioru A przyporządkowuje element c należący do zbioru A nazywany wynikiem.

Na oznaczenie działania stosujemy różne znaki: $+$, $\cdot$, $*$, $\oplus$, $\odot, \ldots$

Zatem działanie jest funkcją

$$* : A \times A \longrightarrow A, \quad (a, b) \longmapsto c = a * b \in A$$

Element $a * b$ nazywamy wynikiem działania $*$ na elementach a i b

Definicja

Działaniem w zbiorze A nazywamy przyporządkowanie, które każdej parze elementów a, b zbioru A przyporządkowuje element c należący do zbioru A nazywany wynikiem.

Na oznaczenie działania stosujemy różne znaki: $+$, $\cdot$, $*$, $\oplus$, $\odot$, ...

Zatem działanie jest funkcją

$$* : A \times A \longrightarrow A, \quad (a, b) \longmapsto c = a * b \in A$$

Element $a * b$ nazywamy wynikiem działania $*$ na elementach a i b

Widzisz, że dodawanie i mnożenie w zbiorze liczb wymiernych oraz w zbiorze liczb całkowitych są działaniami.

Definicja

Działaniem w zbiorze A nazywamy przyporządkowanie, które każdej parze elementów a, b zbioru A przyporządkowuje element c należący do zbioru A nazywany wynikiem.

Na oznaczenie działania stosujemy różne znaki: $+,\ \cdot,\ *,\ \oplus,\ \odot, \ldots$

Zatem działanie jest funkcją

$$*: A \times A \longrightarrow A, \quad (a, b) \longmapsto c = a * b \in A$$

Element $a * b$ nazywamy wynikiem działania $*$ na elementach a i b

Widzisz, że dodawanie i mnożenie w zbiorze liczb wymiernych oraz w zbiorze liczb całkowitych są działaniami.

A inne przykłady?

Które z poniższych są działaniami? Znasz odpowiedź?

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $\quad a \oplus b := a + b + 1$

Które z poniższych są działaniami? Znasz odpowiedź?

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \oplus b := a + b + 1$ TAK

Które z poniższych są działaniami? Znasz odpowiedź?

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \oplus b := a + b + 1$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \odot b := a \cdot b + a + b$

Które z poniższych są działaniami? Znasz odpowiedź?

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \oplus b := a + b + 1$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \odot b := a \cdot b + a + b$ TAK

Które z poniższych są działaniami? Znasz odpowiedź?

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \oplus b := a + b + 1$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \odot b := a \cdot b + a + b$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \div b := \frac{a}{b-1}$

Które z poniższych są działaniami? Znasz odpowiedź?

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \oplus b := a + b + 1$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \odot b := a \cdot b + a + b$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \div b := \frac{a}{b-1}$ NIE

Które z poniższych są działaniami? Znasz odpowiedź?

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \oplus b := a + b + 1$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \odot b := a \cdot b + a + b$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \div b := \frac{a}{b-1}$

$A = \mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych, $a \star b := a^b$

Które z poniższych są działaniami? Znasz odpowiedź?

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \oplus b := a + b + 1$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \odot b := a \cdot b + a + b$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \div b := \frac{a}{b-1}$

$A = \mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych, $a \star b := a^b$ TAK

Które z poniższych są działaniami? Znasz odpowiedź?

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \oplus b := a + b + 1$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \odot b := a \cdot b + a + b$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \div b := \frac{a}{b-1}$

$A = \mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych, $a \star b := a^b$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a * b := \sqrt{a^2 + b^2}$

Które z poniższych są działaniami? Znasz odpowiedź?

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \oplus b := a + b + 1$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \odot b := a \cdot b + a + b$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \div b := \frac{a}{b-1}$

$A = \mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych, $a \star b := a^b$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a * b := \sqrt{a^2 + b^2}$ NIE

Które z poniższych są działaniami? Znasz odpowiedź?

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \oplus b := a + b + 1$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \odot b := a \cdot b + a + b$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \div b := \frac{a}{b-1}$

$A = \mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych, $a \star b := a^b$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a * b := \sqrt{a^2 + b^2}$

$A = \mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych, $a * b := \sqrt[3]{a^3 + b^3}$

Które z poniższych są działaniami? Znasz odpowiedź?

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \oplus b := a + b + 1$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \odot b := a \cdot b + a + b$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \div b := \frac{a}{b-1}$

$A = \mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych, $a \star b := a^b$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a * b := \sqrt{a^2 + b^2}$

$A = \mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych, $a * b := \sqrt[3]{a^3 + b^3}$ TAK

Które z poniższych są działaniami? Znasz odpowiedź?

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \oplus b := a + b + 1$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \odot b := a \cdot b + a + b$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a \div b := \frac{a}{b-1}$

$A = \mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych, $a \star b := a^b$

$A = \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $a * b := \sqrt{a^2 + b^2}$

$A = \mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych, $a * b := \sqrt[3]{a^3 + b^3}$

Działanie $*$ w zbiorze A nazywamy

Działanie $*$ w zbiorze A nazywamy

przemiennym, jeśli

Działanie $*$ w zbiorze A nazywamy

przemiennym, jeśli $a * b = b * a$ dla każdych $a, b \in A$

Działanie $*$ w zbiorze A nazywamy

przemiennym, jeśli $a * b = b * a$ dla każdych $a, b \in A$

łącznym, jeśli

Działanie $*$ w zbiorze A nazywamy

przemiennym, jeśli $a * b = b * a$ dla każdych $a, b \in A$

łącznym, jeśli $a * (b * c) = (a * b) * c$ dla każdych $a, b, c \in A$

Działanie $*$ w zbiorze A nazywamy

przemiennym, jeśli $a * b = b * a$ dla każdych $a, b \in A$

łącznym, jeśli $a * (b * c) = (a * b) * c$ dla każdych $a, b, c \in A$

posiadającym element neutralny e, jeśli

Działanie $*$ w zbiorze A nazywamy

- **przemiennym**, jeśli $a * b = b * a$ dla każdych $a, b \in A$
- **łącznym**, jeśli $a * (b * c) = (a * b) * c$ dla każdych $a, b, c \in A$
- **posiadającym element neutralny** e, jeśli

$$a * e = e * a = a \quad \text{dla każdego} \quad a \in A$$

Działanie $*$ w zbiorze A nazywamy

przemiennym, jeśli $a * b = b * a$ dla każdych $a, b \in A$

łącznym, jeśli $a * (b * c) = (a * b) * c$ dla każdych $a, b, c \in A$

posiadającym element neutralny e, jeśli

$$a * e = e * a = a \quad \text{dla każdego} \quad a \in A$$

Mówimy również, że

$a \in A$ **posiada element przeciwny (odwrotny) względem** $*$, jeśli

Działanie $*$ w zbiorze A nazywamy

przemiennym, jeśli $a * b = b * a$ dla każdych $a, b \in A$

łącznym, jeśli $a * (b * c) = (a * b) * c$ dla każdych $a, b, c \in A$

posiadającym element neutralny e, jeśli

$$a * e = e * a = a \quad \text{dla każdego} \quad a \in A$$

Mówimy również, że

$a \in A$ **posiada element przeciwny (odwrotny) względem** $*$, jeśli

$$\text{istnieje } b \in A \text{ taki, że } a * b = b * a = e,$$

gdzie e jest elementem neutralnym.

Sprawdźmy jakie własności posiada działanie w $\mathbb{Q}$ określone następująco:
$a \oplus b := a + b + 1$.

Sprawdźmy jakie własności posiada działanie w $\mathbb{Q}$ określone następująco: $a \oplus b := a + b + 1$.

Zachodzi przemienność, bo

$$a \oplus b = a + b + 1$$

Sprawdźmy jakie własności posiada działanie w $\mathbb{Q}$ określone następująco: $a \oplus b := a + b + 1$.

Zachodzi przemienność, bo

$$a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a$$

Sprawdźmy jakie własności posiada działanie w $\mathbb{Q}$ określone następująco: $a \oplus b := a + b + 1$.

Zachodzi przemienność, bo

$$a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a$$

Zachodzi łączność, bo

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c + 1)$$

Sprawdźmy jakie własności posiada działanie w $\mathbb{Q}$ określone następująco:
$a \oplus b := a + b + 1$.

Zachodzi przemienność, bo

$$a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a$$

Zachodzi łączność, bo

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1$$

Sprawdźmy jakie własności posiada działanie w $\mathbb{Q}$ określone następująco: $a \oplus b := a + b + 1$.

Zachodzi przemienność, bo

$$a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a$$

Zachodzi łączność, bo

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1 = (a + b + 1) + c + 1$$

Sprawdźmy jakie własności posiada działanie w $\mathbb{Q}$ określone następująco:
$a \oplus b := a + b + 1$.

Zachodzi przemienność, bo

$$a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a$$

Zachodzi łączność, bo

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1 = (a + b + 1) + c + 1 = (a \oplus b) \oplus c$$

Sprawdźmy jakie własności posiada działanie w $\mathbb{Q}$ określone następująco: $a \oplus b := a + b + 1$.

Zachodzi przemienność, bo

$$a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a$$

Zachodzi łączność, bo

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1 = (a + b + 1) + c + 1 = (a \oplus b) \oplus c$$

Elementem neutralnym jest $e = -1$, bo

$$a \oplus e = a \iff a + e + 1 = a$$

Sprawdźmy jakie własności posiada działanie w $\mathbb{Q}$ określone następująco: $a \oplus b := a + b + 1$.

Zachodzi przemienność, bo

$$a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a$$

Zachodzi łączność, bo

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1 = (a + b + 1) + c + 1 = (a \oplus b) \oplus c$$

Elementem neutralnym jest $e = -1$, bo

$$a \oplus e = a \Leftrightarrow a + e + 1 = a \Leftrightarrow e = -1$$

Sprawdźmy jakie własności posiada działanie w $\mathbb{Q}$ określone następująco:
$a \oplus b := a + b + 1$.

Zachodzi przemienność, bo

$$a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a$$

Zachodzi łączność, bo

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1 = (a + b + 1) + c + 1 = (a \oplus b) \oplus c$$

Elementem neutralnym jest $e = -1$, bo

$$a \oplus e = a \Leftrightarrow a + e + 1 = a \Leftrightarrow e = -1$$

Elementem przeciwnym do a jest $b = -a - 2$, bo

$$a \oplus (-a - 2) = a + (-a - 2) + 1$$

Sprawdźmy jakie własności posiada działanie w $\mathbb{Q}$ określone następująco:
$a \oplus b := a + b + 1$.

Zachodzi przemienność, bo

$$a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a$$

Zachodzi łączność, bo

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1 = (a + b + 1) + c + 1 = (a \oplus b) \oplus c$$

Elementem neutralnym jest $e = -1$, bo

$$a \oplus e = a \Leftrightarrow a + e + 1 = a \Leftrightarrow e = -1$$

Elementem przeciwnym do a jest $b = -a - 2$, bo

$$a \oplus (-a - 2) = a + (-a - 2) + 1 = -1 = e$$

Niestety nie wszystkie działania mają "porządne" własności,

Niestety nie wszystkie działania mają "porządne" własności, np. działanie $a \star b := a^b$ w zbiorze liczb naturalnych

nie jest przemienne, bo
$2 \star 1 = 2^1 = 2$ podczas, gdy $1 \star 2 = 1^2 = 1$

Niestety nie wszystkie działania mają "porządne" własności, np. działanie $a \star b := a^b$ w zbiorze liczb naturalnych

nie jest przemienne, bo
$2 \star 1 = 2^1 = 2$ podczas, gdy $1 \star 2 = 1^2 = 1$

nie jest łączne, bo
$2 \star (1 \star 2) = 2$ podczas, gdy $(2 \star 1) \star 2 = 4$

Niestety nie wszystkie działania mają "porządne" własności, np. działanie $a \star b := a^b$ w zbiorze liczb naturalnych

nie jest przemienne, bo
$2 \star 1 = 2^1 = 2$ podczas, gdy $1 \star 2 = 1^2 = 1$

nie jest łączne, bo
$2 \star (1 \star 2) = 2$ podczas, gdy $(2 \star 1) \star 2 = 4$

nie posiada elementu neutralnego, bo nie istnieje $e \in \mathbb{N}$ taki, że $a \star e = e \star a = a$ dla każdego $a \in \mathbb{N}$;

Niestety nie wszystkie działania mają "porządne" własności, np. działanie $a \star b := a^b$ w zbiorze liczb naturalnych

nie jest przemienne, bo
$2 \star 1 = 2^1 = 2$ podczas, gdy $1 \star 2 = 1^2 = 1$

nie jest łączne, bo
$2 \star (1 \star 2) = 2$ podczas, gdy $(2 \star 1) \star 2 = 4$

nie posiada elementu neutralnego, bo nie istnieje $e \in \mathbb{N}$ taki, że $a \star e = e \star a = a$ dla każdego $a \in \mathbb{N}$;

Niestety nie wszystkie działania mają "porządne" własności, np. działanie $a \star b := a^b$ w zbiorze liczb naturalnych

nie jest przemienne, bo
$2 \star 1 = 2^1 = 2$ podczas, gdy $1 \star 2 = 1^2 = 1$

nie jest łączne, bo
$2 \star (1 \star 2) = 2$ podczas, gdy $(2 \star 1) \star 2 = 4$

nie posiada elementu neutralnego, bo nie istnieje $e \in \mathbb{N}$ taki, że $a \star e = e \star a = a$ dla każdego $a \in \mathbb{N}$; gdyby istniał, to dla $a = 2$ mielibyśmy

$$2 \star e = 2^e = 2, \; e \star 2 = e^2 = 2$$

co nie jest możliwe.

