Zadania ze wstępu do algebry i teorii liczb

Zestaw 5

1. Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych x, y spełniające równość:

a) $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$, b) $(2+3i)x+(4-5i)y=6-2i$,

c) $(4-3i)2x+(1+i)2y=7-12i$, d) $\dfrac{2+i}{3-i}x+\left(\dfrac{4-i}{3-i}\right)^2 y=1+i$.

2. Rozwiązać układ równań:

a) $\begin{cases} (1+i)z+(2-i)w=2-2i \\ (1-i)z-(3+i)w=-3+3i \end{cases}$; b) $\begin{cases} (3-i)z+(4+2i)w=2+6i \\ (4+2i)z-(2+3i)w=5+4i \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{z}{2-i}+\dfrac{w}{1+i}=2 \\ \dfrac{5z}{(2-i)^2}+\dfrac{2w}{(1+i)^2}=3 \end{cases}$.

3. Rozwiązać równania:

a) $z\bar{z}+(z-\bar{z})=3+2i$, b) $i(z+\bar{z})+i(z-\bar{z})=2i-3$.

4. Rozwiązać równania:

a) $z^2+3z+3+i=0$, b) $z^2+(1+4i)z-(5+i)=0$,

c) $z^2+z(1+i)+2i=0$, d) $(4-3i)z^2-(2+11i)z-(5+i)=0$.

5. Rozwiązać równania:

a) $z^4+2z^2+4=0$, b) $z^4+(15+7i)z^2+8=0$, c) $z^4-(18+4i)z^2+77-36i=0$.

6. Rozwiązać równania:

a) $(1+i)z^2-(3+7i)z+10i=0$;

b) $(1+2i)z^2-(-1+8i)z+(-5+5i)=0$;

c) $(1+2i)z^2-(1+7i)z+(-2+6i)=0$;

d) $(1+i)z^2-(1+5i)z+(-2+6i)=0$;

e) $(1-i)z^2-(7+3i)z+10i=0$;

f) $(1-2i)z^2-(4+7i)z+(7+i)=0$;

g) $(1+i)z^2-(3+3i)z+(4+2i)=0$;

7. Wykonać działania:

a) $\dfrac{1+i\,\mathrm{tg}\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\alpha}$, b) $\dfrac{a+bi}{a-bi}$, c) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^2-(2+i)^2}$, d) $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$.

8. Wykazać nierówności:

a) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$, b) $||z_1|-|z_2||\le|z_1-z_2|$.

9. Znaleźć wszystkie pierwiastki wielomianu $x^4-6x^3+14x^2-6x+13$ wiedząc, że jednym z nich jest $3+2i$.

10. Wykazać równość $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$ i podać jej interpretację geometryczną[1].

11. Jakie twory na płaszczyźnie zespolonej określają równania i nierówności:

a) $|z|<2$, b) $|z-1|=3$, c) $|z-1-2i|\le 3$,

d) $1<|z|<5$, e) $\dfrac{|z-3|}{|z+1|}\ge 1$, f) $|z-c|+|z+c|=2a$,

g) $\dfrac{\pi}{2}<\mathrm{Arg}(z)\le\pi$, h) $|z-i|=|z+i|$, i) $\arg\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{\pi}{2}$,

j) $\arg(z-z_0)=\phi$, ϕ dane, k) $0\le\mathrm{Re}(iz)\le 1$, l) $\mathrm{Re}(z^2)>1$.

12. Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:

1, -1, i, $-i$,

$1+i$, $1-i$, $-1+i$, $1+i\sqrt{3}$,

$-1-i\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-i$, $\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{6}$,

$\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

[1] Interpretację geometryczną liczb zespolonych odkrył C. Wessel w 1799 r., a potem niezależnie J. R. Argand w 1806 r.

13. Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone:
$\cos\alpha - i\sin\alpha$, $\sin\alpha + i\cos\alpha$, $\sin\alpha - i\cos\alpha$, $1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

14. Dla dowolnej liczby całkowitej $n \in \mathbb{Z}$ obliczyć:
a) i^n , b) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, c) $(1+i)^n$.

15. Obliczyć:
a) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{76}+1}{(1-i)^{37}}$, b) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{32}+5}{(1+i)^{17}}$.

16. Wyznaczyć:
$\sqrt{2i}$, $\sqrt{-8i}$, $\sqrt{3-4i}$, $\sqrt{-15+8i}$, $\sqrt{-3-4i}$,
$\sqrt{-11+60i}$, $\sqrt[3]{-8i}$, $\sqrt{-8+6i}$.

17. Obliczyć (podając dokładne wartości części rzeczywistej i urojonej):
(a) $\dfrac{(1-i)^{24}}{(\sqrt{3}-i)^{22}}$, **(b)** $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{42}}{(-1+i)^{31}}$, **(c)** $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{36}}{(1+i)^{31}}$, **(d)** $\dfrac{(1-i)^{28}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$, **(e)** $\dfrac{(1-i)^{28}}{(\sqrt{3}+i)^{20}}$,
(f) $\dfrac{(-1+i)^{32}}{(-\sqrt{3}+i)^{28}}$, **(g)** $\dfrac{(-1-i)^{28}}{(1-i\sqrt{3})^{20}}$.

18. Narysować na płaszczyźnie zespolonej pierwiastki z 1 stopni $3, 4, 5, 6, 7$ i 8.

19. Korzystając z postaci trygonometrycznej liczb zespolonych wyprowadzić wzory wyrażające $\sin 3x$ i $\cos 3x$ poprzez $\sin x$ i $\cos x$.