Wykład 9
Konstrukcja ciała liczb rzeczywistych

Andrzej Sładek
sladek@ux2.math.us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Definicja

Niech X będzie zbiorem nieskończonych ciągów liczb wymiernych, które są ciągami Cauchy'ego, tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \iff \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q} \text{ oraz } \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Wtedy

Definicja

Niech X będzie zbiorem nieskończonych ciągów liczb wymiernych, które są ciągami Cauchy'ego, tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \iff \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q} \text{ oraz } \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Wtedy

1. ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony,

Definicja

Niech X będzie zbiorem nieskończonych ciągów liczb wymiernych, które są ciągami Cauchy'ego, tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \iff \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q} \text{ oraz } \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Wtedy

1. ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony,
2. $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$,

Definicja

Niech X będzie zbiorem nieskończonych ciągów liczb wymiernych, które są ciągami Cauchy'ego, tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \iff \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q} \text{ oraz } \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Wtedy

1. ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony,
2. $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$,
3. $\bigvee_{\xi\in\mathbb{Q}^+} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > \xi \implies (a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}} \in X$,

Definicja

Niech X będzie zbiorem nieskończonych ciągów liczb wymiernych, które są ciągami Cauchy'ego, tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \iff \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q} \text{ oraz } \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Wtedy

1. ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony,
2. $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$,
3. $\bigvee_{\xi\in\mathbb{Q}^+} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > \xi \implies (a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}} \in X$,

Definicja

Niech X będzie zbiorem nieskończonych ciągów liczb wymiernych, które są ciągami Cauchy'ego, tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \iff \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q} \text{ oraz } \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Wtedy

1. ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony,
2. $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$,
3. $\bigvee_{\xi\in\mathbb{Q}^+} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > \xi \implies (a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}} \in X$,

Dowód. ad 1. Niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $|a_n - a_m| < 1$ dla $n, m > n_0$

Definicja

Niech X będzie zbiorem nieskończonych ciągów liczb wymiernych, które są ciągami Cauchy'ego, tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \iff \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q} \text{ oraz } \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Wtedy

1. ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony,
2. $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$,
3. $\bigvee_{\xi\in\mathbb{Q}^+} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > \xi \implies (a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}} \in X$,

Dowód. ad 1. Niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $|a_n - a_m| < 1$ dla $n, m > n_0$ oraz niech $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0+1}|\}$. Wtedy

Definicja

Niech X będzie zbiorem nieskończonych ciągów liczb wymiernych, które są ciągami Cauchy'ego, tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \iff \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q} \text{ oraz } \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Wtedy

1. ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony,
2. $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$,
3. $\bigvee_{\xi\in\mathbb{Q}^+} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > \xi \implies (a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}} \in X$,

Dowód. ad 1. Niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $|a_n - a_m| < 1$ dla $n, m > n_0$ oraz niech $M = \max\{|a_1|, ..., |a_{n_0+1}|\}$. Wtedy

$$n \leqslant n_0 + 1 \implies |a_n| \leqslant M < M + 1,$$

Definicja

Niech X będzie zbiorem nieskończonych ciągów liczb wymiernych, które są ciągami Cauchy'ego, tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \iff \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q} \text{ oraz } \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Wtedy

1. ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony,
2. $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$,
3. $\bigvee_{\xi\in\mathbb{Q}^+} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > \xi \implies (a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}} \in X$,

Dowód. ad 1. Niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $|a_n - a_m| < 1$ dla $n, m > n_0$ oraz niech $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0+1}|\}$. Wtedy

$$n \leqslant n_0 + 1 \implies |a_n| \leqslant M < M + 1,$$

$$n > n_0 + 1 \implies |a_n| = |a_{n_0+1} + (a_n - a_{n_0+1}| \leqslant |a_{n_0+1}| + |a_n - a_{n_0+1}| \leqslant M + 1.$$

Definicja

Niech X będzie zbiorem nieskończonych ciągów liczb wymiernych, które są ciągami Cauchy'ego, tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \iff \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q} \text{ oraz } \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Wtedy

1. ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony,
2. $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$,
3. $\bigvee_{\xi\in\mathbb{Q}^+} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > \xi \implies (a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}} \in X$,

Dowód. ad 1. Niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $|a_n - a_m| < 1$ dla $n, m > n_0$ oraz niech $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0+1}|\}$. Wtedy

$$n \leqslant n_0 + 1 \implies |a_n| \leqslant M < M + 1,$$

$$n > n_0 + 1 \implies |a_n| = |a_{n_0+1} + (a_n - a_{n_0+1}| \leqslant |a_{n_0+1}| + |a_n - a_{n_0+1}| \leqslant M + 1.$$

Zatem ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony.

ad 2. Niech $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\bigwedge_{n,n>n_0} |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2},\ |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ad 2. Niech $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\bigwedge_{n,n>n_0} |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2},\ |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wtedy dla $n, m > n_0$ mamy

$$|(a_n \pm b_n) - (a_m \pm b_m)| \leqslant |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ad 2. Niech $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\bigwedge_{n,n>n_0} |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \; |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wtedy dla $n, m > n_0$ mamy

$$|(a_n \pm b_n) - (a_m \pm b_m)| \leqslant |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sprawdziliśy warunek Cauchy'ego dla ciągów $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ad 2. Niech $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\bigwedge_{n,n>n_0} |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2},\ |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wtedy dla $n, m > n_0$ mamy

$$|(a_n \pm b_n) - (a_m \pm b_m)| \leqslant |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sprawdziliśy warunek Cauchy'ego dla ciągów $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Niech $M \in \mathbb{Q}$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < M,\ |b_n| < M$$

ad 2. Niech $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\bigwedge_{n,n>n_0} |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wtedy dla $n, m > n_0$ mamy

$$|(a_n \pm b_n) - (a_m \pm b_m)| \leqslant |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sprawdziliśy warunek Cauchy'ego dla ciągów $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Niech $M \in \mathbb{Q}$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < M, \ |b_n| < M \ \text{ oraz } \ \bigwedge_{n,n>n_0} |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2M}, \ |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

ad 2. Niech $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\bigwedge_{n,n>n_0} |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2},\ |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wtedy dla $n, m > n_0$ mamy

$$|(a_n \pm b_n) - (a_m \pm b_m)| \leqslant |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sprawdziliśy warunek Cauchy'ego dla ciągów $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Niech $M \in \mathbb{Q}$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < M,\ |b_n| < M \ \text{ oraz } \bigwedge_{n,n>n_0} |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2M},\ |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Wtedy dla $n, m > n_0$ mamy

$$|(a_n b_n) - (a_m b_m)| =$$

$$|a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)| \leqslant |a_n||b_n - b_m| + |b_m||a_n - a_m| < M\tfrac{\varepsilon}{2M} + M\tfrac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

ad 2. Niech $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\bigwedge_{n,n>n_0} |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2},\ |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wtedy dla $n, m > n_0$ mamy

$$|(a_n \pm b_n) - (a_m \pm b_m)| \leqslant |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sprawdziliśy warunek Cauchy'ego dla ciągów $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Niech $M \in \mathbb{Q}$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < M,\ |b_n| < M \ \text{ oraz } \bigwedge_{n,n>n_0} |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2M},\ |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Wtedy dla $n, m > n_0$ mamy

$$|(a_n b_n) - (a_m b_m)| =$$

$$|a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)| \leqslant |a_n||b_n - b_m| + |b_m||a_n - a_m| < M\tfrac{\varepsilon}{2M} + M\tfrac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Sprawdziliśy warunek Cauchy'ego dla ciągu $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ad 3. Niech $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\bigwedge_{m,n>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon\xi^2.$$

ad 3. Niech $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\bigwedge_{m,n>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon\xi^2.$$

Wtedy dla $n, m > n_0$ mamy

$$|a_n^{-1} - a_m^{-1}| = \frac{|a_m - a_n|}{|a_n||a_m|} < \varepsilon\xi^2 \frac{1}{\xi^2} = \varepsilon.$$

ad 3. Niech $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{+}$ oraz $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\bigwedge_{m,n>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon\xi^2.$$