Definicja

Zbiór G z działaniem $*$ oraz wyróżnionym elementem e nazywamy **grupą**, jeśli

Definicja

Zbiór G z działaniem $*$ oraz wyróżnionym elementem e nazywamy **grupą**, jeśli

- działanie jest łączne

Definicja

Zbiór G z działaniem $*$ oraz wyróżnionym elementem e nazywamy **grupą**, jeśli

- działanie jest łączne
- e jest elementem neutralnym

Definicja

Zbiór G z działaniem $*$ oraz wyróżnionym elementem e nazywamy **grupą**, jeśli

- działanie jest łączne
- e jest elementem neutralnym
- każdy element $a \in G$ posiada element odwrotny (przeciwny).

Definicja

Zbiór G z działaniem $*$ oraz wyróżnionym elementem e nazywamy **grupą**, jeśli

- działanie jest łączne
- e jest elementem neutralnym
- każdy element $a \in G$ posiada element odwrotny (przeciwny).

Definicja

Zbiór G z działaniem $*$ oraz wyróżnionym elementem e nazywamy **grupą**, jeśli

- działanie jest łączne
- e jest elementem neutralnym
- każdy element $a \in G$ posiada element odwrotny (przeciwny).

Ponadto, jeśli

- działanie $*$ jest przemienne,

to grupę G nazywamy **przemienną** lub **abelową**.

Definicja

Zbiór G z działaniem $*$ oraz wyróżnionym elementem e nazywamy **grupą**, jeśli

- działanie jest łączne
- e jest elementem neutralnym
- każdy element $a \in G$ posiada element odwrotny (przeciwny).

Ponadto, jeśli

- działanie $*$ jest przemienne,

to grupę G nazywamy **przemienną** lub **abelową**.

Własności działania w grupie

Definicja

Zbiór G z działaniem $*$ oraz wyróżnionym elementem e nazywamy **grupą**, jeśli

działanie jest łączne

e jest elementem neutralnym

każdy element $a \in G$ posiada element odwrotny (przeciwny).

Ponadto, jeśli

działanie $*$ jest przemienne,

to grupę G nazywamy **przemienną** lub **abelową**.

Własności działania w grupie

- Element neutralny e jest wyznaczony jednoznacznie.

Definicja

Zbiór G z działaniem $*$ oraz wyróżnionym elementem e nazywamy **grupą**, jeśli

działanie jest łączne

e jest elementem neutralnym

każdy element $a \in G$ posiada element odwrotny (przeciwny).

Ponadto, jeśli

działanie $*$ jest przemienne,

to grupę G nazywamy **przemienną** lub **abelową**.

Własności działania w grupie

- Element neutralny e jest wyznaczony jednoznacznie.
- Dla każdego elementu a element b taki, że $a * b = b * a = e$ jest wyznaczony jednoznacznie (nazywamy go elementem przeciwnym (ozn. $-a$) lub odwrotnym do a (ozn. a^{-1})).

Definicja

Zbiór G z działaniem $*$ oraz wyróżnionym elementem e nazywamy **grupą**, jeśli

działanie jest łączne

e jest elementem neutralnym

każdy element $a \in G$ posiada element odwrotny (przeciwny).

Ponadto, jeśli

działanie $*$ jest przemienne,

to grupę G nazywamy **przemienną** lub **abelową**.

Własności działania w grupie

- Element neutralny e jest wyznaczony jednoznacznie.
- Dla każdego elementu a element b taki, że $a * b = b * a = e$ jest wyznaczony jednoznacznie (nazywamy go elementem przeciwnym (ozn. $-a$) lub odwrotnym do a (ozn. a^{-1})).
- Jeśli $a * b = a * c$ lub $b * a = c * a$, to $b = c$ (prawo skracania).

Definicja

Zbiór G z działaniem $*$ oraz wyróżnionym elementem e nazywamy **grupą**, jeśli

działanie jest łączne

e jest elementem neutralnym

każdy element $a \in G$ posiada element odwrotny (przeciwny).

Ponadto, jeśli

działanie $*$ jest przemienne,

to grupę G nazywamy **przemienną** lub **abelową**.

Własności działania w grupie

- Element neutralny e jest wyznaczony jednoznacznie.
- Dla każdego elementu a element b taki, że $a * b = b * a = e$ jest wyznaczony jednoznacznie (nazywamy go elementem przeciwnym (ozn. $-a$) lub odwrotnym do a (ozn. a^{-1})).
- Jeśli $a * b = a * c$ lub $b * a = c * a$, to $b = c$ (prawo skracania).
- $(a^{-1})^{-1} = a$.

Definicja

Zbiór G z działaniem $*$ oraz wyróżnionym elementem e nazywamy **grupą**, jeśli

działanie jest łączne

e jest elementem neutralnym

każdy element $a \in G$ posiada element odwrotny (przeciwny).

Ponadto, jeśli

działanie $*$ jest przemienne,

to grupę G nazywamy **przemienną** lub **abelową**.

Własności działania w grupie

- Element neutralny e jest wyznaczony jednoznacznie.
- Dla każdego elementu a element b taki, że $a * b = b * a = e$ jest wyznaczony jednoznacznie (nazywamy go elementem przeciwnym (ozn. $-a$) lub odwrotnym do a (ozn. a^{-1})).
- Jeśli $a * b = a * c$ lub $b * a = c * a$, to $b = c$ (prawo skracania).
- $(a^{-1})^{-1} = a$.
- $(a_1 * \ldots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * \ldots * a_1^{-1}$.

Definicja

Zbiór G z działaniem $*$ oraz wyróżnionym elementem e nazywamy **grupą**, jeśli

działanie jest łączne

e jest elementem neutralnym

każdy element $a \in G$ posiada element odwrotny (przeciwny).

Ponadto, jeśli

działanie $*$ jest przemienne,

to grupę G nazywamy **przemienną** lub **abelową**.

Własności działania w grupie

- Element neutralny e jest wyznaczony jednoznacznie.
- Dla każdego elementu a element b taki, że $a * b = b * a = e$ jest wyznaczony jednoznacznie (nazywamy go elementem przeciwnym (ozn. $-a$) lub odwrotnym do a (ozn. a^{-1})).
- Jeśli $a * b = a * c$ lub $b * a = c * a$, to $b = c$ (prawo skracania).
- $(a^{-1})^{-1} = a$.
- $(a_1 * \dots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * \dots * a_1^{-1}$.

Definicja

Zbiór G z działaniem $*$ oraz wyróżnionym elementem e nazywamy **grupą**, jeśli

działanie jest łączne

e jest elementem neutralnym

każdy element $a \in G$ posiada element odwrotny (przeciwny).

Ponadto, jeśli

działanie $*$ jest przemienne,

to grupę G nazywamy **przemienną** lub **abelową**.

Własności działania w grupie

- Element neutralny e jest wyznaczony jednoznacznie.
- Dla każdego elementu a element b taki, że $a * b = b * a = e$ jest wyznaczony jednoznacznie (nazywamy go elementem przeciwnym (ozn. $-a$) lub odwrotnym do a (ozn. a^{-1})).
- Jeśli $a * b = a * c$ lub $b * a = c * a$, to $b = c$ (prawo skracania).
- $(a^{-1})^{-1} = a$.
- $(a_1 * \ldots * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * \ldots * a_1^{-1}$.

Dowody na tablicy.

Przykłady

1. Zbiór liczb wymiernych (całkowitych, rzeczywistych) z działaniem $+$ jest grupą przemienną.

Przykłady

1. Zbiór liczb wymiernych (całkowitych, rzeczywistych) z działaniem $+$ jest grupą przemienną.
2. Zbiór liczb wymiernych (rzeczywistych) różnych od zera z działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną.

Przykłady

1. Zbiór liczb wymiernych (całkowitych, rzeczywistych) z działaniem $+$ jest grupą przemienną.
2. Zbiór liczb wymiernych (rzeczywistych) różnych od zera z działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną.
3. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną oraz niech $\mathbb{Z}_n := \{0, 1..., n-1\}$. W zbiorze tym określamy działanie: $a \oplus b := (a+b)_n$). Nietrudno pokazać, że $\mathbb{Z}_n$ jest grupą przemienną (zestaw 2).

Przykłady

1. Zbiór liczb wymiernych (całkowitych, rzeczywistych) z działaniem $+$ jest grupą przemienną.
2. Zbiór liczb wymiernych (rzeczywistych) różnych od zera z działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną.
3. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną oraz niech $\mathbb{Z}_n := \{0, 1..., n-1\}$. W zbiorze tym określamy działanie: $a \oplus b := (a+b)_n$). Nietrudno pokazać, że $\mathbb{Z}_n$ jest grupą przemienną (zestaw 2).
4. Zbiór $G = \{e\}$ (z oczywistym działaniem) jest grupą. Nazywamy ją grupą trywialną.

Przykłady

1. Zbiór liczb wymiernych (całkowitych, rzeczywistych) z działaniem $+$ jest grupą przemienną.
2. Zbiór liczb wymiernych (rzeczywistych) różnych od zera z działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną.
3. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną oraz niech $\mathbb{Z}_n := \{0, 1..., n-1\}$. W zbiorze tym określamy działanie: $a \oplus b := (a+b)_n$). Nietrudno pokazać, że $\mathbb{Z}_n$ jest grupą przemienną (zestaw 2).
4. Zbiór $G = \{e\}$ (z oczywistym działaniem) jest grupą. Nazywamy ją grupą trywialną.
5. Niech X będzie niepustym zbiorem. Zbiór $S(X)$ wzajemnie jednoznacznych przekształceń zbioru X na siebie (tzn. permutacji zbioru X) z działaniem składania przekształceń jest grupą (nieprzemienną, jeśli X zawiera co najmniej 3 elementy).

Przykłady

1. Zbiór liczb wymiernych (całkowitych, rzeczywistych) z działaniem $+$ jest grupą przemienną.
2. Zbiór liczb wymiernych (rzeczywistych) różnych od zera z działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną.
3. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną oraz niech $\mathbb{Z}_n := \{0, 1..., n-1\}$. W zbiorze tym określamy działanie: $a \oplus b := (a+b)_n$). Nietrudno pokazać, że $\mathbb{Z}_n$ jest grupą przemienną (zestaw 2).
4. Zbiór $G = \{e\}$ (z oczywistym działaniem) jest grupą. Nazywamy ją grupą trywialną.
5. Niech X będzie niepustym zbiorem. Zbiór $S(X)$ wzajemnie jednoznacznych przekształceń zbioru X na siebie (tzn. permutacji zbioru X) z działaniem składania przekształceń jest grupą (nieprzemienną, jeśli X zawiera co najmniej 3 elementy).
6. Niech $G_1, ..., G_n$ będą grupami z działaniami odpowiednio $*_1, ..., *_n$. Wtedy zbiór $G_1 \times ... \times G_n$ z działaniem $(a_1, ..., a_n) * (b_1, ..., b_n) = (a_1 *_1 b_1, ..., a_n *_n b_n)$ jest grupą. Nazywamy ją **iloczynem kartezjańskim grup** $G_1, ..., G_n$.

