Wykład 7
Macierze i wyznaczniki

Andrzej Sładek
sladek@ux2.math.us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Wykład jest przewidziany na 4 godziny lekcyjne

Wykład jest przewidziany na 4 godziny lekcyjne

Tematy poruszane na wykładzie można znaleźć w:

Wykład jest przewidziany na 4 godziny lekcyjne

Tematy poruszane na wykładzie można znaleźć w:

- A. Białynicki-Birula, *Algebra*, Bibl. Mat. 40, PWN 2009, [rozdz. IV, §8]
- A.I. Kostrykin, *Wstęp do algebry, t. I*, PWN 2004, [rozdz. III]

Wykład jest przewidziany na 4 godziny lekcyjne

Tematy poruszane na wykładzie można znaleźć w:

- A. Białynicki-Birula, *Algebra*, Bibl. Mat. 40, PWN 2009, [rozdz. IV, §8]
- A.I. Kostrykin, *Wstęp do algebry, t. I*, PWN 2004, [rozdz. III]

Jednak w powyższych pozycjach niektóre rozważane na wykładzie pojęcia pojawiają się w szerszym kontekście mogąc sprawiać trudność studentom pierwszego semestru.

Definicja

Macierzą o n kolumnach i m wierszach nad ciałem K nazywamy tablicę postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in K, \ i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n.$$

Definicja

Macierzą o n kolumnach i m wierszach nad ciałem K nazywamy tablicę postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in K, \; i = 1, ..., m, \; j = 1, ..., n.$$

Element a_{ij} jest współczynnikiem macierzy A stojącym w $i-$tym wierszu i $j-$tej kolumnie.

Definicja

Macierzą o n kolumnach i m wierszach nad ciałem K nazywamy tablicę postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ a_{ij} \in K, \ i = 1, ..., m, \ j = 1, ..., n.$$

Element a_{ij} jest współczynnikiem macierzy A stojącym w $i-$tym wierszu i $j-$tej kolumnie.
Zbiór wszystkich macierzy o n kolumnach i m wierszach oznaczać będziemy przez K_m^n.

Dodawanie i odejmowanie macierzy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Dodawanie i odejmowanie macierzy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy przez element ciała K

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ca_{m1} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

Własności działań

Jeśli $A, B, C \in K_m^n$ oraz $\mathbb{O} \in K_m^n$ oznacza macierz zawierającą same zera, a, b są elementami ciała K, to

$$A + B = B + A$$

Własności działań

Jeśli $A, B, C \in K_m^n$ oraz $\mathbb{O} \in K_m^n$ oznacza macierz zawierającą same zera, a, b są elementami ciała K, to

$$A + B = B + A \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

Własności działań

Jeśli $A, B, C \in K^n_m$ oraz $\mathbb{O} \in K^n_m$ oznacza macierz zawierającą same zera, a, b są elementami ciała K, to

$$A + B = B + A \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + \mathbb{O} = A$$

Własności działań

Jeśli $A, B, C \in K_m^n$ oraz $\mathbb{O} \in K_m^n$ oznacza macierz zawierającą same zera, a, b są elementami ciała K, to

$$A + B = B + A \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + \mathbb{O} = A \qquad A + (-A) = \mathbb{O}$$

Własności działań

Jeśli $A, B, C \in K_m^n$ oraz $\mathbb{O} \in K_m^n$ oznacza macierz zawierającą same zera, a, b są elementami ciała K, to

$$A + B = B + A \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + \mathbb{O} = A \qquad A + (-A) = \mathbb{O}$$

$$a(A + B) = aA + aB$$

Własności działań

Jeśli $A, B, C \in K^n_m$ oraz $\mathbb{O} \in K^n_m$ oznacza macierz zawierającą same zera, a, b są elementami ciała K, to

$$A + B = B + A \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + \mathbb{O} = A \qquad A + (-A) = \mathbb{O}$$

$$a(A + B) = aA + aB \qquad (a + b)A = aA + bA$$

Własności działań

Jeśli $A, B, C \in K_m^n$ oraz $\mathbb{O} \in K_m^n$ oznacza macierz zawierającą same zera, a, b są elementami ciała K, to