Wtedy dla $n, m > n_0$ mamy

$$|a_n^{-1} - a_m^{-1}| = \frac{|a_m - a_n|}{|a_n||a_m|} < \varepsilon\xi^2 \frac{1}{\xi^2} = \varepsilon.$$

Zatem ciąg $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciagiem Cauchy'ego. ¶

Definiujemy relację na zbiorze X następująco:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} |a_n - b_n| < \varepsilon,$$

Definiujemy relację na zbiorze X następująco:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} |a_n - b_n| < \varepsilon,$$

tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Definiujemy relację na zbiorze X następująco:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} |a_n - b_n| < \varepsilon,$$

tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Uwaga. Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ oraz istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n = b_n$ dla $n > n_0$, to $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.

Definiujemy relację na zbiorze X następująco:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} |a_n - b_n| < \varepsilon,$$

tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Uwaga. Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ oraz istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n = b_n$ dla $n > n_0$, to $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.

Twierdzenie

Relacja zdefiniowana wyżej jest relacją równoważnościową.

Definiujemy relację na zbiorze X następująco:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} |a_n - b_n| < \varepsilon,$$

tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Uwaga. Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ oraz istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n = b_n$ dla $n > n_0$, to $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.

Twierdzenie

Relacja zdefiniowana wyżej jest relacją równoważnościową.

Dowód na tablicy.

Definiujemy relację na zbiorze X następująco:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} |a_n - b_n| < \varepsilon,$$

tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Uwaga. Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ oraz istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n = b_n$ dla $n > n_0$, to $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.

Twierdzenie

Relacja zdefiniowana wyżej jest relacją równoważnościową.

Dowód na tablicy.

Lemat

Jeśli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a'_n + b'_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a'_n b'_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Definiujemy relację na zbiorze X następująco:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \bigwedge_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} |a_n - b_n| < \varepsilon,$$

tzn.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Uwaga. Jeżeli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ oraz istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n = b_n$ dla $n > n_0$, to $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.

Twierdzenie

Relacja zdefiniowana wyżej jest relacją równoważnościową.

Dowód na tablicy.

Lemat

Jeśli $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a'_n + b'_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (a'_n b'_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dowód znowu na tablicy - okropne!

Niech $\mathbb{R}$ będzie zbiorem klas abstrakcji zbioru X względem relacji $\sim$.

Niech $\mathbb{R}$ będzie zbiorem klas abstrakcji zbioru X względem relacji $\sim$.

Elementy zbioru $\mathbb{R}$ oznaczać będziemy $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ i nazywać liczbami rzeczywistymi.

Niech $\mathbb{R}$ będzie zbiorem klas abstrakcji zbioru X względem relacji $\sim$.

Elementy zbioru $\mathbb{R}$ oznaczać będziemy $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ i nazywać liczbami rzeczywistymi.

W zbiorze $\mathbb{R}$ określamy działania

- dodawania:
$$[a_n]_{n\in\mathbb{N}} + [b_n]_{n\in\mathbb{N}} = [a_n + b_n]_{n\in\mathbb{N}},$$
- mnożenia:
$$[a_n]_{n\in\mathbb{N}} \cdot [b_n]_{n\in\mathbb{N}} = [a_n b_n]_{n\in\mathbb{N}}.$$

Niech $\mathbb{R}$ będzie zbiorem klas abstrakcji zbioru X względem relacji $\sim$.

Elementy zbioru $\mathbb{R}$ oznaczać będziemy $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ i nazywać liczbami rzeczywistymi.