I jeszcze jeden przykład

Przedstawmy teraz grupę, która nie jest przemienna. Niech G będzie grupą tzw. izometrii trójkąta równobocznego, tzn. izometrii płaszczyzny, które przeprowadzają ten trójkąt na siebie. Takich izometrii mamy

I jeszcze jeden przykład

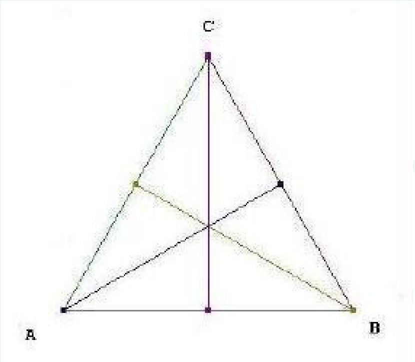
Przedstawmy teraz grupę, która nie jest przemienna. Niech G będzie grupą tzw. izometrii trójkąta równobocznego, tzn. izometrii płaszczyzny, które przeprowadzają ten trójkąt na siebie. Takich izometrii mamy sześć:

I jeszcze jeden przykład

Przedstawmy teraz grupę, która nie jest przemienna. Niech G będzie grupą tzw. izometrii trójkąta równobocznego, tzn. izometrii płaszczyzny, które przeprowadzają ten trójkąt na siebie. Takich izometrii mamy sześć: obroty O_0, O_{120}, O_{240} o kąty odpowiednio 0°, $120^\circ, 240^\circ$ (przeciwnie do wskazówek zegara) oraz odbicia s_A, s_B, s_C względem odpowiednich wysokości.

I jeszcze jeden przykład

Przedstawmy teraz grupę, która nie jest przemienna. Niech G będzie grupą tzw. izometrii trójkąta równobocznego, tzn. izometrii płaszczyzny, które przeprowadzają ten trójkąt na siebie. Takich izometrii mamy sześć: obroty O_0, O_{120}, O_{240} o kąty odpowiednio 0°, $120^\circ, 240^\circ$ (przeciwnie do wskazówek zegara) oraz odbicia s_A, s_B, s_C względem odpowiednich wysokości.



	A	B	C
O_0	A	B	C
O_{120}	B	C	A
O_{240}	C	A	B
s_A	A	C	B
s_B	C	B	A
s_C	B	A	C

Działaniem w tej grupie jest tzw. składanie przekształceń, czyli wykonywanie ich "jeden po drugim" przy czym w zapisie pierwsze przekształcenie piszemy z prawej strony a drugie z lewej. Zobaczmy jak oblicza się $\mathrm{s}_A \circ \mathrm{O}_{120}$ oraz $\mathrm{O}_{120} \circ \mathrm{s}_A$

	A	B	C
O_0	A	B	C
O_{120}	B	C	A
O_{240}	C	A	B
s_A	A	C	B
s_B	C	B	A
s_C	B	A	C

Działaniem w tej grupie jest tzw. składanie przekształceń, czyli wykonywanie ich "jeden po drugim" przy czym w zapisie pierwsze przekształcenie piszemy z prawej strony a drugie z lewej. Zobaczmy jak oblicza się $\mathrm{s}_A \circ \mathrm{O}_{120}$ oraz $\mathrm{O}_{120} \circ \mathrm{s}_A$

$$A \overset{\mathrm{O}_{120}}{\longmapsto} B \overset{\mathrm{s}_A}{\longmapsto} C$$
$$B \overset{\mathrm{O}_{120}}{\longmapsto} C \overset{\mathrm{s}_A}{\longmapsto} B$$
$$C \overset{\mathrm{O}_{120}}{\longmapsto} A \overset{\mathrm{s}_A}{\longmapsto} A$$

	A	B	C
O_0	A	B	C
O_{120}	B	C	A
O_{240}	C	A	B
s_A	A	C	B
s_B	C	B	A
s_C	B	A	C

Zatem $\mathrm{s}_A \circ \mathrm{O}_{120} = \mathrm{s}_B$

Działaniem w tej grupie jest tzw. składanie przekształceń, czyli wykonywanie ich "jeden po drugim" przy czym w zapisie pierwsze przekształcenie piszemy z prawej strony a drugie z lewej. Zobaczmy jak oblicza się $s_A \circ O_{120}$ oraz $O_{120} \circ s_A$

$$A \xrightarrow{O_{120}} B \xrightarrow{s_A} C \qquad A \xrightarrow{s_A} A \xrightarrow{O_{120}} B$$

$$B \xrightarrow{O_{120}} C \xrightarrow{s_A} B \quad \clubsuit \quad B \xrightarrow{s_A} C \xrightarrow{O_{120}} A$$

$$C \xrightarrow{O_{120}} A \xrightarrow{s_A} A \qquad C \xrightarrow{s_A} B \xrightarrow{O_{120}} C$$

	A	B	C
O_0	A	B	C
O_{120}	B	C	A
O_{240}	C	A	B
s_A	A	C	B
s_B	C	B	A
s_C	B	A	C

Zatem $s_A \circ O_{120} = s_B$ oraz $O_{120} \circ s_A = s_C$.

Działaniem w tej grupie jest tzw. składanie przekształceń, czyli wykonywanie ich "jeden po drugim" przy czym w zapisie pierwsze przekształcenie piszemy z prawej strony a drugie z lewej. Zobaczmy jak oblicza się $\mathrm{s}_A \circ \mathrm{O}_{120}$ oraz $\mathrm{O}_{120} \circ \mathrm{s}_A$

$$A \xmapsto{\mathrm{O}_{120}} B \xmapsto{\mathrm{s}_A} C \qquad A \xmapsto{\mathrm{s}_A} A \xmapsto{\mathrm{O}_{120}} B$$
$$B \xmapsto{\mathrm{O}_{120}} C \xmapsto{\mathrm{s}_A} B \quad \clubsuit \quad B \xmapsto{\mathrm{s}_A} C \xmapsto{\mathrm{O}_{120}} A$$
$$C \xmapsto{\mathrm{O}_{120}} A \xmapsto{\mathrm{s}_A} A \qquad C \xmapsto{\mathrm{s}_A} B \xmapsto{\mathrm{O}_{120}} C$$

	A	B	C
O_0	A	B	C
O_{120}	B	C	A
O_{240}	C	A	B
s_A	A	C	B
s_B	C	B	A
s_C	B	A	C

Zatem $\mathrm{s}_A \circ \mathrm{O}_{120} = \mathrm{s}_B$ oraz $\mathrm{O}_{120} \circ \mathrm{s}_A = \mathrm{s}_C$.

Widać, że działanie nie jest przemienne.

W podobny sposób obliczamy pozostałe wyniki tego działania.

1/2	O_0	O_{120}	O_{240}	s_A	s_B	s_C
O_0	O_0	O_{120}	O_{240}	s_A	s_B	s_C
O_{120}	O_{120}	O_{240}	O_0	s_C	s_A	s_B
O_{240}	O_{240}	O_0	O_{120}	s_B	s_C	s_A
s_A	s_A	s_B	s_C	O_0	O_{120}	O_{240}
s_B	s_B	s_C	s_A	O_{240}	O_0	O_{120}
s_C	s_C	s_A	s_B	O_{120}	O_{240}	O_0

W podobny sposób obliczamy pozostałe wyniki tego działania.

$1/2$	O_0	O_{120}	O_{240}	s_A	s_B	s_C
O_0	O_0	O_{120}	O_{240}	s_A	s_B	s_C
O_{120}	O_{120}	O_{240}	O_0	s_C	s_A	s_B
O_{240}	O_{240}	O_0	O_{120}	s_B	s_C	s_A
s_A	s_A	s_B	s_C	O_0	O_{120}	O_{240}
s_B	s_B	s_C	s_A	O_{240}	O_0	O_{120}
s_C	s_C	s_A	s_B	O_{120}	O_{240}	O_0

Który element jest elementem neutralnym?

W podobny sposób obliczamy pozostałe wyniki tego działania.

$1/2$	O_0	O_{120}	O_{240}	s_A	s_B	s_C
O_0	O_0	O_{120}	O_{240}	s_A	s_B	s_C
O_{120}	O_{120}	O_{240}	O_0	s_C	s_A	s_B
O_{240}	O_{240}	O_0	O_{120}	s_B	s_C	s_A
s_A	s_A	s_B	s_C	O_0	O_{120}	O_{240}
s_B	s_B	s_C	s_A	O_{240}	O_0	O_{120}
s_C	s_C	s_A	s_B	O_{120}	O_{240}	O_0

Który element jest elementem neutralnym?

Dla każdej izometrii wskaż element odwrotny.

W podobny sposób obliczamy pozostałe wyniki tego działania.

$1/2$	O_0	O_{120}	O_{240}	s_A	s_B	s_C
O_0	O_0	O_{120}	O_{240}	s_A	s_B	s_C
O_{120}	O_{120}	O_{240}	O_0	s_C	s_A	s_B
O_{240}	O_{240}	O_0	O_{120}	s_B	s_C	s_A
s_A	s_A	s_B	s_C	O_0	O_{120}	O_{240}
s_B	s_B	s_C	s_A	O_{240}	O_0	O_{120}
s_C	s_C	s_A	s_B	O_{120}	O_{240}	O_0

Który element jest elementem neutralnym?

Dla każdej izometrii wskaż element odwrotny.

Skonstruowaną tak grupę nazywamy grupą izometrii trójkąta foremnego.

W podobny sposób skontruować można grupę izometrii dowolnej figury na płaszczyźnie lub dowolnej bryły w przestrzeni.

W podobny sposób skontruować można grupę izometrii dowolnej figury na płaszczyźnie lub dowolnej bryły w przestrzeni.

Czy wiesz ile elementów będą zawierać grupy izometrii następujących figur:

- kwadratu,

W podobny sposób skontruować można grupę izometrii dowolnej figury na płaszczyźnie lub dowolnej bryły w przestrzeni.

Czy wiesz ile elementów będą zawierać grupy izometrii następujących figur:

- kwadratu,
- pięciokata foremnego lub ogólniej n-kąta foremnego,

W podobny sposób skontruować można grupę izometrii dowolnej figury na płaszczyźnie lub dowolnej bryły w przestrzeni.

Czy wiesz ile elementów będą zawierać grupy izometrii następujących figur:

- kwadratu,
- pięciokata foremnego lub ogólniej n-kąta foremnego,
- prostokąta, który nie jest kwadratem,

W podobny sposób skontruować można grupę izometrii dowolnej figury na płaszczyźnie lub dowolnej bryły w przestrzeni.

Czy wiesz ile elementów będą zawierać grupy izometrii następujących figur:

- kwadratu,
- pięciokata foremnego lub ogólniej n-kąta foremnego,
- prostokąta, który nie jest kwadratem,
- trojkąta równoramiennego, który nie jest równoboczny,

W podobny sposób skontruować można grupę izometrii dowolnej figury na płaszczyźnie lub dowolnej bryły w przestrzeni.

Czy wiesz ile elementów będą zawierać grupy izometrii następujących figur:

- kwadratu,
- pięciokata foremnego lub ogólniej n-kąta foremnego,
- prostokąta, który nie jest kwadratem,
- trojkąta równoramiennego, który nie jest równoboczny,
- rombu, który nie jest kwadratem,

W podobny sposób skontruować można grupę izometrii dowolnej figury na płaszczyźnie lub dowolnej bryły w przestrzeni.

Czy wiesz ile elementów będą zawierać grupy izometrii następujących figur:

- kwadratu,
- pięciokata foremnego lub ogólniej n-kąta foremnego,
- prostokąta, który nie jest kwadratem,
- trojkąta równoramiennego, który nie jest równoboczny,
- rombu, który nie jest kwadratem,
- okręgu?

Definicja

Niepusty H podzbior grupy G (z działaniem $*$) nazywamy **podgrupą** grupy G (i ozn. $H < G$), jeśli spełniony jest warunek

$$a, b \in H \implies a * b^{-1} \in H.$$

Definicja

Niepusty H podzbior grupy G (z działaniem $*$) nazywamy **podgrupą** grupy G (i ozn. $H < G$), jeśli spełniony jest warunek

$$a, b \in H \implies a * b^{-1} \in H.$$

Uwaga

Niech $H < G$.

- Działanie $*$ zacieśnione do podzbioru H jest działaniem w zbiorze H,

Definicja

Niepusty H podzbior grupy G (z działaniem $*$) nazywamy **podgrupą** grupy G (i ozn. $H < G$), jeśli spełniony jest warunek

$$a, b \in H \implies a * b^{-1} \in H.$$

Uwaga

Niech $H < G$.

- Działanie $*$ zacieśnione do podzbioru H jest działaniem w zbiorze H,
- Zbiór H z tym zacieśnionym działaniem jest grupą.

Definicja

Niepusty H podzbior grupy G (z działaniem $*$) nazywamy **podgrupą** grupy G (i ozn. $H < G$), jeśli spełniony jest warunek

$$a, b \in H \implies a * b^{-1} \in H.$$

Uwaga

Niech $H < G$.

- Działanie $*$ zacieśnione do podzbioru H jest działaniem w zbiorze H,
- Zbiór H z tym zacieśnionym działaniem jest grupą.

Definicja

Niepusty H podzbior grupy G (z działaniem $*$) nazywamy **podgrupą** grupy G (i ozn. $H < G$), jeśli spełniony jest warunek

$$a, b \in H \implies a * b^{-1} \in H.$$

Uwaga

Niech $H < G$.

