Zadania ze wstępu do algebry i teorii liczb

Zestaw 8

1. Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych następujące układy równań:

a) $\begin{cases} 2x-3y+5z+7t &= 1 \\ 4x-6y+2z+3t &= 2 \\ 2x-3y-11z-15t &= 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+5y-8z = & 8 \\ 4x+3y-9z = & 9 \\ 2x+3y-5z = & 7 \\ x+8y-7z = & 12 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x+4y+z+2t &= 3 \\ 6x+8y+2z+5t &= 7 \\ 9x+12y+3z+10t &= 13 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x-5y+2z+4t &= 2 \\ 7x-4y+z+3t &= 5 \\ 5x+7y-4z-6t &= 3 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 3x-2y+5z+4t &= 2 \\ 6x-4y+4z+3t &= 3 \\ 9x-6y+3z+2t &= 4 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 8x+6y+5z+2t &= 21 \\ 3x+3y+2z+t &= 10 \\ 4x+2y+3z+t &= 8 \\ 3x+5y+z+t &= 15 \\ 7x+4y+5z+2t &= 18 \end{cases}$;

2. Następujące układy rozwiązać nad $\mathbb{Q}$ oraz nad $\mathbb{Z}_p$:

a) $\begin{cases} 2x+7y+3z+t &= 6 \\ 3x+5y+2z+2t &= 4 \\ 9x+4y+z+7t &= 2 \end{cases}$, $p=11$; b) $\begin{cases} 9x-3y+5z+6t &= 4 \\ 9x-3y+5z+6t &= 4 \\ 3x-y+3z+14t &= -8 \end{cases}$, $p=13$;

c) $\begin{cases} 6x+3y+2z+3t+4w &= 5 \\ 4x+2y+z+2t+w &= 4 \\ 4x+2y+3z+2t+w &= 0 \\ 2x+y+7z+3t+2w &= 1 \end{cases}$, $p=11$ d) $\begin{cases} 2x-y+3z-7t &= 5 \\ 6x-3y+z-4t &= 7 \\ 4x-2y+14z-31t &= 18 \end{cases}$, $p=37$

e) $\begin{cases} x+2y+3z-2t+w &= 4 \\ 3x+6y+5z-4t+3w &= 5 \\ x+2y+7z-4t+w &= 11 \\ 2x+4y+2z-3t+3w &= 6 \end{cases}$, $p=13$ f) $\begin{cases} 3x+2y+2z+2t &= 2 \\ 2x+3y+2z+5t &= 3 \\ 9x+y+4z-5t &= 1 \\ 2x+2y+3z+4t &= 5 \\ 7x+y+6z-t &= 7 \end{cases}$, $p=7$

3. Każdy z następujących układów rozwiązać w ciałach $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$:

a) $\begin{cases} x+4y+3z &= 2 \\ 3x+2y+4z &= 3 \\ 4x+y+z &= 0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 2x+3y+z &= 1 \\ x+4y+3z &= 3 \\ 4x \qquad +3z &= 2 \end{cases}$.

4. Pokazać, że układ równań $\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ 2x+y-z &= 2 \\ x-y+3z &= 0 \end{cases}$ jest sprzeczny w ciele $\mathbb{Z}_p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p=2$.

5. Rozwiązać nad ciałem $\mathbb{C}$ następujące układy równań:

a) $\begin{cases} (1+i)x+2iy-z &= 3+2i \\ (3+i)x+(1-i)y+4z &= 6+i \\ 5x+y-iz &= 2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} (1+i)x+2y-iz &= 2-3i \\ 3x+iy+(2-i)z &= 6+4i \\ (4+i)x+y+3z &= 6+6i \end{cases}$.

6. Dla jakiego parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_7$ układ równań $\begin{cases} x+2y+6z+6t &= 1 \\ x+y+z+3t &= 2 \\ 3x+5y+6z+t &= \lambda \end{cases}$ nad ciałem $\mathbb{Z}_7$ ma rozwiązanie?

Rozwiązać ten układ, gdy jest to możliwe.

7. W zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{Q}$ rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} 8x+6y+3z+2t &= 5 \\ -12x-3y-3z+3t &= -6 \\ 4x+5y+z+4t &= 3 \\ \lambda x+4y+z+4t &= 2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 2x-y+3z+4t &= 5 \\ 4x-2y+5z+6t &= 7 \\ 6x-3y+7z+8t &= 9 \\ \lambda x-4y+9z+10t &= 11 \end{cases}$, c) $\begin{cases} \lambda x+y+z+t &= 1 \\ x+\lambda y+z+t &= 1 \\ x+y+\lambda z+t &= 1 \\ x+y+z+\lambda t &= 1 \end{cases}$.

8. W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiązać układy równań:

(a) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + ay + 2z = b \end{cases}$, **(b)** $\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = 1 \\ x + y + z + t = b \end{cases}$.

9. Rozwiązać za pomocą wzorów Cramera następujące układy równań nad ciałem $\mathbb{Q}$:

(a) $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$, **(b)** $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$,

(c) $\begin{cases} x + y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$, **(d)** $\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ 3x - y - z - 2t = -4 \\ 2x + 3y - z - t = -6 \\ x + 2y + 3z - t = -4 \end{cases}$,

(e) $\begin{cases} y - 3z + 4t = -5 \\ x - 2z + 3t = -4 \\ 3x + 2y - 5z = 12 \\ 4x + 3y - 5z = 5 \end{cases}$.