Wstęp do algebry i teorii liczb
Wzory Cardano

Zajmiemy się wyprowadzeniem wzorów na pierwiastki równania

$$b_3T^3 + b_2T^2 + b_1T + b_0 = 0,\ b_i \in \mathbb{C}, b_3 \neq 0 \tag{1}$$

Pierwsze uproszczenie (dzielimy przez b_3)

$$T^3 + a_2T^2 + a_1T + a_0 = 0,\ a_i \in \mathbb{C} \tag{2}$$

Podstawiamy $T = X - \frac{a_2}{3}$ i wtedy znika współczynnik przy T^2.

Ostatecznie wystarczy umieć rozwiązywać równanie postaci

$$X^3 + pX + q = 0. \tag{3}$$

Możemy założyć $p \neq 0$.

Stosujemy kolejne podstawienie $X = Y - \frac{p}{3Y}$

otrzymując równanie

$$Y^3 - \frac{p^3}{27Y^3} + q = 0. \tag{4}$$

Kolejne podstawienie $Y^3 = Z$ i wtedy mamy tzw. równanie rozwiązujące (rezolwenta)

$$Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{5}$$

Niech z oraz z' będą rozwiązaniami rezolwenty. Wtedy

$$y^3 = z \quad\longrightarrow\quad y_1,\ y_2 = \varepsilon y_1,\ y_3 = \varepsilon^2 y_1 \quad\longrightarrow\quad x_1 = y_1 - \frac{p}{3y_1},\ x_2 = y_2 - \frac{p}{3y_2},\ x_3 = y_3 - \frac{p}{3y_3}.$$

Ponieważ $zz' = \frac{-p^3}{27}$, więc $z' = \frac{-p^3}{27y_1^3}$ oraz

$$y^3 = z' \quad\longrightarrow\quad y_1' = -\frac{p}{3y_1},\ \ y_2' = \varepsilon y_1' = -\varepsilon\frac{p}{3y_1} = -\frac{p}{3\varepsilon^2 y_1} = -\frac{p}{3y_3},\ \ y_3' = \varepsilon^2 y_1' = -\varepsilon^2\frac{p}{3y_1} = -\frac{p}{3\varepsilon y_1} = -\frac{p}{3y_2}.$$

Stąd

$$x_1 = y_1 - \frac{p}{3y_1} = y_1' - \frac{p}{3y_1'} = x_1',\ \ x_2 = y_2 - \frac{p}{3y_2} = y_3' - \frac{p}{3y_3'} = x_3',\ \ x_3 = y_3 - \frac{p}{3y_3} = y' - 2 - \frac{p}{3y_2'} = x_2'.$$

Zatem nie jest ważne, które z rozwiązań z i z' rezolwenty wybierzemy do obliczenia x. Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że

$$x_1 = y_1 + y_1',\ \ x_2 = \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_1',\ \ x_3 = \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon y_1'. \tag{6}$$

Twierdzenie
Pierwiastki równania $X^3 + pX + q = 0$ dane są wzorami

$$x_1 = y_1 + y_1',\ \ x_2 = \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_1',\ \ x_3 = \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon y_1', \tag{7}$$

gdzie

$$y_1^3 = z,\ \ {y'}_1^3 = z',$$

z i z' są pierwiastkami równania

$$Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0,$$

a y_1, y_1' są tak dobrane, aby $y_1y_1' = -\frac{p}{3}$.

Definicja
Wyróżnikiem rónania $X^3 + pX + q = 0$ nazywamy

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = 4\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right).$$

Twierdzenie
Równanie $X^3 + pX + q = 0$ ma pierwiastki wielokrotne wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = 0$.