- Działanie $*$ zacieśnione do podzbioru H jest działaniem w zbiorze H,
- Zbiór H z tym zacieśnionym działaniem jest grupą.

Przykłady

- $\{e\} < G$ (podgrupa trywialna)

Definicja

Niepusty H podzbior grupy G (z działaniem $*$) nazywamy **podgrupą** grupy G (i ozn. $H < G$), jeśli spełniony jest warunek

$$a, b \in H \implies a * b^{-1} \in H.$$

Uwaga

Niech $H < G$.

- Działanie $*$ zacieśnione do podzbioru H jest działaniem w zbiorze H,
- Zbiór H z tym zacieśnionym działaniem jest grupą.

Przykłady

- $\{e\} < G$ (podgrupa trywialna)
- $G < G$ (podgrupa niewłaściwa)

Definicja

Niepusty H podzbior grupy G (z działaniem $*$) nazywamy **podgrupą** grupy G (i ozn. $H < G$), jeśli spełniony jest warunek

$$a, b \in H \implies a * b^{-1} \in H.$$

Uwaga

Niech $H < G$.

- Działanie $*$ zacieśnione do podzbioru H jest działaniem w zbiorze H,
- Zbiór H z tym zacieśnionym działaniem jest grupą.

Przykłady

- $\{e\} < G$ (podgrupa trywialna)
- $G < G$ (podgrupa niewłaściwa)
- $\mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R}$ (z działaniem $+$)

Definicja

Niepusty H podzbior grupy G (z działaniem $*$) nazywamy **podgrupą** grupy G (i ozn. $H < G$), jeśli spełniony jest warunek

$$a, b \in H \implies a * b^{-1} \in H.$$

Uwaga

Niech $H < G$.

- Działanie $*$ zacieśnione do podzbioru H jest działaniem w zbiorze H,
- Zbiór H z tym zacieśnionym działaniem jest grupą.

Przykłady

- $\{e\} < G$ (podgrupa trywialna)
- $G < G$ (podgrupa niewłaściwa)
- $\mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R}$ (z działaniem $+$)
- $\mathbb{Q} \setminus \{0\} < \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (z działaniem $\cdot$)

Definicja

Niepusty H podzbior grupy G (z działaniem $*$) nazywamy **podgrupą** grupy G (i ozn. $H < G$), jeśli spełniony jest warunek

$$a, b \in H \implies a * b^{-1} \in H.$$

Uwaga

Niech $H < G$.

- Działanie $*$ zacieśnione do podzbioru H jest działaniem w zbiorze H,
- Zbiór H z tym zacieśnionym działaniem jest grupą.

Przykłady

- $\{e\} < G$ (podgrupa trywialna)
- $G < G$ (podgrupa niewłaściwa)
- $\mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R}$ (z działaniem $+$)
- $\mathbb{Q} \setminus \{0\} < \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (z działaniem $\cdot$)
- $\{O_0, O_{120}, O_{240}\}$ jest podgrupą grupy izometrii trójkąta równobocznego

W grupie można zdefiniować **działanie potęgowania** (o wykładnikach całkowitych) w następujący sposób:

$$a^n = \begin{cases} a * \ldots * a, & n \text{ razy, gdy } n > 0 \\ e, & \text{gdy } n = 0 \\ a^{-1} * \ldots * a^{-1}, & |n| \text{ razy, gdy } n < 0 \end{cases}$$

W grupie można zdefiniować **działanie potęgowania** (o wykładnikach całkowitych) w następujący sposób:

$$a^n = \begin{cases} a * \dots * a, & n \text{ razy, gdy } n > 0 \\ e, & \text{gdy } n = 0 \\ a^{-1} * \dots * a^{-1}, & |n| \text{ razy, gdy } n < 0 \end{cases}$$

W przypadku, gdy w grupie mamy do czynienia z zapisem addytywnym (działanie $+$, element neutralny 0), mówimy nie o potęgach, ale o **wielokrotnościach całkowitych**. Wtedy definicja przyjmuje następującą postać:

$$na = \begin{cases} a + \dots + a, & n \text{ razy, gdy } n > 0 \\ 0, & \text{gdy } n = 0 \\ (-a) + \dots + (-a), & |n| \text{ razy, gdy } n < 0 \end{cases}$$

W grupie można zdefiniować **działanie potęgowania** (o wykładnikach całkowitych) w następujący sposób:

$$a^n = \begin{cases} a * \ldots * a, & n \text{ razy, gdy } n > 0 \\ e, & \text{gdy } n = 0 \\ a^{-1} * \ldots * a^{-1}, & |n| \text{ razy, gdy } n < 0 \end{cases}$$

W przypadku, gdy w grupie mamy do czynienia z zapisem addytywnym (działanie $+$, element neutralny 0), mówimy nie o potęgach, ale o **wielokrotnościach całkowitych**. Wtedy definicja przyjmuje następującą postać:

$$na = \begin{cases} a + \ldots + a, & n \text{ razy, gdy } n > 0 \\ 0, & \text{gdy } n = 0 \\ (-a) + \ldots + (-a), & |n| \text{ razy, gdy } n < 0 \end{cases}$$

Mają miejsce następujące równości:

$$a^m * a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn},$$

W grupie można zdefiniować **działanie potęgowania** (o wykładnikach całkowitych) w następujący sposób:

$$a^n = \begin{cases} a * \ldots * a, & n \text{ razy, gdy } n > 0 \\ e, & \text{gdy } n = 0 \\ a^{-1} * \ldots * a^{-1}, & |n| \text{ razy, gdy } n < 0 \end{cases}$$

W przypadku, gdy w grupie mamy do czynienia z zapisem addytywnym (działanie $+$, element neutralny 0), mówimy nie o potęgach, ale o **wielokrotnościach całkowitych**. Wtedy definicja przyjmuje następującą postać:

$$na = \begin{cases} a + \ldots + a, & n \text{ razy, gdy } n > 0 \\ 0, & \text{gdy } n = 0 \\ (-a) + \ldots + (-a), & |n| \text{ razy, gdy } n < 0 \end{cases}$$

Mają miejsce następujące równości:

$$a^m * a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn},$$

które w zapisie addytywnym przyjmują postać:

$$(ma) + (na) = (m+n)a, \qquad n(m \cdot a) = (mn)a.$$

W grupie można zdefiniować **działanie potęgowania** (o wykładnikach całkowitych) w następujący sposób:

$$a^n = \begin{cases} a * \dots * a, & n \text{ razy, gdy } n > 0 \\ e, & \text{gdy } n = 0 \\ a^{-1} * \dots * a^{-1}, & |n| \text{ razy, gdy } n < 0 \end{cases}$$

W przypadku, gdy w grupie mamy do czynienia z zapisem addytywnym (działanie $+$, element neutralny 0), mówimy nie o potęgach, ale o **wielokrotnościach całkowitych**. Wtedy definicja przyjmuje następującą postać:

$$na = \begin{cases} a + \dots + a, & n \text{ razy, gdy } n > 0 \\ 0, & \text{gdy } n = 0 \\ (-a) + \dots + (-a), & |n| \text{ razy, gdy } n < 0 \end{cases}$$

Mają miejsce następujące równości:

$$a^m * a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn},$$

które w zapisie addytywnym przyjmują postać:

$$(ma) + (na) = (m+n)a, \qquad n(m \cdot a) = (mn)a.$$

Jeżeli grupa jest abelowa, to mamy również $(a * b)^m = a^m * b^m$.

W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ mamy dwa działania: $+$ oraz $\cdot$. Popatrzmy na ich własności.

W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ mamy dwa działania: $+$ oraz $\cdot$. Popatrzmy na ich własności.

$\mathbb{Q}$ wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną

W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ mamy dwa działania: $+$ oraz $\cdot$. Popatrzmy na ich własności.

$\mathbb{Q}$ wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ wraz z 1 oraz działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną

W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ mamy dwa działania: $+$ oraz $\cdot$. Popatrzmy na ich własności.

$\mathbb{Q}$ wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ wraz z 1 oraz działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dla każdych $a, b, c \in \mathbb{Q}$
($\cdot$ jest rozdzielne względem $+$)

W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ mamy dwa działania: $+$ oraz $\cdot$. Popatrzmy na ich własności.

$\mathbb{Q}$ wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ wraz z 1 oraz działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dla każdych $a, b, c \in \mathbb{Q}$
($\cdot$ jest rozdzielne względem $+$)

W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ mamy dwa działania: $+$ oraz $\cdot$. Popatrzmy na ich własności.

$\mathbb{Q}$ wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ wraz z 1 oraz działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dla każdych $a, b, c \in \mathbb{Q}$
($\cdot$ jest rozdzielne względem $+$)

Definicja

Zbiór K, zawierający co najmniej dwa elementy, z wyróżnionymi elementami 0, 1 oraz działaniami $+$, $\cdot$ nazywamy **ciałem**, jeśli

W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ mamy dwa działania: $+$ oraz $\cdot$. Popatrzmy na ich własności.

$\mathbb{Q}$ wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ wraz z 1 oraz działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dla każdych $a, b, c \in \mathbb{Q}$
($\cdot$ jest rozdzielne względem $+$)

Definicja

Zbiór K, zawierający co najmniej dwa elementy, z wyróżnionymi elementami 0, 1 oraz działaniami $+$, $\cdot$ nazywamy **ciałem**, jeśli

K wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną,

W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ mamy dwa działania: $+$ oraz $\cdot$. Popatrzmy na ich własności.

$\mathbb{Q}$ wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ wraz z 1 oraz działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dla każdych $a, b, c \in \mathbb{Q}$
($\cdot$ jest rozdzielne względem $+$)

Definicja

Zbiór K, zawierający co najmniej dwa elementy, z wyróżnionymi elementami 0, 1 oraz działaniami $+$, $\cdot$ nazywamy **ciałem**, jeśli

K wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną,

$K \setminus \{0\}$ wraz z 1 oraz działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną,

W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ mamy dwa działania: $+$ oraz $\cdot$. Popatrzmy na ich własności.

$\mathbb{Q}$ wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ wraz z 1 oraz działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dla każdych $a, b, c \in \mathbb{Q}$
($\cdot$ jest rozdzielne względem $+$)

Definicja

Zbiór K, zawierający co najmniej dwa elementy, z wyróżnionymi elementami 0, 1 oraz działaniami $+$, $\cdot$ nazywamy **ciałem**, jeśli

K wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną,

$K \setminus \{0\}$ wraz z 1 oraz działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną,

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dla każdych $a, b, c \in K$
(działanie $\cdot$ jest rozdzielne względem $+$)

W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ mamy dwa działania: $+$ oraz $\cdot$. Popatrzmy na ich własności.

$\mathbb{Q}$ wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ wraz z 1 oraz działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dla każdych $a, b, c \in \mathbb{Q}$
($\cdot$ jest rozdzielne względem $+$)

Definicja

Zbiór K, zawierający co najmniej dwa elementy, z wyróżnionymi elementami 0, 1 oraz działaniami $+$, $\cdot$ nazywamy **ciałem**, jeśli

K wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną,

$K \setminus \{0\}$ wraz z 1 oraz działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną,

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dla każdych $a, b, c \in K$
(działanie $\cdot$ jest rozdzielne względem $+$)

W zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ mamy dwa działania: $+$ oraz $\cdot$. Popatrzmy na ich własności.

