Zadania ze wstępu do algebry i teorii liczb

Zestaw 7

1. Obliczyć iloczyny macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, **(b)** $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, **(c)** $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}^2$,

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$, **(e)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T$, **(g)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ obliczyć:

(a) $A^2 + 2AB + B^2$ i $(A+B)^2$;
(b) $A^2 - 2AB + B^2$ i $(A-B)^2$;
(c) $A^2 - B^2$, $(A-B)(A+B)$ i $(A+B)(A-B)$.

3. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej m zachodzą równości:

(a) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} a^m & 0 \\ 0 & b^m \end{bmatrix}$, **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \cos m\alpha & -\sin m\alpha \\ \sin m\alpha & \cos m\alpha \end{bmatrix}$, **(d)** $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} a^m & ma^{m-1} \\ 0 & a^m \end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} 1 & m & \frac{m(m-1)}{2} \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Jeśli $A \in K_n^n$, $B \in K_m^m$, $C \in K_n^m$, $D \in K_m^n$, to macierz $\left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline C & B \end{array}\right]$ nazywamy macierzą klatkową o klatkach A, D, C, B. Sprawdzić, że

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & D_1 \\ \hline C_1 & B_1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A_2 & D_2 \\ \hline C_2 & B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1A_2 + D_1C_2 & A_1D_2 + D_1B_2 \\ \hline C_1A_2 + B_1C_2 & C_1D_2 + B_1B_2 \end{array}\right].$$

5. Znaleźć wszystkie takie macierze $A \in K_2^2$, że

(a) $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A$, **(b)** $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

(d) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, **(e)** $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Niech E_{ir} oznacza macierz kwadratową stopnia n, której element o wskaźnikach i, r równy jest 1, a pozostałe elementy są równe 0. Obliczyć:

(a) $E_{ir} \cdot E_{lk}$, **(b)** $A \cdot E_{ir}$, **(c)** $E_{ir} \cdot A$, **(d)** $A \cdot (I_n + aE_{ir})$, $i \neq r$, **(e)** $(I_n + bE_{ir}) \cdot A$, $i \neq r$,
(f) $(I_n + aE_{ir})(I_n + bE_{ir})$, $i \neq r$, gdzie $A \in K_n^n$, $a, b \in K$. Zinterpretować (d) oraz (e) w języku operacji elementarnych wykonanych na A.

7. Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, **(b)** $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, **(c)** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$, **(f)** $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{bmatrix}$ gdzie α, β, γ są miarami kątów trójkąta,

(g) $\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, **(h)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \end{bmatrix}$, gdzie $\varepsilon = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$,

8. Obliczyć następujące wyznaczniki (nad $\mathbb{R}$):

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$, **(b)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$, **(c)** $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 4 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$,

(d) $\begin{vmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1 \end{vmatrix}$, **(e)** $\begin{vmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&1 \end{vmatrix}$, **(f)** $\begin{vmatrix} 4&4&-1&0&-1&8\\ 2&3&7&5&2&3\\ 3&2&5&7&3&2\\ 1&2&2&1&1&2\\ 1&7&6&6&5&7\\ 2&1&1&2&2&1 \end{vmatrix}$,

(g) $\begin{vmatrix} 1001&1002&1003&1004\\ 1002&1003&1001&1002\\ 1001&1001&1001&999\\ 1001&1000&998&999 \end{vmatrix}$, **(h)** $\begin{vmatrix} 30&20&15&12\\ 20&15&12&15\\ 15&12&15&20\\ 12&15&20&30 \end{vmatrix}$, **(i)** $\begin{vmatrix} 5&-4&4&0&0&0\\ 9&-7&6&0&0&0\\ 3&-2&1&0&0&0\\ 1&-1&2&0&0&1\\ 0&1&-3&0&1&0\\ -2&1&0&1&0&0 \end{vmatrix}$,

(j) $\begin{vmatrix} 1&6&20&50&140&140\\ 0&-16&-70&-195&-560&-560\\ 0&26&125&366&1064&1064\\ 0&-31&-154&-460&-1344&-1344\\ 0&4&20&60&176&175\\ 0&4&20&60&175&176 \end{vmatrix}$, **(k)** $\begin{vmatrix} 3&1&1&1&1&1\\ -1&3&1&1&1&1\\ -1&-1&3&1&1&1\\ -1&-1&-1&3&1&1\\ -1&-1&-1&-1&3&1\\ -1&-1&-1&-1&-1&3 \end{vmatrix}$.

9. Obliczyć:

(a) $\begin{vmatrix} 1&2&3&4\\ 3&2&5&3\\ 1&2&3&5\\ 2&2&1&4 \end{vmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$, **(b)** $\begin{vmatrix} 1&1&1&2\\ 1&3&1&3\\ 1&1&4&3\\ 3&0&8&10 \end{vmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_{11}$, **(c)** $\begin{vmatrix} 7&6&11&4&4\\ 1&0&2&6&6\\ 7&8&9&1&6\\ 1&10&2&4&5\\ 7&0&9&2&2 \end{vmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_{13}$.

10. Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy stopnia n :

(a) $\begin{bmatrix} 1&1&0&0&\cdots&0&0\\ 0&1&1&0&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&\cdots&1&1\\ 1&0&0&0&\cdots&0&1 \end{bmatrix}$, **(b)** $\begin{bmatrix} 2&1&0&\cdots&0&0\\ 1&2&1&\cdots&0&0\\ 0&1&2&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&2&1\\ 0&0&0&\cdots&1&2 \end{bmatrix}$, **(c)** $\begin{bmatrix} 3&2&0&\cdots&0&0\\ 1&3&2&\cdots&0&0\\ 0&1&3&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&3&2\\ 0&0&0&\cdots&1&3 \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} a&1&1&1&\cdots&1\\ 1&a&1&1&\cdots&1\\ 1&1&a&1&\cdots&1\\ 1&1&1&a&\cdots&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 1&1&1&1&\cdots&a \end{bmatrix}$, **(e)** $\begin{bmatrix} a&1&1&\cdots&1&1\\ -1&a&1&\cdots&1&1\\ -1&-1&a&\cdots&1&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ -1&-1&-1&\cdots&a&1\\ -1&-1&-1&\cdots&-1&a \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 1&n&n&\cdots&n&n\\ n&2&n&\cdots&n&n\\ n&n&3&\cdots&n&n\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ n&n&n&\cdots&n-1&n\\ n&n&n&\cdots&n&n \end{bmatrix}$, **(g)** $\begin{bmatrix} a&b&0&\cdots&0&0\\ 0&a&b&\cdots&0&0\\ 0&0&a&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&a&b\\ b&0&0&0&0&a \end{bmatrix}$.

11. Niech $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, będzie macierzą kwadratową stopnia n. Pokazać, że $\det A$ jest liczbą całkowitą. Załóżmy dodatkowo, że $a_{ij} = \pm k$, gdzie k jest ustaloną liczbą całkowitą. Pokazać, że $2^{n-1}k^n$ dzieli $\det A$.

12. Pokazać, że jeśli A jest macierzą antysymetryczną (tzn. $A^T = -A$) stopnia nieparzystego nad $\mathbb{R}$, to jest ona osobliwa, czyli $\det A = 0$.

13. Liczby 20604, 53227, 25755, 20927 i 289 dzielą się przez 17. Pokazać (bez obliczania), że wyznacznik $\begin{vmatrix} 2&0&6&0&4\\ 5&3&2&2&7\\ 2&5&7&5&5\\ 2&0&9&2&7\\ 0&0&2&8&9 \end{vmatrix}$ również dzieli się przez 17.

14. Załóżmy, że $A \in K_n^n, B \in K_m^m, D \in K_m^n$ udowodnić wzór na wyznacznik macierzy klatkowo-trójkątnej

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline D & B \end{array}\right] = \det A \det B$$

Wskazówka. Zastosować indukcję względem stopnia klatki B. Zob. też Przykład 6.7 ze stron 158-159 z książki A.Białynickiego-Biruli, *Algebra liniowa z geometrią*.

15. Wyznacznikiem Vandermonde'a (stopnia n nad ciałem K) nazywamy wyznacznik postaci

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(a) Obliczyć wartość wyznacznika Vandermonde'a.
Rozwiązanie: Wyprowadzimy najpierw wzór rekurencyjny. Postępujemy następująco: od n-tej kolumny odejmujemy $(n-1)$-szą pomnożoną przez x_n, od $(n-1)$-szej kolumny odejmujemy $(n-2)$-gą pomnożoną przez x_n, od drugiej kolumny odejmujemy pierwsz a pomnożoną przez x_n. Jako wynik otrzymujemy równość

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1-x_n & x_1(x_1-x_n) & \cdots & x_1^{n-2}(x_1-x_n) \\ 1 & x_2-x_n & x_2(x_2-x_n) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2-x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1}-x_n & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) & \cdots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Po rozwinięciu względem ostatniego wiersza oraz wyłączeniu z każdego wiersza odpowiedniego czynnika przed wyznacznik otrzymujemy w wyniku

$$\begin{aligned} V_n(x_1,\dots,x_n) &= (-1)^{n+1}(x_1-x_n)\cdot\dots\cdot(x_{n-1}-x_n)V_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}) \\ &= (x_n-x_1)\cdot\dots\cdot(x_n-x_{n-1})V_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}). \end{aligned}$$

Prosty dowód indukcyjny daje w rezultacie wzór $V_n(x_1,\dots,x_n) = \prod\limits_{k>l}(x_k-x_l)$.

(b) Wykazać, że $V_n(x_1,\dots,x_n) \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie $x_1,\dots,x_n$ są parami różne.

16. Sprawdzić, czy następujące macierze są odwracalne oraz w przypadku pozytywnej odpowiedzi obliczyć macierz odwrotną:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

17. Rozwiązać następujące równania macierzowe:

(a) $X\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $X\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$,

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}X\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

18. Rozwiązać układy równań macierzowych:

(a) $\begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}Y = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}X + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}Y = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}X + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}Y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$.

19. Obliczyć $(I+aE_{ir})^{-1}$, $i \neq r$.

20. Obliczyć macierze odwrotne do macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, **(e)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

21. Obliczyć macierze odwrotne do macierzy klatkowych: $\left[\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$, $\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right]$. Obliczyć macierze odwrotne do następujących macierzy: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.