$$A + B = B + A \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + \mathbb{O} = A \qquad A + (-A) = \mathbb{O}$$

$$a(A + B) = aA + aB \qquad (a + b)A = aA + bA$$

$$1A = A$$

Własności działań

Jeśli $A, B, C \in K^n_m$ oraz $\mathbb{O} \in K^n_m$ oznacza macierz zawierającą same zera, a, b są elementami ciała K, to

$$A + B = B + A \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + \mathbb{O} = A \qquad A + (-A) = \mathbb{O}$$

$$a(A + B) = aA + aB \qquad (a + b)A = aA + bA$$

$$1A = A \qquad (ab)A = a(bA)$$

Sprawdzenie na tablicy przy użyciu kredy.

Własności działań

Jeśli $A, B, C \in K^n_m$ oraz $\mathbb{O} \in K^n_m$ oznacza macierz zawierającą same zera, a, b są elementami ciała K, to

$$A + B = B + A \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + \mathbb{O} = A \qquad A + (-A) = \mathbb{O}$$

$$a(A + B) = aA + aB \qquad (a + b)A = aA + bA$$

$$1A = A \qquad (ab)A = a(bA)$$

Sprawdzenie na tablicy przy użyciu kredy.

Co oznaczają własności w pierwszych dwóch wierszach?

Własności działań

Jeśli $A, B, C \in K_m^n$ oraz $\mathbb{O} \in K_m^n$ oznacza macierz zawierającą same zera, a, b są elementami ciała K, to

$$A + B = B + A \qquad A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + \mathbb{O} = A \qquad A + (-A) = \mathbb{O}$$

$$a(A + B) = aA + aB \qquad (a + b)A = aA + bA$$

$$1A = A \qquad (ab)A = a(bA)$$

Sprawdzenie na tablicy przy użyciu kredy.

Co oznaczają własności w pierwszych dwóch wierszach?

Stwierdzenie

Zbiór K_m^n z działaniem dodawania macierzy jest grupą przemienną.

Zadanie

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Oblicz

$$5(A + 2B) + 4(2A - B).$$

Zadanie

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Oblicz

$$5(A+2B)+4(2A-B).$$

2. Rozwiąż równanie macierzowe

$$3(A+X)+5(3X+B)=A-B.$$

Zadanie

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Oblicz

$$5(A+2B)+4(2A-B).$$

2. Rozwiąż równanie macierzowe

$$3(A+X)+5(3X+B)=A-B.$$

3. Rozwiąż układ równań macierzowych

$$\begin{cases} 2X + 5Y = 2A - B \\ -X + 2Y = 3A + B \end{cases}.$$

Definicja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in K_m^n, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \in K_n^r.$$

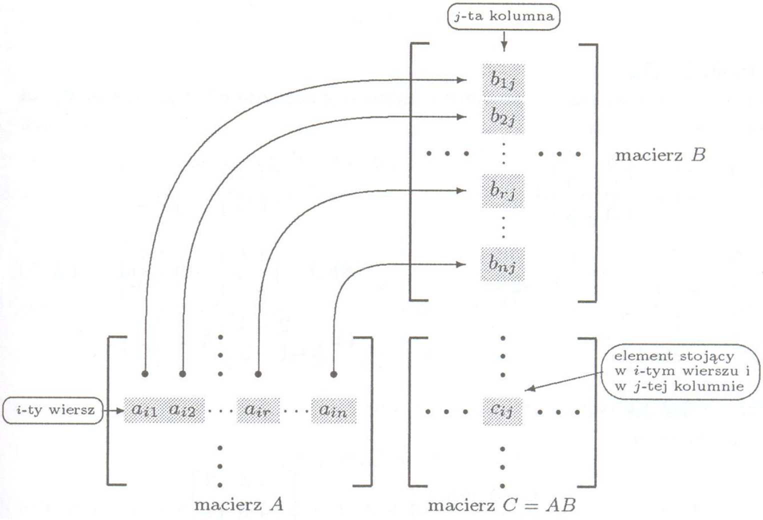
Iloczynem macierzy A oraz B nazywamy macierz

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mr} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_m^r$$

taką, że

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Zobaczmy to na rysunku



$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Po co mnożyć macierze?

