Zadania ze wstępu do algebry i teorii liczb

Zestaw 2

1. Zbiór A ma n elementów.
   (a) Ile działań można określić w zbiorze A?
   (b) Ile działań przemiennych można określić w zbiorze A?
   (c) Ile działań z elementem neutralnym można określić w zbiorze A?

2. Sprawdzić, że zbiór $\mathbb{Z}_n$ z działaniem:
$$a \oplus b := (a+b) - \left[\frac{a+b}{n}\right] n,$$
jest grupą abelową.

3. Sprawdzić, że zbiór $\mathbb{R}$ z działaniem $x \circ y = x + y + 1$ jest grupą abelową

4. W zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ określamy działanie $x \star y = x + y + xy$. Sprawdzić, że $(\mathbb{R}, \star)$ jest grupą abelową.

5. Wykazać, że jeśli $a^2 = 1$ dla każdego $a \in G$, to G jest grupą abelową.

6. Niech $\mathbb{Z}_n^* := \{k \in \mathbb{Z}_n : \mathrm{NWD}(k, n) = 1\}$. Pokazać, że odwzorowanie
$$\odot : \mathbb{Z}_n^* \times \mathbb{Z}_n^* \to \mathbb{Z}_n^*, \quad a \odot b := ab - \left[\frac{ab}{n}\right] n$$
jest poprawnie określone i wraz z nim zbiór $\mathbb{Z}_n^*$ jest grupą abelową.

7. Pokazać, że zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem: $x * y := x + (-1)^x y$ jest grupą. Czy jest to grupa abelowa? Sprawdzić, że podzbiory: (a) podzbiór liczb parzystych, (b) $\{0, (2k+1)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, są podgrupami tej grupy.

8. Wyznaczyć wszystkie podgrupy grupy: (a) $\mathbb{Z}_{12}$, (b) $\mathbb{Z}_5^*$.

9. Pokazać, że izometrie trójkąta równobocznego wraz z działaniem składania odwzorowań tworzą grupę. Ułożyć tabelkę działania w tej grupie. Znaleźć wszystkie podgrupy tej grupy.

10. Rozwiązać poprzednie zadanie zastępując trójkąt równoboczny kwadratem.

11. Pokazać, że zbiór $\mathbb{Z}_n$ z działaniami $\oplus$ oraz $\odot$:
$$a \oplus b := (a+b) - \left[\frac{a+b}{n}\right] n, \qquad a \odot b := ab - \left[\frac{ab}{n}\right] n$$
jest pierścieniem. Wykazać, że następujace warunki są równoważne:
    (a) element $k \in \mathbb{Z}_n$ jest odwracalny,
    (b) element $k \in \mathbb{Z}_n$ nie jest dzielnikiem zera,
    (c) $\mathrm{NWD}(k, n) = 1$.

    Pokazać, że pierścień $\mathbb{Z}_n$ jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.

12. (a) Ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto x^2$ w $\mathbb{Z}_{11}$.
    (b) Ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto x^{-1}$ w $\mathbb{Z}_{13}$.

13. Sprawdzić, że połowa różnych od zera elementów ciała $\mathbb{Z}_{13}$ to kwadraty elementów $\mathbb{Z}_{13}$. Sprawdzić, że kwadraty niezerowych elementów tworzą podgrupę grupy $\mathbb{Z}_{13}^*$.

14. Dla jakich wartości parametru $m \in K$ trójmian $mx^2 + (2m+1)x + m - 2$ ma dwa różne pierwiastki w ciele K, gdy: a) $K = \mathbb{Z}_{11}$? b) $K = \mathbb{Z}_{13}$?

15. Wykazać, że każdy element ciała $\mathbb{Z}_5$ jest sześcianem elementu $\mathbb{Z}_5$. To samo dla ciała $\mathbb{Z}_{11}$. A jak to będzie w przypadku ciała $\mathbb{Z}_{13}$? Sprawdzić, że w $\mathbb{Z}_{13}^*$ sześciany niezerowych elementów tworzą podgrupę.

16. Sprawdzić czy istnieją - i wyznaczyć, jeśli istnieją - pierwiastki kwadratowe z -1 w ciele $\mathbb{Z}_p$ dla $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$.

17. Rozwiązać równanie $5x = 2$ w $\mathbb{Z}_{65537}$.

18. Znaleźć taki element $\mathbb{Z}_5$, że każdy inny element $\neq 0$ jest jego potęgą. To samo dla ciał $\mathbb{Z}_7$ oraz $\mathbb{Z}_{11}$.