W zbiorze $\mathbb{R}$ określamy działania

- dodawania:
$$[a_n]_{n\in\mathbb{N}} + [b_n]_{n\in\mathbb{N}} = [a_n + b_n]_{n\in\mathbb{N}},$$
- mnożenia:
$$[a_n]_{n\in\mathbb{N}} \cdot [b_n]_{n\in\mathbb{N}} = [a_n b_n]_{n\in\mathbb{N}}.$$

Uwaga. Wcześniejszy lemat gwarantuje, że powyższe działania są poprawnie określone.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{R}$ z wcześniej określonymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{R}$ z wcześniej określonymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem. Elementami neutralnymi dodawania i mnożenia są odpowiednio klasy abstrakcji ciągów stałych $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{R}$ z wcześniej określonymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem. Elementami neutralnymi dodawania i mnożenia są odpowiednio klasy abstrakcji ciągów stałych $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dowód - kreda i tablica.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{R}$ z wcześniej określonymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem. Elementami neutralnymi dodawania i mnożenia są odpowiednio klasy abstrakcji ciągów stałych $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dowód - kreda i tablica.

Zatem $\mathbb{R}$ nazywać będziemy ciałem liczb rzeczywistych.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{R}$ z wcześniej określonymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem. Elementami neutralnymi dodawania i mnożenia są odpowiednio klasy abstrakcji ciągów stałych $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dowód - kreda i tablica.

Zatem $\mathbb{R}$ nazywać będziemy ciałem liczb rzeczywistych.

Twierdzenie

- $\mathbb{Q}' = \{[a_n]_{n\in\mathbb{N}} : \text{ciąg } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ jest ciągiem stałym}\}$ jest podciałem ciała $\mathbb{R}$..
- odwzorowanie $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}'$, $\varphi(a) = [a]_{n\in\mathbb{N}}$, jest izomorfizmem ciał.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{R}$ z wcześniej określonymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem. Elementami neutralnymi dodawania i mnożenia są odpowiednio klasy abstrakcji ciągów stałych $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dowód - kreda i tablica.

Zatem $\mathbb{R}$ nazywać będziemy ciałem liczb rzeczywistych.

Twierdzenie

- $\mathbb{Q}' = \{[a_n]_{n\in\mathbb{N}} : \text{ciąg } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ jest ciągiem stałym}\}$ jest podciałem ciała $\mathbb{R}$..
- odwzorowanie $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}'$, $\varphi(a) = [a]_{n\in\mathbb{N}}$, jest izomorfizmem ciał.

Dowód na tablicy.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{R}$ z wcześniej określonymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem. Elementami neutralnymi dodawania i mnożenia są odpowiednio klasy abstrakcji ciągów stałych $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dowód - kreda i tablica.

Zatem $\mathbb{R}$ nazywać będziemy ciałem liczb rzeczywistych.

Twierdzenie

- $\mathbb{Q}' = \{[a_n]_{n\in\mathbb{N}} : \text{ciąg } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ jest ciągiem stałym}\}$ jest podciałem ciała $\mathbb{R}$..
- odwzorowanie $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}'$, $\varphi(a) = [a]_{n\in\mathbb{N}}$, jest izomorfizmem ciał.

Dowód na tablicy.

Uwaga. Wobec powyższego twierdzenia ciało $\mathbb{Q}$ możemy traktować jako podciało ciała $\mathbb{R}$ utożsamiając $a \in \mathbb{Q}$ z klasą abstrakcji ciągu stałego $(a)_{n\in\mathbb{N}}$.

Twierdzenie

Zbiór $\mathbb{R}$ z wcześniej określonymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem. Elementami neutralnymi dodawania i mnożenia są odpowiednio klasy abstrakcji ciągów stałych $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dowód - kreda i tablica.

Zatem $\mathbb{R}$ nazywać będziemy ciałem liczb rzeczywistych.

Twierdzenie

- $\mathbb{Q}' = \{[a_n]_{n\in\mathbb{N}} : \text{ciąg } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ jest ciągiem stałym}\}$ jest podciałem ciała $\mathbb{R}$..
- odwzorowanie $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}'$, $\varphi(a) = [a]_{n\in\mathbb{N}}$, jest izomorfizmem ciał.

Dowód na tablicy.

Uwaga. Wobec powyższego twierdzenia ciało $\mathbb{Q}$ możemy traktować jako podciało ciała $\mathbb{R}$ utożsamiając $a \in \mathbb{Q}$ z klasą abstrakcji ciągu stałego $(a)_{n\in\mathbb{N}}$.
Zamiast klasy $[a]_{n\in\mathbb{N}}$ ciągu stałego $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ będziemy po prostu pisali a.