Po co mnożyć macierze?

Spójrzmy na przykład.

Przykład

Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Wtedy } A \cdot B = \begin{bmatrix} 34 & 12 & 20 \\ 55 & 20 & 37 \\ 51 & 25 & 30 \end{bmatrix}$$

Po co mnożyć macierze?

Spójrzmy na przykład.

Przykład

Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Wtedy } A \cdot B = \begin{bmatrix} 34 & 12 & 20 \\ 55 & 20 & 37 \\ 51 & 25 & 30 \end{bmatrix}$$

Niech element a_{ik} macierzy A oznacza ilość sztuk towaru T_k, którą chce kupić klient K_i, zaś element b_{kj} macierzy B niech oznacza cenę towaru T_k w sklepie S_j, gdzie $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, $1 \leqslant j \leqslant 3$. Z iloczynu $A \cdot B$ odczytać:

1. kwotę, jaką zapłaciłby klient K_3 w sklepie S_2,

Po co mnożyć macierze?

Spójrzmy na przykład.

Przykład

Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Wtedy } A \cdot B = \begin{bmatrix} 34 & 12 & 20 \\ 55 & 20 & 37 \\ 51 & 25 & 30 \end{bmatrix}$$

Niech element a_{ik} macierzy A oznacza ilość sztuk towaru T_k, którą chce kupić klient K_i, zaś element b_{kj} macierzy B niech oznacza cenę towaru T_k w sklepie S_j, gdzie $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, $1 \leqslant j \leqslant 3$. Z iloczynu $A \cdot B$ odczytać:

1. kwotę, jaką zapłaciłby klient K_3 w sklepie S_2,
2. kwotę, jaką zapłaciliby łącznie wszyscy klienci w sklepie S_1,

Po co mnożyć macierze?

Spójrzmy na przykład.

Przykład

Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Wtedy } A \cdot B = \begin{bmatrix} 34 & 12 & 20 \\ 55 & 20 & 37 \\ 51 & 25 & 30 \end{bmatrix}$$

Niech element a_{ik} macierzy A oznacza ilość sztuk towaru T_k, którą chce kupić klient K_i, zaś element b_{kj} macierzy B niech oznacza cenę towaru T_k w sklepie S_j, gdzie $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, $1 \leqslant j \leqslant 3$. Z iloczynu $A \cdot B$ odczytać:

1. kwotę, jaką zapłaciłby klient K_3 w sklepie S_2,
2. kwotę, jaką zapłaciliby łącznie wszyscy klienci w sklepie S_1,
3. numer sklepu, w którym klient K_2 zapłaciłby najmniej,

Po co mnożyć macierze?

Spójrzmy na przykład.

Przykład

Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Wtedy } A \cdot B = \begin{bmatrix} 34 & 12 & 20 \\ 55 & 20 & 37 \\ 51 & 25 & 30 \end{bmatrix}$$

Niech element a_{ik} macierzy A oznacza ilość sztuk towaru T_k, którą chce kupić klient K_i, zaś element b_{kj} macierzy B niech oznacza cenę towaru T_k w sklepie S_j, gdzie $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, $1 \leqslant j \leqslant 3$. Z iloczynu $A \cdot B$ odczytać:

1. kwotę, jaką zapłaciłby klient K_3 w sklepie S_2,
2. kwotę, jaką zapłaciliby łącznie wszyscy klienci w sklepie S_1,
3. numer sklepu, w którym klient K_2 zapłaciłby najmniej,
4. numer sklepu, w którym klient K_1 zapłaciłby najwięcej.

Własności mnożenia macierzy

1. Jeśli $A \in K_m^n$, $B, C \in K_n^k$, to $A(B+C) = AB + AC$.

Własności mnożenia macierzy

1. Jeśli $A \in K^n_m$, $B, C \in K^k_n$, to $A(B + C) = AB + AC$.
2. Jeśli $A, B \in K^n_m$, $C \in K^k_n$, to $(A + B)C = AC + BC$.