$\mathbb{Q}$ wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną

$\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ wraz z 1 oraz działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dla każdych $a, b, c \in \mathbb{Q}$
($\cdot$ jest rozdzielne względem $+$)

Definicja

Zbiór K, zawierający co najmniej dwa elementy, z wyróżnionymi elementami 0, 1 oraz działaniami $+$, $\cdot$ nazywamy **ciałem**, jeśli

K wraz z 0 oraz działaniem $+$ jest grupą przemienną,

$K \setminus \{0\}$ wraz z 1 oraz działaniem $\cdot$ jest grupą przemienną,

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dla każdych $a, b, c \in K$
(działanie $\cdot$ jest rozdzielne względem $+$)

Zatem komplet aksjomatów w definicji ciała wygląda następująco:

Zatem komplet aksjomatów w definicji ciała wygląda następująco:

1. $\forall_{a,b \in K} \; a + b = b + a$
2. $\forall_{a,b,c \in K} \; a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $\forall_{a \in K} \; a + 0 = 0 + a = a$
4. $\forall_{a \in K} \; \exists_{b \in K} \; a + b = b + a = 0$

Zatem komplet aksjomatów w definicji ciała wygląda następująco:

5. $\underset{a,b\in K}{\forall} \; a \cdot b = b \cdot a$
6. $\underset{a,b,c\in K}{\forall} \; a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
7. $\underset{a\in K}{\forall} \; a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
8. $\underset{a\in K\setminus\{0\}}{\forall} \; \underset{b\in K}{\exists} \; a \cdot b = b \cdot a = 1$

Zatem komplet aksjomatów w definicji ciała wygląda następująco:

9. $\forall_{a,b,c \in K} \; a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Zatem komplet aksjomatów w definicji ciała wygląda następująco:

1. $\forall_{a,b\in K} \; a+b=b+a$
2. $\forall_{a,b,c\in K} \; a+(b+c)=(a+b)+c$
3. $\forall_{a\in K} \; a+0=0+a=a$
4. $\forall_{a\in K} \exists_{b\in K} \; a+b=b+a=0$
5. $\forall_{a,b\in K} \; a\cdot b=b\cdot a$
6. $\forall_{a,b,c\in K} \; a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
7. $\forall_{a\in K} \; a\cdot 1=1\cdot a=a$
8. $\forall_{a\in K\setminus\{0\}} \exists_{b\in K} \; a\cdot b=b\cdot a=1$
9. $\forall_{a,b,c\in K} \; a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Zatem komplet aksjomatów w definicji ciała wygląda następująco:

1. $\underset{a,b\in K}{\forall}\ a+b=b+a$
2. $\underset{a,b,c\in K}{\forall}\ a+(b+c)=(a+b)+c$
3. $\underset{a\in K}{\forall}\ a+0=0+a=a$
4. $\underset{a\in K}{\forall}\ \underset{b\in K}{\exists}\ a+b=b+a=0$
5. $\underset{a,b\in K}{\forall}\ a\cdot b=b\cdot a$
6. $\underset{a,b,c\in K}{\forall}\ a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
7. $\underset{a\in K}{\forall}\ a\cdot 1=1\cdot a=a$
8. $\underset{a\in K\setminus\{0\}}{\forall}\ \underset{b\in K}{\exists}\ a\cdot b=b\cdot a=1$
9. $\underset{a,b,c\in K}{\forall}\ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ oraz zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ wraz z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia są ciałami.

Zatem komplet aksjomatów w definicji ciała wygląda następująco:

1. $\forall_{a,b\in K} \quad a+b=b+a$
2. $\forall_{a,b,c\in K} \quad a+(b+c)=(a+b)+c$
3. $\forall_{a\in K} \quad a+0=0+a=a$
4. $\forall_{a\in K} \ \exists_{b\in K} \quad a+b=b+a=0$
5. $\forall_{a,b\in K} \quad a\cdot b=b\cdot a$
6. $\forall_{a,b,c\in K} \quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
7. $\forall_{a\in K} \quad a\cdot 1=1\cdot a=a$
8. $\forall_{a\in K\setminus\{0\}} \ \exists_{b\in K} \quad a\cdot b=b\cdot a=1$
9. $\forall_{a,b,c\in K} \quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ oraz zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ wraz z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia są ciałami.

Czy zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ jest ciałem?

Zatem komplet aksjomatów w definicji ciała wygląda następująco:

1. $\forall_{a,b\in K} \quad a+b=b+a$
2. $\forall_{a,b,c\in K} \quad a+(b+c)=(a+b)+c$
3. $\forall_{a\in K} \quad a+0=0+a=a$
4. $\forall_{a\in K} \ \exists_{b\in K} \quad a+b=b+a=0$
5. $\forall_{a,b\in K} \quad a\cdot b=b\cdot a$
6. $\forall_{a,b,c\in K} \quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
7. $\forall_{a\in K} \quad a\cdot 1=1\cdot a=a$
8. $\forall_{a\in K\setminus\{0\}} \ \exists_{b\in K} \quad a\cdot b=b\cdot a=1$
9. $\forall_{a,b,c\in K} \quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ oraz zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ wraz z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia są ciałami.

Czy zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ jest ciałem? Który warunek nie jest spełniony?

Zatem komplet aksjomatów w definicji ciała wygląda następująco:

1. $\forall_{a,b\in K} \quad a+b=b+a$
2. $\forall_{a,b,c\in K} \quad a+(b+c)=(a+b)+c$
3. $\forall_{a\in K} \quad a+0=0+a=a$
4. $\forall_{a\in K} \ \exists_{b\in K} \quad a+b=b+a=0$
5. $\forall_{a,b\in K} \quad a\cdot b=b\cdot a$
6. $\forall_{a,b,c\in K} \quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
7. $\forall_{a\in K} \quad a\cdot 1=1\cdot a=a$
8. $\forall_{a\in K\setminus\{0\}} \ \exists_{b\in K} \quad a\cdot b=b\cdot a=1$
9. $\forall_{a,b,c\in K} \quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ oraz zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ wraz z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia są ciałami.

Czy zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ jest ciałem? Który warunek nie jest spełniony?

Definicja

Zbiór P z wyróżnionymi elementami 0, 1 oraz działaniami $+$, $\cdot$ nazywamy **pierścieniem**, jeśli

Definicja

Zbiór P z wyróżnionymi elementami 0, 1 oraz działaniami $+$, $\cdot$ nazywamy **pierścieniem**, jeśli

1. $\forall_{a,b \in P} \; a + b = b + a$
2. $\forall_{a,b,c \in P} \; a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $\forall_{a \in P} \; a + 0 = 0 + a = a$
4. $\forall_{a \in P} \; \exists_{b \in P} \; a + b = b + a = 0$
5. $\forall_{a,b \in P} \; a \cdot b = b \cdot a$
6. $\forall_{a,b,c \in P} \; a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
7. $\forall_{a \in P} \; a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
8. $\forall_{a,b,c \in P} \; a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Definicja

Zbiór P z wyróżnionymi elementami 0, 1 oraz działaniami $+$, $\cdot$ nazywamy **pierścieniem**, jeśli

1. $\forall_{a,b\in P}\ a+b=b+a$
2. $\forall_{a,b,c\in P}\ a+(b+c)=(a+b)+c$
3. $\forall_{a\in P}\ a+0=0+a=a$
4. $\forall_{a\in P}\ \exists_{b\in P}\ a+b=b+a=0$
5. $\forall_{a,b\in P}\ a\cdot b=b\cdot a$
6. $\forall_{a,b,c\in P}\ a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
7. $\forall_{a\in P}\ a\cdot 1=1\cdot a=a$
8. $\forall_{a,b,c\in P}\ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Zatem zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ jest pierścieniem.

Przykłady (sprawdzenie na ćwiczeniach - zestaw 2)

- Każde ciało jest pierścieniem.

Przykłady (sprawdzenie na ćwiczeniach - zestaw 2)

- Każde ciało jest pierścieniem.
- Zbiór $P = \{0\}$, z oczywistymi działaniami, jest pierścieniem. Tutaj musi być $0 = 1$. Pierścień ten nazywamy pierścieniem zerowym.

Przykłady (sprawdzenie na ćwiczeniach - zestaw 2)

- Każde ciało jest pierścieniem.
- Zbiór $P = \{0\}$, z oczywistymi działaniami, jest pierścieniem. Tutaj musi być $0 = 1$. Pierścień ten nazywamy pierścieniem zerowym.
- Zbiór $\mathbb{Q}$, z działaniami $a \oplus b := a + b + 1$ $\ a \odot b := a \cdot b + a + b$, jest ciałem.

Przykłady (sprawdzenie na ćwiczeniach - zestaw 2)

- Każde ciało jest pierścieniem.
- Zbiór $P = \{0\}$, z oczywistymi działaniami, jest pierścieniem. Tutaj musi być $0 = 1$. Pierścień ten nazywamy pierścieniem zerowym.
- Zbiór $\mathbb{Q}$, z działaniami $a \oplus b := a + b + 1 \quad a \odot b := a \cdot b + a + b$, jest ciałem.
- Niech n będzie liczbą pierwszą. Zbiór $\mathbb{Z}_n$, z działaniami $a \oplus b = (a+b)_n, \quad a \odot b = (a \cdot b)_n$, jest pierścieniem i jest ciałem, gdy n jest liczbą pierwszą.

  Przykładowo dla $n = 5$ tabelki działań mają postać

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Przykłady (sprawdzenie na ćwiczeniach - zestaw 2)

- Każde ciało jest pierścieniem.
- Zbiór $P = \{0\}$, z oczywistymi działaniami, jest pierścieniem. Tutaj musi być $0 = 1$. Pierścień ten nazywamy pierścieniem zerowym.
- Zbiór $\mathbb{Q}$, z działaniami $a \oplus b := a + b + 1 \quad a \odot b := a \cdot b + a + b$, jest ciałem.
- Niech n będzie liczbą pierwszą. Zbiór $\mathbb{Z}_n$, z działaniami $a \oplus b = (a + b)_n, \quad a \odot b = (a \cdot b)_n$, jest pierścieniem i jest ciałem, gdy n jest liczbą pierwszą.

  Przykładowo dla $n = 5$ tabelki działań mają postać

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Przykłady (sprawdzenie na ćwiczeniach - zestaw 2)

- Każde ciało jest pierścieniem.
- Zbiór $P = \{0\}$, z oczywistymi działaniami, jest pierścieniem. Tutaj musi być $0 = 1$. Pierścień ten nazywamy pierścieniem zerowym.
- Zbiór $\mathbb{Q}$, z działaniami $a \oplus b := a + b + 1$ $a \odot b := a \cdot b + a + b$, jest ciałem.
- Niech n będzie liczbą pierwszą. Zbiór $\mathbb{Z}_n$, z działaniami $a \oplus b = (a + b)_n$, $a \odot b = (a \cdot b)_n$, jest pierścieniem i jest ciałem, gdy n jest liczbą pierwszą.

  Przykładowo dla $n = 5$ tabelki działań mają postać

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0

Przykłady (sprawdzenie na ćwiczeniach - zestaw 2)

- Każde ciało jest pierścieniem.
- Zbiór $P = \{0\}$, z oczywistymi działaniami, jest pierścieniem. Tutaj musi być $0 = 1$. Pierścień ten nazywamy pierścieniem zerowym.
- Zbiór $\mathbb{Q}$, z działaniami $a \oplus b := a + b + 1 \quad a \odot b := a \cdot b + a + b$, jest ciałem.
- Niech n będzie liczbą pierwszą. Zbiór $\mathbb{Z}_n$, z działaniami $a \oplus b = (a+b)_n, \quad a \odot b = (a \cdot b)_n$, jest pierścieniem i jest ciałem, gdy n jest liczbą pierwszą.

  Przykładowo dla $n = 5$ tabelki działań mają postać

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4		

Przykłady (sprawdzenie na ćwiczeniach - zestaw 2)

- Każde ciało jest pierścieniem.
- Zbiór $P = \{0\}$, z oczywistymi działaniami, jest pierścieniem. Tutaj musi być $0 = 1$. Pierścień ten nazywamy pierścieniem zerowym.
- Zbiór $\mathbb{Q}$, z działaniami $a \oplus b := a + b + 1$ $a \odot b := a \cdot b + a + b$, jest ciałem.
- Niech n będzie liczbą pierwszą. Zbiór $\mathbb{Z}_n$, z działaniami $a \oplus b = (a + b)_n$, $a \odot b = (a \cdot b)_n$, jest pierścieniem i jest ciałem, gdy n jest liczbą pierwszą.

Przykładowo dla $n = 5$ tabelki działań mają postać

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	

Przykłady (sprawdzenie na ćwiczeniach - zestaw 2)

- Każde ciało jest pierścieniem.
- Zbiór $P = \{0\}$, z oczywistymi działaniami, jest pierścieniem. Tutaj musi być $0 = 1$. Pierścień ten nazywamy pierścieniem zerowym.
- Zbiór $\mathbb{Q}$, z działaniami $a \oplus b := a + b + 1$ $a \odot b := a \cdot b + a + b$, jest ciałem.
- Niech n będzie liczbą pierwszą. Zbiór $\mathbb{Z}_n$, z działaniami $a \oplus b = (a + b)_n$, $a \odot b = (a \cdot b)_n$, jest pierścieniem i jest ciałem, gdy n jest liczbą pierwszą.

Przykładowo dla $n = 5$ tabelki działań mają postać

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3

Przykłady (sprawdzenie na ćwiczeniach - zestaw 2)

- Każde ciało jest pierścieniem.
- Zbiór $P = \{0\}$, z oczywistymi działaniami, jest pierścieniem. Tutaj musi być $0 = 1$. Pierścień ten nazywamy pierścieniem zerowym.
- Zbiór $\mathbb{Q}$, z działaniami $a \oplus b := a + b + 1$ $a \odot b := a \cdot b + a + b$, jest ciałem.
- Niech n będzie liczbą pierwszą. Zbiór $\mathbb{Z}_n$, z działaniami $a \oplus b = (a + b)_n$, $a \odot b = (a \cdot b)_n$, jest pierścieniem i jest ciałem, gdy n jest liczbą pierwszą.

