Zadania ze wstępu do algebry i teorii liczb

Zestaw 3

1. Wyznaczyć liczbę elementów zbioru:
   (a) $\{n \in \mathbf{N} : n < 300 \wedge NWD(n, 300) = 20\}$,
   (b) $\{n \in \mathbf{N} : n < 1665 \wedge NWD(n, 1665) = 37\}$.
2. Wykazać, że dla każdego $n > 2$ liczba $\varphi(n)$ jest liczbą parzystą.
3. Wykazać, że:
   (a) $\varphi(4n) = 2\varphi(2n)$, (b) $\varphi(4n+2) = \varphi(2n+1)$.
4. Rozwiązać równania:
   (a) $\varphi(x) = 12$, (b) $\varphi(2x) = \varphi(3x)$, (c) $\varphi(5x) = \varphi(7x)$,
   (d) $\varphi(x) = \frac{1}{2}x$, (e) $\varphi(x) = \frac{2}{3}x$.
5. Znaleźć dwie ostatnie cyfry każdej z następujacych liczb: 289^{289}, 2^{341}, $,3^{367}$, 7^{9^9}, $14^{14^{14}}$.
6. Znajdź resztę z dzielenie liczby 522^{204} przez 65.
7. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ liczba 2^{2^n} kończy się cyfrą 6.
8. Wykazać, że jeżeli $30|(a_1 + a_2 + ... + a_n)$, to $30|(a_1^5 + a_2^5 + ... + a_n^5)$.
9. Wykazać, że jeżeli p, q są różnymi liczbami pierwszymi, to $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.
10. Wyznaczyć wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych, dla których $q^p - p^q = 1$.
11. Wykazać, że setna potęga dowolnej liczby całkowitej przy dzieleniu przez 125 daje resztę 0 lub 1 .
12. Wykazać, że jeżeli n, m są liczbami naturalnymi oraz $7|(a^{6m} + a^{6n})$, to liczba całkowita a jest podzielna przez 7.
13. (OM) Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne n, aby liczba $1! + 2! + ... + n!$ była:
    (a) kwadratem pewnej liczby naturalnej (*Wskazówka: rozważyć reszty modulo* 5);
    (b) sześcianem pewnej liczby naturalnej (*Wskazówka: rozważyć dla odpowiedniego modułu*).
14. (OM) Udowodnić, że nie istnieje nieparzysta liczba naturalna $n > 1$, taka, że liczba $2^n - 1$ dzieli się przez n. (*Wskazówka: rozważyć dzielnik pierwszy liczby n i skorzystać z małego twierdzenia Fermata*)
15. Niech $d = NWD(m_1, m_2)$. Wykazać, że układ kongruencji
$$\begin{cases} X \equiv c_1 (\mathrm{mod}\ m_1) \\ X \equiv c_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$
    ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $d|(c_1 - c_2)$. Jeśli warunek ten jest spełniony, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie modulo $NWW(m_1, m_2)$.
16. Załóżmy, że liczby $m_1, m_2, ..., m_k$ są parami względnie pierwsze, $M = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$ oraz y_i jest rozwiązaniem kongruencji $\frac{M}{m_i} y_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ dla $i = 1, 2, ..., k$. Niech ponadto $z = \frac{M}{m_1} y_1 c_1 + \frac{M}{m_2} y_2 c_2 + ... + \frac{M}{m_k} y_k c_k$. Wykazać, że $z \pmod{M}$ jest jedynym rozwiązaniem układu kongruencji
$$\begin{cases} X \equiv c_1 \pmod{m_1} \\ X \equiv c_2 \pmod{m_2} \\ \quad\vdots \\ X \equiv c_k \pmod{m_k} \end{cases} .$$

[0] OM oznacza zadanie z Olimpiady Matematycznej

17. Dopisać z prawej strony liczby 523 takie trzy cyfry, aby otrzymana liczba sześciocyfrowa była podzielna przez 7, 8 i 9.

18. Rozwiązać następujące układy kongruencji:

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{c} X \equiv 4 \pmod{5} \\ X \equiv 1 \pmod{12} \\ X \equiv 7 \pmod{14} \end{array} \right. ; \quad \text{b)} \left\{ \begin{array}{c} X \equiv 1 \pmod{25} \\ X \equiv 2 \pmod{4} \\ X \equiv 3 \pmod{7} \\ X \equiv 4 \pmod{9} \end{array} \right. ; \quad \text{c)} \left\{ \begin{array}{c} 3X \equiv 7 \pmod{10} \\ 2X \equiv 5 \pmod{15} \\ 7X \equiv 5 \pmod{12} \end{array} \right. ; \quad \text{d)} \left\{ \begin{array}{c} 5X \equiv 1 \pmod{12} \\ 5X \equiv 2 \pmod{8} \\ 7X \equiv 3 \pmod{11} \end{array} \right. .$$

19. Znaleźć najmniejszą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez $7, 5, 3, 11$ daje odpowiednio reszty $3, 2, 1, 9$.

20. Znaleźć cyfry x, y wiedząc, że liczba $4x87y6$ dzieli się przez 56.

21. Znaleźć cyfry x, y, z wiedząc, że liczba $xyz138$ dzieli się przez 7, zaś liczba $138xyz$ przy dzieleniu przez 13 daje resztę 6, a liczba $x1y3z8$ przy dzieleniu przez 11 daje resztę 5.

22. (OM) Znaleźć cyfry x, y, z wiedząc, że liczba $13xy45z$ dzieli się przez 792.

23. (XII Mistrzostwa w grach matematycznych i logicznych) Pradziadek nie ma jeszcze stu lat. W zeszłym roku jego wiek wyrażał się liczbą całkowitą podzielną przez 8, a w przyszłym roku jego wiek będzie liczbą całkowitą podzielną przez 7. Ile lat pradziadek ma teraz?