Własności mnożenia macierzy

1. Jeśli $A \in K_m^n$, $B, C \in K_n^k$, to $A(B+C) = AB + AC$.
2. Jeśli $A, B \in K_m^n$, $C \in K_n^k$, to $(A+B)C = AC + BC$.
3. Jeśli $A \in K_m^n$, $B \in K_n^k$ oraz $c \in K$, to $A(cB) = (cA)B = c(AB)$.

Własności mnożenia macierzy

1. Jeśli $A \in K_m^n$, $B, C \in K_n^k$, to $A(B+C) = AB + AC$.
2. Jeśli $A, B \in K_m^n$, $C \in K_n^k$, to $(A+B)C = AC + BC$.
3. Jeśli $A \in K_m^n$, $B \in K_n^k$ oraz $c \in K$, to $A(cB) = (cA)B = c(AB)$.
4. Jeśli $A \in K_m^n$, $B \in K_n^k$, $C \in K_k^r$, to $A(BC) = (AB)C$.

Własności mnożenia macierzy

1. Jeśli $A \in K_m^n$, $B, C \in K_n^k$, to $A(B+C) = AB + AC$.
2. Jeśli $A, B \in K_m^n$, $C \in K_n^k$, to $(A+B)C = AC + BC$.
3. Jeśli $A \in K_m^n$, $B \in K_n^k$ oraz $c \in K$, to $A(cB) = (cA)B = c(AB)$.
4. Jeśli $A \in K_m^n$, $B \in K_n^k$, $C \in K_k^r$, to $A(BC) = (AB)C$.
5. Jeśli $A \in K_m^n$, to $AI_n = I_mA = A$,
   gdzie I_n oznacza macierz kwadratową stopnia n z jedynkami na przekątnej i zerami poza nią.

Własności mnożenia macierzy

1. Jeśli $A \in K_m^n$, $B, C \in K_n^k$, to $A(B+C) = AB + AC$.
2. Jeśli $A, B \in K_m^n$, $C \in K_n^k$, to $(A+B)C = AC + BC$.
3. Jeśli $A \in K_m^n$, $B \in K_n^k$ oraz $c \in K$, to $A(cB) = (cA)B = c(AB)$.
4. Jeśli $A \in K_m^n$, $B \in K_n^k$, $C \in K_k^r$, to $A(BC) = (AB)C$.
5. Jeśli $A \in K_m^n$, to $AI_n = I_m A = A$,
   gdzie I_n oznacza macierz kwadratową stopnia n z jedynkami na przekątnej i zerami poza nią.

Użyjmy kredy do sprawdzenia tych własności.

Własności mnożenia macierzy

1. Jeśli $A \in K^n_m$, $B, C \in K^k_n$, to $A(B+C) = AB + AC$.
2. Jeśli $A, B \in K^n_m$, $C \in K^k_n$, to $(A+B)C = AC + BC$.
3. Jeśli $A \in K^n_m$, $B \in K^k_n$ oraz $c \in K$, to $A(cB) = (cA)B = c(AB)$.
4. Jeśli $A \in K^n_m$, $B \in K^k_n$, $C \in K^r_k$, to $A(BC) = (AB)C$.
5. Jeśli $A \in K^n_m$, to $AI_n = I_m A = A$,
   gdzie I_n oznacza macierz kwadratową stopnia n z jedynkami na przekątnej i zerami poza nią.

Użyjmy kredy do sprawdzenia tych własności.

Uwaga Mnożenie macierzy nie jest przemienne. Zobacz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Własności mnożenia macierzy

1. Jeśli $A \in K^n_m$, $B, C \in K^k_n$, to $A(B + C) = AB + AC$.
2. Jeśli $A, B \in K^n_m$, $C \in K^k_n$, to $(A + B)C = AC + BC$.
3. Jeśli $A \in K^n_m$, $B \in K^k_n$ oraz $c \in K$, to $A(cB) = (cA)B = c(AB)$.
4. Jeśli $A \in K^n_m$, $B \in K^k_n$, $C \in K^r_k$, to $A(BC) = (AB)C$.
5. Jeśli $A \in K^n_m$, to $AI_n = I_m A = A$,
   gdzie I_n oznacza macierz kwadratową stopnia n z jedynkami na przekątnej i zerami poza nią.