  Przykładowo dla $n = 5$ tabelki działań mają postać

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2

Przykłady (sprawdzenie na ćwiczeniach - zestaw 2)

- Każde ciało jest pierścieniem.
- Zbiór $P = \{0\}$, z oczywistymi działaniami, jest pierścieniem. Tutaj musi być $0 = 1$. Pierścień ten nazywamy pierścieniem zerowym.
- Zbiór $\mathbb{Q}$, z działaniami $a \oplus b := a + b + 1$ $a \odot b := a \cdot b + a + b$, jest ciałem.
- Niech n będzie liczbą pierwszą. Zbiór $\mathbb{Z}_n$, z działaniami $a \oplus b = (a + b)_n$, $a \odot b = (a \cdot b)_n$, jest pierścieniem i jest ciałem, gdy n jest liczbą pierwszą.

  Przykładowo dla $n = 5$ tabelki działań mają postać

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia jest pierścieniem.

- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia jest pierścieniem.
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$, ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem.

- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia jest pierścieniem.
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$, ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem.
- $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, a, b\}$ z działaniami

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

jest ciałem.

- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia jest pierścieniem.
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$, ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem.
- $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, a, b\}$ z działaniami

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

  jest ciałem.
- Jeśli $P_1, \ldots, P_n$ są pierścieniami, to zbiór $P_1 \times \ldots \times P_n$ z działaniami

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 +_1 b_1, \ldots, a_n +_n b_n)$$

$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 \cdot_1 b_1, \ldots, a_n \cdot_n b_n)$$

  jest pierścieniem. Nazywamy go **iloczynem kartezjańskim pierścieni** $P_1, \ldots, P_n$.

W pierścieniu P można dodatkowo określić

- **odejmowanie**: $a - b = a + (-b)$,

W pierścieniu P można dodatkowo określić

- **odejmowanie**: $a - b = a + (-b)$,
- **wielokrotność** całkowitą (w grupie addytywnej tego pierścienia),

W pierścieniu P można dodatkowo określić

- **odejmowanie**: $a - b = a + (-b)$,
- **wielokrotność** całkowitą (w grupie addytywnej tego pierścienia),
- **potęgę** o wykładniku $n \geqslant 0$,

W pierścieniu P można dodatkowo określić

- **odejmowanie**: $a - b = a + (-b)$,
- **wielokrotność** całkowitą (w grupie addytywnej tego pierścienia),
- **potęgę** o wykładniku $n \geqslant 0$,

W pierścieniu P można dodatkowo określić

- **odejmowanie**: $a - b = a + (-b)$,
- **wielokrotność** całkowitą (w grupie addytywnej tego pierścienia),
- **potęgę** o wykładniku $n \geqslant 0$,

Wtedy dla $a, b, c \in P$ oraz $n, m \in \mathbb{N}$ mamy:

W pierścieniu P można dodatkowo określić

- **odejmowanie**: $a - b = a + (-b)$,
- **wielokrotność** całkowitą (w grupie addytywnej tego pierścienia),
- **potęgę** o wykładniku $n \geqslant 0$,

Wtedy dla $a, b, c \in P$ oraz $n, m \in \mathbb{N}$ mamy:

- $a \cdot 0 = 0$

W pierścieniu P można dodatkowo określić

- **odejmowanie**: $a - b = a + (-b)$,
- **wielokrotność** całkowitą (w grupie addytywnej tego pierścienia),
- **potęgę** o wykładniku $n \geqslant 0$,

Wtedy dla $a, b, c \in P$ oraz $n, m \in \mathbb{N}$ mamy:

- $a \cdot 0 = 0$
- Jeżeli pierścień P jest niezerowy, to $0 \neq 1$

W pierścieniu P można dodatkowo określić

- **odejmowanie**: $a - b = a + (-b)$,
- **wielokrotność** całkowitą (w grupie addytywnej tego pierścienia),
- **potęgę** o wykładniku $n \geqslant 0$,

Wtedy dla $a, b, c \in P$ oraz $n, m \in \mathbb{N}$ mamy:

- $a \cdot 0 = 0$
- Jeżeli pierścień P jest niezerowy, to $0 \neq 1$
- $a \cdot (-b) = -ab$

W pierścieniu P można dodatkowo określić

- **odejmowanie**: $a - b = a + (-b)$,
- **wielokrotność** całkowitą (w grupie addytywnej tego pierścienia),
- **potęgę** o wykładniku $n \geqslant 0$,

Wtedy dla $a, b, c \in P$ oraz $n, m \in \mathbb{N}$ mamy:

- $a \cdot 0 = 0$
- Jeżeli pierścień P jest niezerowy, to $0 \neq 1$
- $a \cdot (-b) = -ab$
- $(-a) \cdot (-b) = ab$

W pierścieniu P można dodatkowo określić

- **odejmowanie**: $a - b = a + (-b)$,
- **wielokrotność** całkowitą (w grupie addytywnej tego pierścienia),
- **potęgę** o wykładniku $n \geqslant 0$,

Wtedy dla $a, b, c \in P$ oraz $n, m \in \mathbb{N}$ mamy:

- $a \cdot 0 = 0$
- Jeżeli pierścień P jest niezerowy, to $0 \neq 1$
- $a \cdot (-b) = -ab$
- $(-a) \cdot (-b) = ab$
- $a \cdot (b - c) = ab - ac$

W pierścieniu P można dodatkowo określić

- **odejmowanie**: $a - b = a + (-b)$,
- **wielokrotność** całkowitą (w grupie addytywnej tego pierścienia),
- **potęgę** o wykładniku $n \geqslant 0$,

Wtedy dla $a, b, c \in P$ oraz $n, m \in \mathbb{N}$ mamy:

- $a \cdot 0 = 0$
- Jeżeli pierścień P jest niezerowy, to $0 \neq 1$
- $a \cdot (-b) = -ab$
- $(-a) \cdot (-b) = ab$
- $a \cdot (b - c) = ab - ac$
- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

W pierścieniu P można dodatkowo określić

- **odejmowanie**: $a - b = a + (-b)$,
- **wielokrotność** całkowitą (w grupie addytywnej tego pierścienia),
- **potęgę** o wykładniku $n \geqslant 0$,

Wtedy dla $a, b, c \in P$ oraz $n, m \in \mathbb{N}$ mamy:

- $a \cdot 0 = 0$
- Jeżeli pierścień P jest niezerowy, to $0 \neq 1$
- $a \cdot (-b) = -ab$
- $(-a) \cdot (-b) = ab$
- $a \cdot (b - c) = ab - ac$
- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}$ (wzór Newtona)

W pierścieniu P można dodatkowo określić

- **odejmowanie**: $a - b = a + (-b)$,
- **wielokrotność** całkowitą (w grupie addytywnej tego pierścienia),
- **potęgę** o wykładniku $n \geqslant 0$,

Wtedy dla $a, b, c \in P$ oraz $n, m \in \mathbb{N}$ mamy:

- $a \cdot 0 = 0$
- Jeżeli pierścień P jest niezerowy, to $0 \neq 1$
- $a \cdot (-b) = -ab$
- $(-a) \cdot (-b) = ab$
- $a \cdot (b - c) = ab - ac$
- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}$ (wzór Newtona)
- $na \pm ma = (n \pm m)a$

W pierścieniu P można dodatkowo określić

- **odejmowanie**: $a - b = a + (-b)$,
- **wielokrotność** całkowitą (w grupie addytywnej tego pierścienia),
- **potęgę** o wykładniku $n \geqslant 0$,

Wtedy dla $a, b, c \in P$ oraz $n, m \in \mathbb{N}$ mamy:

- $a \cdot 0 = 0$
- Jeżeli pierścień P jest niezerowy, to $0 \neq 1$
- $a \cdot (-b) = -ab$
- $(-a) \cdot (-b) = ab$
- $a \cdot (b - c) = ab - ac$
- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}$ (wzór Newtona)
- $na \pm ma = (n \pm m)a$
- $(na) \cdot (mb) = (nm)(a \cdot b)$

W ciele K dodatkowo można określić

- **dzielenie** przez element różny od zera: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$,

W ciele K dodatkowo można określić

- **dzielenie** przez element różny od zera: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$,
- **potęgę** o wykładniku całkowitym (w grupie multiplikatywnej tego ciała).

W ciele K dodatkowo można określić

- **dzielenie** przez element różny od zera: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$,
- **potęgę** o wykładniku całkowitym (w grupie multiplikatywnej tego ciała).

W ciele K dodatkowo można określić

- **dzielenie** przez element różny od zera: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$,
- **potęgę** o wykładniku całkowitym (w grupie multiplikatywnej tego ciała).

i wtedy dla $a, b, c \in K$ mamy jeszcze:

W ciele K dodatkowo można określić

- **dzielenie** przez element różny od zera: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$,
- **potęgę** o wykładniku całkowitym (w grupie multiplikatywnej tego ciała).

i wtedy dla $a, b, c \in K$ mamy jeszcze:

- $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a$, o ile $a \neq 0$

Po dowody wszystkich własności zajrzyj do [Białynicki-Birula, *Algebra*, rozdz. 1.4]

W ciele K dodatkowo można określić

- **dzielenie** przez element różny od zera: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$,
- **potęgę** o wykładniku całkowitym (w grupie multiplikatywnej tego ciała).

i wtedy dla $a, b, c \in K$ mamy jeszcze:

- $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a$, o ile $a \neq 0$
- $ab = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{lub} \quad b = 0$

Po dowody wszystkich własności zajrzyj do [Białynicki-Birula, *Algebra*, rozdz. 1.4]

W ciele K dodatkowo można określić

- **dzielenie** przez element różny od zera: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$,
- **potęgę** o wykładniku całkowitym (w grupie multiplikatywnej tego ciała).

i wtedy dla $a, b, c \in K$ mamy jeszcze:

- $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a$, o ile $a \neq 0$
- $ab = 0 \iff a = 0 \text{ lub } b = 0$
- $ac = bc \text{ i } c \neq 0 \implies a = b$

Po dowody wszystkich własności zajrzyj do [Białynicki-Birula, *Algebra*, rozdz. 1.4]

W ciele K dodatkowo można określić

- **dzielenie** przez element różny od zera: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$,
- **potęgę** o wykładniku całkowitym (w grupie multiplikatywnej tego ciała).

i wtedy dla $a, b, c \in K$ mamy jeszcze:

- $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a$, o ile $a \neq 0$
- $ab = 0 \iff a = 0$ lub $b = 0$
- $ac = bc$ i $c \neq 0 \implies a = b$
- $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$, o ile $bd \neq 0$

Po dowody wszystkich własności zajrzyj do [Białynicki-Birula, *Algebra*, rozdz. 1.4]

W ciele K dodatkowo można określić

- **dzielenie** przez element różny od zera: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$,
- **potęgę** o wykładniku całkowitym (w grupie multiplikatywnej tego ciała).

i wtedy dla $a, b, c \in K$ mamy jeszcze:

- $\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a$, o ile $a \neq 0$
- $ab = 0 \iff a = 0 \text{ lub } b = 0$
- $ac = bc \text{ i } c \neq 0 \implies a = b$
- $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$, o ile $bd \neq 0$
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$, o ile $bd \neq 0$

Po dowody wszystkich własności zajrzyj do [Białynicki-Birula, *Algebra*, rozdz. 1.4]

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P$, $b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P$, $b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P,\ b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P$, $b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

  Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym**, jeśli P nie posiada niezerowych dzielników zera.

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P,\ b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

  Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym**, jeśli P nie posiada niezerowych dzielników zera.

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P$, $b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

  Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym**, jeśli P nie posiada niezerowych dzielników zera.

Przykłady

- 0 jest dzielnikiem zera w pierścieniu P wtedy i tylko wtedy, gdy $P \neq \{0\}$.

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P$, $b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym**, jeśli P nie posiada niezerowych dzielników zera.

Przykłady

- 0 jest dzielnikiem zera w pierścieniu P wtedy i tylko wtedy, gdy $P \neq \{0\}$.
- Element $(1, 0)$ jest dzielnikiem zera w pierścieniu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, gdyż $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$.

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P$, $b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

  Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym**, jeśli P nie posiada niezerowych dzielników zera.

Przykłady

- 0 jest dzielnikiem zera w pierścieniu P wtedy i tylko wtedy, gdy $P \neq \{0\}$.
- Element $(1, 0)$ jest dzielnikiem zera w pierścieniu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, gdyż $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$.
- Każde ciało oraz pierścień $\mathbb{Z}$ są pierścieniami całkowitymi.

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P$, $b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

  Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym**, jeśli P nie posiada niezerowych dzielników zera.

