

Zadania ze wstępu do algebry i teorii liczb

Zestaw specjalny

1. Na ile sposobów można zapisać 19997 w postaci $19x + 97y$ dla $x, y \in \mathbb{N}$? Podaj rozwiązanie z największym x .
2. Sprawdzić, że zbiór $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ z działaniem $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ jest grupą abelową.
3. Pokazać, że zbiór liczb całkowitych \mathbb{Z} z działaniem: $x * y := x + (-1)^x y$ jest grupą. Czy jest to grupa abelowa? Sprawdzić, że podzbiory: (a) podzbiór liczb parzystych, (b) $\{0, (2k+1)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, są podgrupami tej grupy.
4. Pokazać, że grupa z zadania 2 jest izomorficzna z grupą $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ze zwykłym działaniem mnożenia.
5. Znajdź ostatnie dwie cyfry liczb 8^{1786} oraz 7^{1786} .
6. Znajdź reszty z dzielenia liczb 8^{1786} oraz 7^{1786} przez 21.

7. Rozwiąż układy kongruencji:

$$\text{a) } \begin{cases} X \equiv 4 \pmod{5} \\ X \equiv 1 \pmod{12} \\ X \equiv 7 \pmod{14} \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} X \equiv 1 \pmod{25} \\ X \equiv 2 \pmod{4} \\ X \equiv 3 \pmod{7} \\ X \equiv 4 \pmod{9} \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} 3X \equiv 7 \pmod{10} \\ 2X \equiv 5 \pmod{15} \\ 7X \equiv 5 \pmod{12} \end{cases} .$$

8. Znajdź rozwiązania zespolone równania $X^2 - (1 + 8i)X - 17 + 7i = 0$.

9. Oblicz $(-\sqrt{3} - i)^{1282}$.

10. Oblicz NWD(f, g), gdzie $f = 2X^3 + 3X^2 + 5X + 2$, $g = X^4 + X^3 + 2X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

11. Oblicz wyznacznik (nad \mathbb{R}) macierzy
$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 4 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

12. Oblicz wyznacznik (nad \mathbb{Z}_9) macierzy
$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 & 0 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Sprawdzić czy macierz o współczynnikach rzeczywistych
$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 jest odwracalna i w przypadku pozytywnej odpowiedzi znaleźć macierz do niej odwrotną.

14. Rozwiąż układ równań macierzowych
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \end{cases} .$$

15. Rozwiązać nad ciałem \mathbb{R} liczb rzeczywistych następujące układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7t = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 15y + 13z + 18t = 1 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases}$$

16. Rozwiąż nad \mathbb{Z}_{11} układ równań
$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z + 3t + 4w = 5 \\ 4x + 2y + z + 2t + w = 4 \\ 4x + 2y + 3z + 2t + w = 0 \\ 2x + y + 7z + 3t + 2w = 1 \end{cases}$$

17. W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiąż układ równań:
$$\begin{cases} X_1 + X_2 + aX_3 = 0 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 = 2 \\ 2X_1 + 3X_2 + 2X_3 = b \end{cases} .$$

18. W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

$$(a) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + ay + 2z = b \end{cases} , \quad (b) \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = 1 \\ x + y + z + t = b \end{cases} .$$

19. Dla jakich $a, b \in \mathbb{Z}_{11}$ układy U_1 oraz U_2 mają równe zbiory rozwiązań, jeśli

$$U_1 : \begin{cases} x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases} \quad U_2 : \begin{cases} 4x + 5y + az = 4 \\ 3x + by = 3 \end{cases} .$$

20. Rozwiązać za pomocą wzorów Cramera następujące układy równań nad ciałem \mathbb{Q} :

$$(a) \begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases} , \quad (b) \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases} ,$$

$$(c) \begin{cases} x + y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases} , \quad (d) \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ 3x - y - z - 2t = -4 \\ 2x + 3y - z - t = -6 \\ x + 2y + 3z - t = -4 \end{cases} .$$