Użyjmy kredy do sprawdzenia tych własności.

Uwaga Mnożenie macierzy nie jest przemienne. Zobacz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

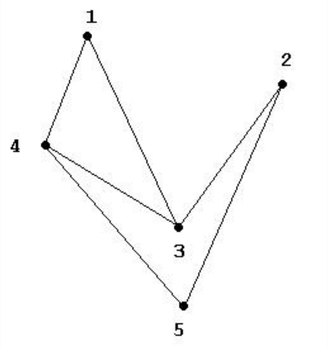
Uwaga Iloczyn macierzy możesz obliczyć przy pomocy arkusza kalkulacyjnego Excel (zob. załączony plik `macierze.xls`)

Jeszcze jeden przykład zastosownia mnożenia macierzy.

Jeszcze jeden przykład zastosownia mnożenia macierzy.

Zadanie

Jaki jest związek pomiędzy poniższym grafem oraz macierzą?



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

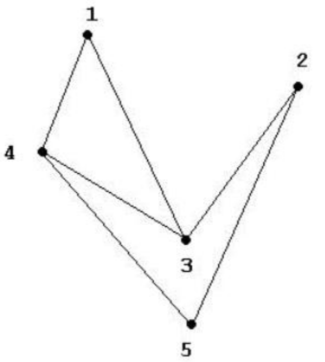
Policzmy (przy pomocy Excela) kolejne potęgi macierzy A i jeszcze raz porównajmy je z grafem.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix} 8 & 6 & 8 & 8 & 6 \\ 6 & 9 & 3 & 11 & 1 \\ 8 & 3 & 15 & 7 & 11 \\ 8 & 11 & 7 & 15 & 3 \\ 6 & 1 & 11 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$



Załóżmy, że graf przedstawia połączenia pomiędzy stacjami kolejki linowej. Masz 2 bilety (3 bilety, 4 bilety) na dowolny przejazd w jedną stronę. Ile różnych wycieczek możesz zrobić wyruszając ze stacji 1 i kończąc na stacji 4? Jak to odczytać z macierzy. To samo pytanie dla stacji 2 oraz 5.

Definicja

Wyznacznikiem macierzy $A = [a_{ij}] \in K_n^n$ nazywamy element $\det A \in K$ określony następująco:

1. $\det A = a_{11}$, gdy $n = 1$, tzn. $A = [a_{11}]$,
2. $\det A = (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} + (-1)^{2+n} a_{2n} \det A_{2n} + \ldots + (-1)^{n+n} a_{nn} \det A_{nn}$, gdzie A_{in} dla $n > 1$ oraz $i = 1, \ldots, n$, jest macierzą powstałą przez skreślenie w macierzy A $i-$tego wiersza i $n-$tej kolumny.

Definicja

Wyznacznikiem macierzy $A = [a_{ij}] \in K_n^n$ nazywamy element $\det A \in K$ określony następująco:

1. $\det A = a_{11}$, gdy $n = 1$, tzn. $A = [a_{11}]$,

2. $\det A = (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} + (-1)^{2+n} a_{2n} \det A_{2n} + \ldots + (-1)^{n+n} a_{nn} \det A_{nn}$,
   gdzie A_{in} dla $n > 1$ oraz $i = 1, \ldots, n$, jest macierzą powstałą przez skreślenie w macierzy A $i-$tego wiersza i $n-$tej kolumny.

$n = 2$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^{1+2} a_{12} \det[a_{21}] + (-1)^{2+2} a_{22} \det[a_{11}] = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}.$$

Definicja

Wyznacznikiem macierzy $A = [a_{ij}] \in K_n^n$ nazywamy element $\det A \in K$ określony następująco:

1. $\det A = a_{11}$, gdy $n = 1$, tzn. $A = [a_{11}]$,

2. $\det A = (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} + (-1)^{2+n} a_{2n} \det A_{2n} + \ldots + (-1)^{n+n} a_{nn} \det A_{nn}$, gdzie A_{in} dla $n > 1$ oraz $i = 1, \ldots, n$, jest macierzą powstałą przez skreślenie w macierzy A $i-$tego wiersza i $n-$tej kolumny.