Przykłady

- 0 jest dzielnikiem zera w pierścieniu P wtedy i tylko wtedy, gdy $P \neq \{0\}$.
- Element $(1, 0)$ jest dzielnikiem zera w pierścieniu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, gdyż $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$.
- Każde ciało oraz pierścień $\mathbb{Z}$ są pierścieniami całkowitymi.
- Elementami odwracalnymi w pierścieniu $\mathbb{Z}$ są jedynie -1, 1.

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P$, $b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym**, jeśli P nie posiada niezerowych dzielników zera.

Przykłady

- 0 jest dzielnikiem zera w pierścieniu P wtedy i tylko wtedy, gdy $P \neq \{0\}$.
- Element $(1, 0)$ jest dzielnikiem zera w pierścieniu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, gdyż $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$.
- Każde ciało oraz pierścień $\mathbb{Z}$ są pierścieniami całkowitymi.
- Elementami odwracalnymi w pierścieniu $\mathbb{Z}$ są jedynie -1, 1.
- W pierścieniu $\mathbb{Z}_6$ element 2 jest dzielnikiem zera, bo $2 \cdot 3 = 0$, a 5 jest elementem odwracalnym, bo $5 \cdot 5 = 1$.

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P$, $b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym**, jeśli P nie posiada niezerowych dzielników zera.

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P$, $b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

  Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym**, jeśli P nie posiada niezerowych dzielników zera.

Stwierdzenie

- Jeśli $a \cdot b = a \cdot c$ oraz a jest elementem regularnym, to $b = c$.

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P$, $b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

  Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym**, jeśli P nie posiada niezerowych dzielników zera.

Stwierdzenie

- Jeśli $a \cdot b = a \cdot c$ oraz a jest elementem regularnym, to $b = c$.
- Iloczyn elementów regularnych jest elementem regularnym.

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P$, $b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

  Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym**, jeśli P nie posiada niezerowych dzielników zera.

Stwierdzenie

- Jeśli $a \cdot b = a \cdot c$ oraz a jest elementem regularnym, to $b = c$.
- Iloczyn elementów regularnych jest elementem regularnym.
- Element odwracalny jest elementem regularnym.

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P$, $b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

  Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym**, jeśli P nie posiada niezerowych dzielników zera.

Stwierdzenie

- Jeśli $a \cdot b = a \cdot c$ oraz a jest elementem regularnym, to $b = c$.
- Iloczyn elementów regularnych jest elementem regularnym.
- Element odwracalny jest elementem regularnym.
- Zbiór elementów odwracalnych pierścienia P wraz z działaniem mnożenie tworzy grupę (ozn. $U(P)$ lub P^*).

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P,\ b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym**, jeśli P nie posiada niezerowych dzielników zera.

Stwierdzenie

- Jeśli $a \cdot b = a \cdot c$ oraz a jest elementem regularnym, to $b = c$.
- Iloczyn elementów regularnych jest elementem regularnym.
- Element odwracalny jest elementem regularnym.
- Zbiór elementów odwracalnych pierścienia P wraz z działaniem mnożenie tworzy grupę (ozn. $U(P)$ lub P^*).

Definicje

Element a pierścienia P nazywamy:

- **dzielnikiem zera**, jeśli istnieje element $b \in P$, $b \neq 0$, taki, że $a \cdot b = 0$,
- **elementem regularnym**, jeśli a nie jest dzielnikiem zera,
- **elementem odwracalnym**, jeśli istnieje element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 1$.

  Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym**, jeśli P nie posiada niezerowych dzielników zera.

Stwierdzenie

- Jeśli $a \cdot b = a \cdot c$ oraz a jest elementem regularnym, to $b = c$.
- Iloczyn elementów regularnych jest elementem regularnym.
- Element odwracalny jest elementem regularnym.
- Zbiór elementów odwracalnych pierścienia P wraz z działaniem mnożenie tworzy grupę (ozn. $U(P)$ lub P^*).

Dowód na tablicy.

Definicja

Podzbiór P_1 pierścienia P nazywamy **podpierścieniem** pierścienia P (ozn. $P_1 < P$), jeśli

$$1 \in P_1 \quad \text{oraz} \quad \underset{a,b \in P_1}{\forall} \; a - b \in P_1, \;\; a \cdot b \in P_1.$$

Definicja

Podzbiór P_1 pierścienia P nazywamy **podpierścieniem** pierścienia P (ozn. $P_1 < P$), jeśli

$$1 \in P_1 \quad \text{oraz} \quad \underset{a,b \in P_1}{\forall} \quad a - b \in P_1, \quad a \cdot b \in P_1.$$

Uwaga

Niech $P_1 < P$.

- Działania $+$ oraz $\cdot$ zacieśnione do podzbioru P_1 są działaniami w zbiorze P_1,

Definicja

Podzbiór P_1 pierścienia P nazywamy **podpierścieniem** pierścienia P (ozn. $P_1 < P$), jeśli

$$1 \in P_1 \text{ oraz } \underset{a,b \in P_1}{\forall} \; a - b \in P_1, \; a \cdot b \in P_1.$$

Uwaga

Niech $P_1 < P$.

- Działania $+$ oraz $\cdot$ zacieśnione do podzbioru P_1 są działaniami w zbiorze P_1,
- P_1 zawiera oba elementy neutralne,

Definicja

Podzbiór P_1 pierścienia P nazywamy **podpierścieniem** pierścienia P (ozn. $P_1 < P$), jeśli

$$1 \in P_1 \ \text{ oraz } \ \underset{a,b \in P_1}{\forall} \ a - b \in P_1, \ \ a \cdot b \in P_1.$$

Uwaga

Niech $P_1 < P$.

- Działania $+$ oraz $\cdot$ zacieśnione do podzbioru P_1 są działaniami w zbiorze P_1,
- P_1 zawiera oba elementy neutralne,
- Zbiór P_1 z tym zacieśnionymi działaniami jest znowu pierścieniem.

Definicja

Podzbiór P_1 pierścienia P nazywamy **podpierścieniem** pierścienia P (ozn. $P_1 < P$), jeśli

$$1 \in P_1 \quad \text{oraz} \quad \underset{a,b \in P_1}{\forall} \quad a - b \in P_1, \quad a \cdot b \in P_1.$$

Uwaga

Niech $P_1 < P$.

- Działania $+$ oraz $\cdot$ zacieśnione do podzbioru P_1 są działaniami w zbiorze P_1,
- P_1 zawiera oba elementy neutralne,
- Zbiór P_1 z tym zacieśnionymi działaniami jest znowu pierścieniem.

Definicja

Podzbiór P_1 pierścienia P nazywamy **podpierścieniem** pierścienia P (ozn. $P_1 < P$), jeśli

$$1 \in P_1 \text{ oraz } \underset{a,b \in P_1}{\forall} \quad a - b \in P_1, \quad a \cdot b \in P_1.$$

Uwaga

Niech $P_1 < P$.

- Działania $+$ oraz $\cdot$ zacieśnione do podzbioru P_1 są działaniami w zbiorze P_1,
- P_1 zawiera oba elementy neutralne,
- Zbiór P_1 z tym zacieśnionymi działaniami jest znowu pierścieniem.

Przykłady podpierścieni

$$P < P,$$

Definicja

Podzbiór P_1 pierścienia P nazywamy **podpierścieniem** pierścienia P (ozn. $P_1 < P$), jeśli

$$1 \in P_1 \quad \text{oraz} \quad \underset{a,b \in P_1}{\forall} \quad a - b \in P_1, \quad a \cdot b \in P_1.$$

Uwaga

Niech $P_1 < P$.

- Działania $+$ oraz $\cdot$ zacieśnione do podzbioru P_1 są działaniami w zbiorze P_1,
- P_1 zawiera oba elementy neutralne,
- Zbiór P_1 z tym zacieśnionymi działaniami jest znowu pierścieniem.

Przykłady podpierścieni

$$P < P, \quad \mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R},$$

Definicja

Podzbiór P_1 pierścienia P nazywamy **podpierścieniem** pierścienia P (ozn. $P_1 < P$), jeśli

$$1 \in P_1 \text{ oraz } \underset{a,b \in P_1}{\forall} \quad a - b \in P_1, \quad a \cdot b \in P_1.$$

Uwaga

Niech $P_1 < P$.

- Działania $+$ oraz $\cdot$ zacieśnione do podzbioru P_1 są działaniami w zbiorze P_1,
- P_1 zawiera oba elementy neutralne,
- Zbiór P_1 z tym zacieśnionymi działaniami jest znowu pierścieniem.

Przykłady podpierścieni

$$P < P, \quad \mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R}, \quad \mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : p \nmid n\} < \mathbb{Q}, \ (p \in \mathbb{P}),$$

Definicja

Podzbiór P_1 pierścienia P nazywamy **podpierścieniem** pierścienia P (ozn. $P_1 < P$), jeśli

$$1 \in P_1 \quad \text{oraz} \quad \underset{a,b \in P_1}{\forall} \quad a - b \in P_1, \quad a \cdot b \in P_1.$$

Uwaga

Niech $P_1 < P$.

- Działania $+$ oraz $\cdot$ zacieśnione do podzbioru P_1 są działaniami w zbiorze P_1,
- P_1 zawiera oba elementy neutralne,
- Zbiór P_1 z tym zacieśnionymi działaniami jest znowu pierścieniem.

Przykłady podpierścieni

$$P < P, \quad \mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R}, \quad \mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : p \not| n\} < \mathbb{Q}, \ (p \in \mathbb{P}), \quad \mathbb{Z}[\sqrt{2}] < \mathbb{R}.$$

Definicja

Niepusty podzbiór K ciała L nazywamy **podciałem** ciała L (ozn. $K < L$), jeśli

$$\underset{a,b \in K, b \neq 0}{\forall} \quad a - b \in K, \quad a \cdot b^{-1} \in K.$$

Definicja

Niepusty podzbiór K ciała L nazywamy **podciałem** ciała L (ozn. $K < L$), jeśli

$$\forall_{a,b \in K, b \neq 0} \quad a - b \in K, \ \ a \cdot b^{-1} \in K.$$

Uwaga

Niech $K < L$.

- Działania $+$ oraz $\cdot$ zacieśnione do podzbioru K są działaniami w zbiorze K,

Definicja

Niepusty podzbiór K ciała L nazywamy **podciałem** ciała L (ozn. $K < L$), jeśli

$$\forall_{a,b\in K, b\neq 0} \quad a - b \in K, \;\; a \cdot b^{-1} \in K.$$

Uwaga

Niech $K < L$.

- Działania $+$ oraz $\cdot$ zacieśnione do podzbioru K są działaniami w zbiorze K,
- K zawiera oba elementy neutralne,

Definicja

Niepusty podzbiór K ciała L nazywamy **podciałem** ciała L (ozn. $K < L$), jeśli

$$\forall_{a,b \in K, b \neq 0} \quad a - b \in K, \quad a \cdot b^{-1} \in K.$$

Uwaga

Niech $K < L$.

- Działania $+$ oraz $\cdot$ zacieśnione do podzbioru K są działaniami w zbiorze K,
- K zawiera oba elementy neutralne,
- Zbiór K z tym zacieśnionymi działaniami jest znowu ciałem.

Definicja

Niepusty podzbiór K ciała L nazywamy **podciałem** ciała L (ozn. $K < L$), jeśli

$$\underset{a,b\in K, b\neq 0}{\forall} \quad a-b\in K, \ \ a\cdot b^{-1}\in K.$$

Uwaga

Niech $K < L$.

- Działania $+$ oraz $\cdot$ zacieśnione do podzbioru K są działaniami w zbiorze K,
- K zawiera oba elementy neutralne,
- Zbiór K z tym zacieśnionymi działaniami jest znowu ciałem.

Definicja

Niepusty podzbiór K ciała L nazywamy **podciałem** ciała L (ozn. $K < L$), jeśli

$$\underset{a,b\in K, b\neq 0}{\forall} a - b \in K, \ \ a \cdot b^{-1} \in K.$$

Uwaga

Niech $K < L$.

- Działania $+$ oraz $\cdot$ zacieśnione do podzbioru K są działaniami w zbiorze K,
- K zawiera oba elementy neutralne,
- Zbiór K z tym zacieśnionymi działaniami jest znowu ciałem.

Przykłady podciał

$$L < L,$$

Definicja

Niepusty podzbiór K ciała L nazywamy **podciałem** ciała L (ozn. $K < L$), jeśli

$$\forall_{a,b\in K, b\neq 0} \quad a - b \in K, \quad a \cdot b^{-1} \in K.$$

Uwaga

Niech $K < L$.

- Działania $+$ oraz $\cdot$ zacieśnione do podzbioru K są działaniami w zbiorze K,
- K zawiera oba elementy neutralne,
- Zbiór K z tym zacieśnionymi działaniami jest znowu ciałem.