Dowód.

$$\Delta = 0 \Longrightarrow z = z' \Longrightarrow (y_1 = y_1' \text{ albo } y_1 = \varepsilon y_1' \text{ albo } y_1 = \varepsilon^2 y_1') \Longrightarrow (x_2 = x_3 \text{ albo } x_1 = x_3 \text{ albo } x_1 = x_2).$$

$$x_2 = x_3 \Longrightarrow y_1 + \varepsilon y_1' = \varepsilon y_1 + y_1' \Longrightarrow y_1(1-\varepsilon) = y_1'(1-\varepsilon) \Longrightarrow y_1 = y_1' \Longrightarrow z = z' \Longrightarrow \Delta = 0. \quad \P$$

Twierdzenie
jeśli $p, q \in \mathbb{R}$, to pierwiastki równania $X^3 + pX + q = 0$

a) są rzeczywiste i różne, gdy $\Delta < 0$;

b) są rzeczywiste i co najmniej dwa równe, gdy $\Delta = 0$;

c) jeden jest rzeczywisty, a dwa nierzeczywiste i sprzężone, gdy $\Delta > 0$.

Dowód.
Jeśli $\Delta > 0$, to $z, z' \in \mathbb{R}$. Wybierzmy $y_1^3 = z, y_1 \in \mathbb{R}$. Wtedy $y_1' \in \mathbb{R}$, bo $y_1 y_1' = -\dfrac{p}{3}$.
Stąd $x_1 \in \mathbb{R}$, a $x_2, x_3 \notin \mathbb{R}$ i $\overline{x_2} = x_3$.

Jeśli $\Delta = 0$, to jeden pierwiastek jest rzeczywisty i gdyby pozostałe były nierzeczywiste, to mielibyśmy trzy różne pierwiastki, co nie jest możliwe.

Rozważmy pozostały przypadek (przypadek nieprzywiedlny) $\Delta < 0$.
Niech
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z' = r(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$
Wtedy
$$y_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right), \quad y_1' = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right).$$
Wtedy uwzględniając $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ otrzymujemy

$$x_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}, \quad x_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3}, \quad x_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}$$

Zatem pierwiastki x_1, x_2, x_3 są różne $\P$

Przykłady
1. Rozwiążmy równanie
$$T^3 - 3T^2 + 6T - 2 = 0.$$
Po podstawieniu $T = X + 1$ otrzymujemy równanie
$$X^3 + 3X + 2 = 0, \quad (p = 3,\ q = 2).$$
Wtedy rezolwenta ma postać
$$Z^2 + 2Z - 1 = 0, \quad \Delta > 0,\ z = -1 - \sqrt{2},\ z' = -1 + \sqrt{2}$$
$$y_1 = -\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}, \quad y_1' = \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}$$
$$x_1 = -\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}$$
$$x_2 = -\varepsilon\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} + \varepsilon^2\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}$$
$$x_3 = -\varepsilon^2\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} + \varepsilon\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}$$
Ostatecznie rozwiązania mają postać
$$t_1 = 1 + x_1, \quad t_2 = 1 + x_2, \quad t_3 = 1 + x_3.$$

2. Rozwiążmy równanie
$$T^3 + 6T^2 + 6T - 2 = 0.$$

Po podstawieniu $T = X - 2$ otrzymujemy równanie

$$X^3 - 6X + 2 = 0, \quad (p = -6,\ q = 2).$$

Rezolwenta ma postać

$$Z^2 + 2Z + 8 = 0, \quad \Delta < 0,\ z = -1 - \sqrt{7}i,\ z' = -1 + \sqrt{7}i.$$

Wtedy

$$|z| = 2\sqrt{2},\ \cos\varphi = -\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \pi < \varphi < 2\pi.$$

$$x_1 = 2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{3} \approx 0,3399, \quad t_1 \approx -1,6601,$$

$$x_2 = 2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{3} \approx 0,3399, \quad t_1 \approx -1,6601,$$

$$x_3 = 2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} \approx 2,2614, \quad t_2 \approx 0,2614.$$

3. Rozwiążmy równanie

$$X^3 - \frac{8}{3}X + \frac{32\sqrt{2}}{27} = 0.$$

U nas $p = -\frac{8}{3},\ q = \frac{32\sqrt{2}}{27}$. Wtedy rezolwenta przyjmuje postać

$$Z^2 + \frac{32\sqrt{2}}{27}Z + \frac{8^3}{3^3 27} = 0, \quad \Delta = 0.$$

Wtedy $z = z' = -\frac{16\sqrt{2}}{27}$ i

$$x_1 = x_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3},\ \ x_3 = -\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$