Definicja

Wyznacznikiem macierzy $A = [a_{ij}] \in K_n^n$ nazywamy element $\det A \in K$ określony następująco:

1. $\det A = a_{11}$, gdy $n = 1$, tzn. $A = [a_{11}]$,
2. $\det A = (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} + (-1)^{2+n} a_{2n} \det A_{2n} + \ldots + (-1)^{n+n} a_{nn} \det A_{nn}$, gdzie A_{in} dla $n > 1$ oraz $i = 1, \ldots, n$, jest macierzą powstałą przez skreślenie w macierzy A $i-$tego wiersza i $n-$tej kolumny.

$n = 3$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$(-1)^4 a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + (-1)^5 a_{23} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + (-1)^6 a_{33} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

Definicja

Wyznacznikiem macierzy $A = [a_{ij}] \in K_n^n$ nazywamy element $\det A \in K$ określony następująco:

1. $\det A = a_{11}$, gdy $n = 1$, tzn. $A = [a_{11}]$,
2. $\det A = (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} + (-1)^{2+n} a_{2n} \det A_{2n} + \ldots + (-1)^{n+n} a_{nn} \det A_{nn}$, gdzie A_{in} dla $n > 1$ oraz $i = 1, \ldots, n$, jest macierzą powstałą przez skreślenie w macierzy A $i-$tego wiersza i $n-$tej kolumny.

$n = 3$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$(-1)^4 a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + (-1)^5 a_{23} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + (-1)^6 a_{33} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$

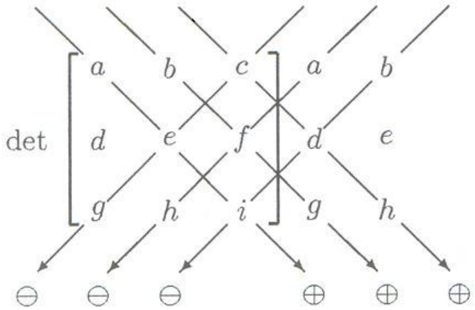
$$= (a_{13}a_{21}a_{32} + a_{23}a_{12}a_{31} + a_{33}a_{11}a_{22}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{11}a_{32} + a_{33}a_{12}a_{21}).$$

$n = 3$

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} =$$

$$= (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi).$$

Wzór ten można zapamiętać spoglądając na obrazek:



Uwaga

Jeśli przyjrzymy się definicji wyznacznika, to zauważamy, że jego wyliczanie z wzoru rekurencyjnego jest bardzo kłopotliwe. Dla $n = 4$ trzeba policzyć 4 wyznaczniki macierzy stopnia 3, a dla $n = 5$ policzyć musimy 5 wyznaczników stopnia 4, co w konsekwencji daje aż 20 wyznaczników stopnia 3.

Uwaga

Jeśli przyjrzymy się definicji wyznacznika, to zauważamy, że jego wyliczanie z wzoru rekurencyjnego jest bardzo kłopotliwe. Dla $n = 4$ trzeba policzyć 4 wyznaczniki macierzy stopnia 3, a dla $n = 5$ policzyć musimy 5 wyznaczników stopnia 4, co w konsekwencji daje aż 20 wyznaczników stopnia 3.

Pytanie

Czy jest łatwiejszy sposób obliczania wyznacznika?

Własności wyznacznika

1. $\det A = \det A^T$.
2. $\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & aa_{1i} + a' a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & aa_{ni} + a' a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$

   $a \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + a' \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$
3. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej kolumny przez $a \in K$, to $\det B = a \det A$.
4. Jeśli macierz A zawiera kolumnę złożoną z samych zer, to $\det A = 0$.
5. Jeśli macierz A zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
6. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez element ciała K, to $\det B = \det A$.
7. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch kolumn, to $\det B = -\det A$.

Powyższe własności są prawdziwe również dla wierszy.