Przykłady podciał

$$L < L, \quad \mathbb{Q} < \mathbb{Q}(\sqrt{2}) < \mathbb{R}.$$

Definicja

Niech $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ będą grupami. Odwzorowanie $f : G \longrightarrow G_1$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,

Definicja

Niech $(G,*)$ oraz $(G_1,*_1)$ będą grupami. Odwzorowanie $f: G \longrightarrow G_1$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a*b) = f(a) *_1 f(b)$ dla każdych $a, b \in G$.

Definicja

Niech $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ będą grupami. Odwzorowanie $f : G \longrightarrow G_1$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a * b) = f(a) *_1 f(b)$ dla każdych $a, b \in G$.

Definicja

Niech $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ będą grupami. Odwzorowanie $f : G \longrightarrow G_1$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a * b) = f(a) *_1 f(b)$ dla każdych $a, b \in G$.

Grupy $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi grupami.

Definicja

Niech $(G,*)$ oraz $(G_1,*_1)$ będą grupami. Odwzorowanie $f : G \longrightarrow G_1$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a*b) = f(a) *_1 f(b)$ dla każdych $a, b \in G$.

Grupy $(G,*)$ oraz $(G_1,*_1)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi grupami.

Przykład

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z działaniem: $a \circ b = a + b + 1$, jest grupą (zad. 3, zestaw 2).

Definicja

Niech $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ będą grupami. Odwzorowanie $f : G \longrightarrow G_1$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a * b) = f(a) *_1 f(b)$ dla każdych $a, b \in G$.

Grupy $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi grupami.

Przykład

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z działaniem: $a \circ b = a + b + 1$, jest grupą (zad. 3, zestaw 2). Pokażemy, że ta grupa jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{R}, +)$.

Definicja

Niech $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ będą grupami. Odwzorowanie $f : G \longrightarrow G_1$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a * b) = f(a) *_1 f(b)$ dla każdych $a, b \in G$.

Grupy $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi grupami.

Przykład

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z działaniem: $a \circ b = a + b + 1$, jest grupą (zad. 3, zestaw 2).
Pokażemy, że ta grupa jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{R}, +)$.
Określmy odwzorowanie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(a) = a + 1$.

Definicja

Niech $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ będą grupami. Odwzorowanie $f : G \longrightarrow G_1$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a * b) = f(a) *_1 f(b)$ dla każdych $a, b \in G$.

Grupy $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi grupami.

Przykład

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z działaniem: $a \circ b = a + b + 1$, jest grupą (zad. 3, zestaw 2).
Pokażemy, że ta grupa jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{R}, +)$.
Określmy odwzorowanie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(a) = a + 1$.
Odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne (tzn. różnowartościowe oraz "na" całe $\mathbb{R}$).

Definicja

Niech $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ będą grupami. Odwzorowanie $f : G \longrightarrow G_1$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a * b) = f(a) *_1 f(b)$ dla każdych $a, b \in G$.

Grupy $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi grupami.

Przykład

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z działaniem: $a \circ b = a + b + 1$, jest grupą (zad. 3, zestaw 2).
Pokażemy, że ta grupa jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{R}, +)$.
Określmy odwzorowanie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(a) = a + 1$.
Odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne (tzn. różnowartościowe oraz "na" całe $\mathbb{R}$).
Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Zachodzą równości

$$f(a \circ b) =$$

Definicja

Niech $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ będą grupami. Odwzorowanie $f : G \longrightarrow G_1$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a * b) = f(a) *_1 f(b)$ dla każdych $a, b \in G$.

Grupy $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi grupami.

Przykład

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z działaniem: $a \circ b = a + b + 1$, jest grupą (zad. 3, zestaw 2).
Pokażemy, że ta grupa jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{R}, +)$.
Określmy odwzorowanie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(a) = a + 1$.
Odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne (tzn. różnowartościowe oraz "na" całe $\mathbb{R}$).
Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Zachodzą równości

$$f(a \circ b) = f(a + b + 1) =$$

Definicja

Niech $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ będą grupami. Odwzorowanie $f : G \longrightarrow G_1$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a * b) = f(a) *_1 f(b)$ dla każdych $a, b \in G$.

Grupy $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi grupami.

Przykład

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z działaniem: $a \circ b = a + b + 1$, jest grupą (zad. 3, zestaw 2).
Pokażemy, że ta grupa jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{R}, +)$.
Określmy odwzorowanie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(a) = a + 1$.
Odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne (tzn. różnowartościowe oraz "na" całe $\mathbb{R}$).
Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Zachodzą równości

$$f(a \circ b) = f(a + b + 1) = (a + b + 1) + 1 =$$

Definicja

Niech $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ będą grupami. Odwzorowanie $f : G \longrightarrow G_1$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a * b) = f(a) *_1 f(b)$ dla każdych $a, b \in G$.

Grupy $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi grupami.

Przykład

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z działaniem: $a \circ b = a + b + 1$, jest grupą (zad. 3, zestaw 2).
Pokażemy, że ta grupa jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{R}, +)$.
Określmy odwzorowanie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(a) = a + 1$.
Odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne (tzn. różnowartościowe oraz "na" całe $\mathbb{R}$).
Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Zachodzą równości

$$f(a \circ b) = f(a + b + 1) = (a + b + 1) + 1 = (a + 1) + (b + 1) =$$

Definicja

Niech $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ będą grupami. Odwzorowanie $f : G \longrightarrow G_1$ nazywamy **izomorfizmem grup**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a * b) = f(a) *_1 f(b)$ dla każdych $a, b \in G$.

Grupy $(G, *)$ oraz $(G_1, *_1)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi grupami.

Przykład

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z działaniem: $a \circ b = a + b + 1$, jest grupą (zad. 3, zestaw 2).
Pokażemy, że ta grupa jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{R}, +)$.
Określmy odwzorowanie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(a) = a + 1$.
Odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne (tzn. różnowartościowe oraz "na" całe $\mathbb{R}$).
Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Zachodzą równości

$$f(a \circ b) = f(a + b + 1) = (a + b + 1) + 1 = (a + 1) + (b + 1) = f(a) + f(b),$$

więc spełniony jest drugi warunek z definicji izomorfizmu.

Definicja

Niech $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ będą pierścieniami (ciałami). Odwzorowanie $f : P \longrightarrow P_1$ nazywamy **izomorfizmem pierścieni (ciał)**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,

Definicja

Niech $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ będą pierścieniami (ciałami). Odwzorowanie $f : P \longrightarrow P_1$ nazywamy **izomorfizmem pierścieni (ciał)**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$ dla każdych $a, b \in P$,

Definicja

Niech $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ będą pierścieniami (ciałami). Odwzorowanie $f : P \longrightarrow P_1$ nazywamy **izomorfizmem pierścieni (ciał)**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$ dla każdych $a, b \in P$,
- $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$ dla każdych $a, b \in P$.

Definicja

Niech $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ będą pierścieniami (ciałami). Odwzorowanie $f : P \longrightarrow P_1$ nazywamy **izomorfizmem pierścieni (ciał)**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$ dla każdych $a, b \in P$,
- $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$ dla każdych $a, b \in P$.

Definicja

Niech $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ będą pierścieniami (ciałami). Odwzorowanie $f : P \longrightarrow P_1$ nazywamy **izomorfizmem pierścieni (ciał)**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$ dla każdych $a, b \in P$,
- $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$ dla każdych $a, b \in P$.

Pierścienie (ciała) $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi pierścieniami (ciałami).

Definicja

Niech $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ będą pierścieniami (ciałami). Odwzorowanie $f : P \longrightarrow P_1$ nazywamy **izomorfizmem pierścieni (ciał)**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$ dla każdych $a, b \in P$,
- $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$ dla każdych $a, b \in P$.

Pierścienie (ciała) $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi pierścieniami (ciałami).

Przykład Zbiór $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, z działaniami

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc),$$

jest ciałem (zad. 24, zestaw 2).
Pokażemy, że $f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}^2, \quad f(a + b\sqrt{2}) = (a, b)$, jest izomorfizmem ciał.
Odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne. Zachodzą równości

Definicja

Niech $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ będą pierścieniami (ciałami). Odwzorowanie $f : P \longrightarrow P_1$ nazywamy **izomorfizmem pierścieni (ciał)**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$ dla każdych $a, b \in P$,
- $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$ dla każdych $a, b \in P$.

Pierścienie (ciała) $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi pierścieniami (ciałami).

Przykład Zbiór $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, z działaniami

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc),$$

jest ciałem (zad. 24, zestaw 2).
Pokażemy, że $f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}^2$, $\;f(a + b\sqrt{2}) = (a, b)$, jest izomorfizmem ciał.
Odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne. Zachodzą równości

$$f((a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})) =$$

Definicja

Niech $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ będą pierścieniami (ciałami). Odwzorowanie $f : P \longrightarrow P_1$ nazywamy **izomorfizmem pierścieni (ciał)**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$ dla każdych $a, b \in P$,
- $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$ dla każdych $a, b \in P$.

Pierścienie (ciała) $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi pierścieniami (ciałami).

Przykład Zbiór $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, z działaniami

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc),$$

jest ciałem (zad. 24, zestaw 2).
Pokażemy, że $f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}^2, \quad f(a + b\sqrt{2}) = (a, b)$, jest izomorfizmem ciał.
Odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne. Zachodzą równości

$$f((a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})) = f((a + c) + (b + d)\sqrt{2}) =$$

Definicja

Niech $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ będą pierścieniami (ciałami). Odwzorowanie $f : P \longrightarrow P_1$ nazywamy **izomorfizmem pierścieni (ciał)**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$ dla każdych $a, b \in P$,
- $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$ dla każdych $a, b \in P$.

Pierścienie (ciała) $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi pierścieniami (ciałami).

Przykład Zbiór $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, z działaniami

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc),$$

jest ciałem (zad. 24, zestaw 2).
Pokażemy, że $f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}^2, \quad f(a + b\sqrt{2}) = (a, b)$, jest izomorfizmem ciał.
Odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne. Zachodzą równości

$$f((a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})) = f((a + c) + (b + d)\sqrt{2}) = (a + c, b + d) =$$

Definicja

Niech $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ będą pierścieniami (ciałami). Odwzorowanie $f : P \longrightarrow P_1$ nazywamy **izomorfizmem pierścieni (ciał)**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$ dla każdych $a, b \in P$,
- $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$ dla każdych $a, b \in P$.

Pierścienie (ciała) $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi pierścieniami (ciałami).

Przykład Zbiór $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, z działaniami

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc),$$

jest ciałem (zad. 24, zestaw 2).
Pokażemy, że $f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}^2, \quad f(a + b\sqrt{2}) = (a, b)$, jest izomorfizmem ciał.
Odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne. Zachodzą równości

$$f((a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})) = f((a + c) + (b + d)\sqrt{2}) = (a + c, b + d) =$$

$$= (a, b) \oplus (c, d) =$$

Definicja

Niech $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ będą pierścieniami (ciałami). Odwzorowanie $f : P \longrightarrow P_1$ nazywamy **izomorfizmem pierścieni (ciał)**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$ dla każdych $a, b \in P$,
- $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$ dla każdych $a, b \in P$.

Pierścienie (ciała) $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi pierścieniami (ciałami).

Przykład Zbiór $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, z działaniami

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \ \ (a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc),$$

jest ciałem (zad. 24, zestaw 2).
Pokażemy, że $f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}^2$, $\ f(a + b\sqrt{2}) = (a, b)$, jest izomorfizmem ciał.
Odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne. Zachodzą równości

$$f((a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})) = f((a + c) + (b + d)\sqrt{2}) = (a + c, b + d) =$$

$$= (a, b) \oplus (c, d) = f(a + b\sqrt{2}) \oplus f(c + d\sqrt{2}),$$

Definicja

Niech $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ będą pierścieniami (ciałami). Odwzorowanie $f : P \longrightarrow P_1$ nazywamy **izomorfizmem pierścieni (ciał)**, jeśli

- f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym,
- $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$ dla każdych $a, b \in P$,
- $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$ dla każdych $a, b \in P$.

Pierścienie (ciała) $(P, +, \cdot)$ oraz $(P_1, \oplus, \odot)$ nazywamy **izomorficznymi**, jeśli istnieje izomorfizm pomiędzy tymi pierścieniami (ciałami).

Przykład Zbiór $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, z działaniami

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc),$$

jest ciałem (zad. 24, zestaw 2).
Pokażemy, że $f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}^2, \quad f(a + b\sqrt{2}) = (a, b)$, jest izomorfizmem ciał.
Odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne. Zachodzą równości

$$f((a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2})) = f((a \cdot c + 2b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)\sqrt{2}) = (a \cdot c + 2b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) =$$

$$= (a, b) \odot (c, d) = f(a + b\sqrt{2}) \odot f(c + d\sqrt{2}).$$

I to już koniec wykładu 2!

♡♡♡

Dziękuję za uwagę