Zadania ze wstępu do algebry i teorii liczb

Zestaw 6

1. W pierścieniu wielomianów $\mathbb{Z}_4[X]$ wykonać wskazane działanie:
   (a) $(X^3 + 2X^2 + 3X^2 + 1) + (X^4 + X^3 + 3X^2 + 2X + 2)$;
   (b) $(2X^2 + X + 3) - (2X^4 + 3X^3 + X^2 + 3X)$;
   (c) $(2X^3 + 2X^2 + 3)(3X^2 + X + 2)$;
   (d) $(2X^4 + 3)(2X^4 + 1)$.
2. Udowodnić, że jeśli pierścienie P_1, P_2 są izomorficzne, to pierścienie wielomianów $P_1[X]$, $P_2[X]$ też są izomorficzne.
3. Wyznaczyć elementy odwracalne pierścienia:
   (a) $\mathbb{Z}[X]$, (b) $\mathbb{Z}_5[X]$, (c) $\mathbb{Z}[i][X]$, (d) $\mathbb{Q}[X]$.
4. Wykazać, że jeśli P jest pierścieniem całkowitym, to $U(P[X]) = U(P)$.
5. Podzielić wielomian f z resztą przez wielomian g:
   (a) $f(X) = 5X^3 + 2X^2 - X - 7$, $g(X) = X^2 + 3X - 1$ w $\mathbb{Z}[X]$;
   (b) $f(X) = 5X^3 + 2X^2 - X - 7$, $g(X) = X^2 + 3X - 1$ w $\mathbb{Z}_8[X]$;
   (c) $f(X) = 2X^4 + Xs + X^2 - X + 3$, $g(X) = 3X^2 + X + 4$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;
   (d) $f(X) = X^3 - 7$, $g(X) = X - 2$ w $\mathbb{Z}[X]$.
6. Dobrać liczby $a, b \in \mathbb{Z}$, aby wielomian $X^5 - 4X^3 + 2X^2 + aX + b \in \mathbb{Z}[X]$ przy dzieleniu przez $X - 1$ dawał resztę 1, a przy dzieleniu przez $X - 2$ resztę -5.
7. Dobrać liczby $a, b \in \mathbb{Z}_6$, aby wielomian $2X^4 + 5X^3 + 4X^2 + aX + b \in \mathbb{Z}_6[X]$ przy dzieleniu przez $X + 1$ dawał resztę 5, a przy dzieleniu przez $X + 3$ resztę 1.
8. Wielomian o współczynnikach rzeczywistych przy dzieleniu przez $X - 2$ daje resztę 1 zaś przy dzieleniu przez $X - 1$ daje resztę 2. Jaką resztę daje ten wielomian przy dzieleniu przez $(X - 1)(X - 2)$?
9. Wielomian o współczynnikach z $\mathbb{Z}_5$ przy dzieleniu przez $X + 1$ daje resztę 2, przy dzieleniu przez $X + 2$ daje resztę 3 zaś przy dzieleniu przez $X + 3$ daje resztę 1. Jaką resztę daje ten wielomian przy dzieleniu przez $(X + 1)(X + 2)(X + 3)$?
10. Sprawdzić, czy funkcje wielomianowe danej pary wielomianów z pierścienia $\mathbb{Z}_3[X]$ ą równe:
    (a) $X^3 + X^2 + 1$, $X^4 + X + 1$;
    (b) $2X^3 + X^2 + X + 1$, $2X + 1$;
    (c) $X^3 + 2X^2$, $2X^4 + X$.
11. Pokazać, że wielomiany $f, g \in \mathbb{Z}_p$, $p-$ liczba pierwsza, wyznaczają identyczne funkcje wielomianowe wtedy i tylko wtedy, gdy $X^p - X | f - g$.
12. Pokazać, że dana funkcja $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nie jest funkcją wielomianową: (a) $f(x) = \sin x$, (b) $f(x) = |x|$.
13. Wykorzystując wielomian interpolacyjny Lagrange'a, znaleźć wielomian $f \in \mathbb{Z}_7[X]$ możliwie najmniejszego stopnia, który w danych punktach przyjmuje podane wartości:

    (a)

x	0	2	3	6
$f(x)$	5	3	6	5

    ; (b)

x	1	3	4	5
$f(x)$	5	0	6	6

    ;
14. Dobrać takie liczby całkowite a, b, aby wielomian $X^4 - 5X^3 + aX^2 + bX - 3 \in \mathbb{Z}[X]$ dzielił się przez wielomian $X^2 - 2X - 3$.
15. Dla jakich wartości a wielomian $X^3 - 3aX^2 + 3X - a \in Q[X]$ ma pierwiastki wielokrotne?
16. Wyznaczyć krotność pierwiastka 2 wielomianu $X^5 - 6x^4 + 13X^3 - 14X^2 - 12X - 8 \in \mathbb{Q}[X]$.