19. Sprawdzić, że każdy różny od 0 element ciała $\mathbb{Z}_5$ podniesiony do pewnej potęgi daje 1. To samo dla ciał $\mathbb{Z}_7$ oraz $\mathbb{Z}_{11}$.

20. Wyznaczyć dziedzinę oraz ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto \dfrac{x+2}{2x-1}$ w $\mathbb{Z}_7$.

21. Rozwiązać równanie:
    a) $5x^2 + 5x + 1 = 0$ w $\mathbb{Z}_{11}$, b) $x^2 + x + 3 = 0$ w $\mathbb{Z}_5$,
    c) $2x^2 + 2x + 2 = 0$ w $\mathbb{Z}_{13}$, d) $2x^3 + 3x2 + x - 4 = 0$ w $\mathbb{Z}_7$.

22. Wykonać działania: $(6^2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 1) \cdot (5 \cdot 12 - 7)^{-1}$ w $\mathbb{Z}_{17}$ oraz w $\mathbb{Z}_{23}$.

23. Rozwiązać układ równań
    a) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 4x + 9y = 4 \end{cases}$ w $\mathbb{Z}_{13}$ i w $\mathbb{Z}_7$ b) $\begin{cases} 5x + 4y = a \\ 4x + 3y = b \end{cases}$ w $\mathbb{Z}_{11}$ i w $\mathbb{Z}_5$.

24. Niech K będzie ciałem. Sprawdzić, że zbiór $K^2 = K \times K$, z działaniami

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc),$$

    jest pierścieniem. Obliczyć $(0, 1)^2$. Zastanowić się czy jest to ciało dla $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$.

25. Niech K będzie ciałem. Sprawdzić, że zbiór $K^2 = K \times K$, z działaniami

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - 2bd, ad + bc),$$

    jest pierścieniem. Obliczyć $(0, 1)^2$. Zastanowić się czy jest to ciało dla $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$.

26. Niech K będzie ciałem. Sprawdzić, że zbiór $K^2 = K \times K$, z działaniami

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

    jest pierścieniem. Obliczyć $(0, 1)^2$. Zastanowić się czy jest to ciało dla $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$.

27. Sprawdzić, czy zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z działaniami:

$$x \circ y = x + y + 1, \quad x \star y = x + y + xy$$

    jest ciałem.

28. Sprawdzić, czy jest ciałem system $\mathbf{F}_4 =< \{0, 1, a, b\}, 0, 1, +, \cdot >$ w którym działania $+$ i $\cdot$ określone są tabelkami:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

    Sprawdzić, że to ciało ma tylko jedno podciało właściwe.

29. Wykazać, że zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, ze zwykłym dodawaniem i zwykłym mnożeniem liczb rzeczywistych, jest ciałem. Sprawdzić, że to ciało ma tylko jedno podciało właściwe.

30. Pokazać, że grupa $(\mathbb{R}, \circ)$ z zadania 3 jest izomorficzna z addytywną grupą $(\mathbb{R}, +)$ ciała liczb rzeczywistych.
    Wsk. Rozważ odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x + 1$.

31. Pokazać, że grupa $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \star)$ z zadania 4 jest izomorficzna z multiplikatywną grupą $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ciała liczb rzeczywistych.
    Wsk. Rozważ odwzorowanie $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x + 1$.

32. Wykaż, że dowolna podgrupa grupy $\mathbb{Z}$ jest izomorficzna z grupą $\mathbb{Z}$.

33. Pokaż, że ciało z zadania 27 jest izomorficzne z ciałem liczb rzeczywistych.
Wsk. Zob. dwa poprzednie zadania.

34. Pokaż, że ciało $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ z zadania 29 jest izomorficzne z ciałem z zadania 24 dla $K = \mathbb{Q}$.
Wsk. Rozważ odwzorowanie $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $\varphi(a + b\sqrt{2}) = (a, b)$.

35. Pokaż, że jedynym automorfizmem ciała $\mathbb{Q}$ jest przekształcenie identycznościowe. To samo dla ciała $\mathbb{Z}_p$.

36. Sprawdź, że odwzorowanie $\phi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\phi(a + b\sqrt{2}) := a - b\sqrt{2}$, jest automorfizmem ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Czy prócz automorfizmu ϕ oraz przekształcenia identycznościowego ciało $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ posiada jeszcze inne automorfizmy?

37. Pokaż, że jedynym automorfizmem ciała $\mathbb{R}$ jest przekształcenie identycznościowe. *Wsk.* Pokaż, że automorfizm ciała $\mathbb{R}$ jest funkcją rosnącą, a następnie wykorzystaj zad. 35.

38. Znajdź wszystkie automorfizmy ciała $\mathbf{F}_4$ z zad. 28, zestaw 1.