Definicja

W ciele $\mathbb{R}$ określamy relację $<$ w następujący sposób:

$$[a_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} \iff \bigvee_{\varepsilon_0\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} a_n + \varepsilon_0 < b_n.$$

Definicja

W ciele $\mathbb{R}$ określamy relację $<$ w następujący sposób:

$$[a_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} \iff \bigvee_{\varepsilon_0\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} a_n + \varepsilon_0 < b_n.$$

Prawdziwe jest twierdzenie

Twierdzenie

- Relacja $<$ jest poprawnie określona.

Definicja

W ciele $\mathbb{R}$ określamy relację $<$ w następujący sposób:

$$[a_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} \iff \bigvee_{\varepsilon_0\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} a_n + \varepsilon_0 < b_n.$$

Prawdziwe jest twierdzenie

Twierdzenie

- Relacja $<$ jest poprawnie określona.
- $[a_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} \implies [a_n]_{n\in\mathbb{N}} + [c_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} + [c_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicja

W ciele $\mathbb{R}$ określamy relację $<$ w następujący sposób:

$$[a_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} \iff \bigvee_{\varepsilon_0\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} a_n + \varepsilon_0 < b_n.$$

Prawdziwe jest twierdzenie

Twierdzenie

- Relacja $<$ jest poprawnie określona.
- $[a_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} \implies [a_n]_{n\in\mathbb{N}} + [c_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} + [c_n]_{n\in\mathbb{N}}$.
- $[a_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}},\ [0]_{n\in\mathbb{N}} < [c_n]_{n\in\mathbb{N}} \implies [a_n]_{n\in\mathbb{N}} \cdot [c_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} \cdot [c_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicja

W ciele $\mathbb{R}$ określamy relację $<$ w następujący sposób:

$$[a_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} \iff \bigvee_{\varepsilon_0\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} a_n + \varepsilon_0 < b_n.$$

Prawdziwe jest twierdzenie

Twierdzenie

- Relacja $<$ jest poprawnie określona.
- $[a_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} \implies [a_n]_{n\in\mathbb{N}} + [c_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} + [c_n]_{n\in\mathbb{N}}$.
- $[a_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}},\ [0]_{n\in\mathbb{N}} < [c_n]_{n\in\mathbb{N}} \implies [a_n]_{n\in\mathbb{N}} \cdot [c_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} \cdot [c_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicja

W ciele $\mathbb{R}$ określamy relację $<$ w następujący sposób:

$$[a_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} \iff \bigvee_{\varepsilon_0\in\mathbb{Q}^+} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} a_n + \varepsilon_0 < b_n.$$

Prawdziwe jest twierdzenie

Twierdzenie

- Relacja $<$ jest poprawnie określona.
- $[a_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} \implies [a_n]_{n\in\mathbb{N}} + [c_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} + [c_n]_{n\in\mathbb{N}}$.
- $[a_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}},\ [0]_{n\in\mathbb{N}} < [c_n]_{n\in\mathbb{N}} \implies [a_n]_{n\in\mathbb{N}} \cdot [c_n]_{n\in\mathbb{N}} < [b_n]_{n\in\mathbb{N}} \cdot [c_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicja

$$|[a_n]_{n\in\mathbb{N}}| = \begin{cases} [a_n]_{n\in\mathbb{N}}, & \text{gdy } [a_n]_{n\in\mathbb{N}} \geqslant [0]_{n\in\mathbb{N}} \\ -[a_n]_{n\in\mathbb{N}}, & \text{gdy } [a_n]_{n\in\mathbb{N}} < [0]_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}.$$

Twierdzenie

Każda liczba rzeczywista jest granicą ciagu liczb wymiernych

$$[a_n]_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{m\to\infty} a_m.$$

Twierdzenie

Każda liczba rzeczywista jest granicą ciagu liczb wymiernych

$$[a_n]_{n\in\mathbb{N}} = \lim_{m\to\infty} a_m.$$

I znowu tablica.

$\heartsuit\heartsuit\heartsuit$

I to już koniec!