Własności wyznacznika

1. $\det A = \det A^T$.
2. $$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & aa_{1i} + a' a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & aa_{ni} + a' a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$
$$a \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + a' \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
3. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej kolumny przez $a \in K$, to $\det B = a \det A$.
4. Jeśli macierz A zawiera kolumnę złożoną z samych zer, to $\det A = 0$.
5. Jeśli macierz A zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
6. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez element ciała K, to $\det B = \det A$.
7. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch kolumn, to $\det B = -\det A$.

Powyższe własności są prawdziwe również dla wierszy.

Własności wyznacznika

1. $\det A = \det A^T$.
2. $$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & aa_{1i} + a' a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & aa_{ni} + a' a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$
$$a \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + a' \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
3. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej kolumny przez $a \in K$, to $\det B = a \det A$.
4. Jeśli macierz A zawiera kolumnę złożoną z samych zer, to $\det A = 0$.
5. Jeśli macierz A zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
6. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez element ciała K, to $\det B = \det A$.
7. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch kolumn, to $\det B = -\det A$.

Powyższe własności są prawdziwe również dla wierszy.

Własności wyznacznika

1. $\det A = \det A^T$.
2. $\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & aa_{1i} + a' a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & aa_{ni} + a' a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$
   $a \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + a' \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$
3. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej kolumny przez $a \in K$, to $\det B = a \det A$.
4. Jeśli macierz A zawiera kolumnę złożoną z samych zer, to $\det A = 0$.
5. Jeśli macierz A zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
6. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez element ciała K, to $\det B = \det A$.
7. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch kolumn, to $\det B = -\det A$.

Powyższe własności są prawdziwe również dla wierszy.

Własności wyznacznika

1. $\det A = \det A^T$.
2. $$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & aa_{1i} + a'a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & aa_{ni} + a'a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$
$$a \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + a' \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
3. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej kolumny przez $a \in K$, to $\det B = a \det A$.
4. Jeśli macierz A zawiera kolumnę złożoną z samych zer, to $\det A = 0$.
5. Jeśli macierz A zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
6. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez element ciała K, to $\det B = \det A$.
7. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch kolumn, to $\det B = -\det A$.

Powyższe własności są prawdziwe również dla wierszy.

Własności wyznacznika

1. $\det A = \det A^T$.
2. $$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & aa_{1i} + a' a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & aa_{ni} + a' a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$
$$a \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + a' \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
3. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej kolumny przez $a \in K$, to $\det B = a \det A$.
4. Jeśli macierz A zawiera kolumnę złożoną z samych zer, to $\det A = 0$.
5. Jeśli macierz A zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
6. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez element ciała K, to $\det B = \det A$.
7. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch kolumn, to $\det B = -\det A$.

Powyższe własności są prawdziwe również dla wierszy.

Własności wyznacznika

1. $\det A = \det A^T$.
2. $$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & aa_{1i} + a' a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & aa_{ni} + a' a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$
$$a \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + a' \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
3. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej kolumny przez $a \in K$, to $\det B = a \det A$.
4. Jeśli macierz A zawiera kolumnę złożoną z samych zer, to $\det A = 0$.
5. Jeśli macierz A zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
6. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez element ciała K, to $\det B = \det A$.
7. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch kolumn, to $\det B = -\det A$.

Powyższe własności są prawdziwe również dla wierszy.

Własności wyznacznika

1. $\det A = \det A^T$.
2. $\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & aa_{1i} + a' a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & aa_{ni} + a' a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$
$$a \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + a' \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
3. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej kolumny przez $a \in K$, to $\det B = a \det A$.
4. Jeśli macierz A zawiera kolumnę złożoną z samych zer, to $\det A = 0$.
5. Jeśli macierz A zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
6. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez element ciała K, to $\det B = \det A$.
7. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch kolumn, to $\det B = -\det A$.

Powyższe własności są prawdziwe również dla wierszy.

Własności wyznacznika

1. $\det A = \det A^T$.
2. $$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & aa_{1i} + a' a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & aa_{ni} + a' a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$
$$a \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + a' \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
3. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez pomnożenie jednej kolumny przez $a \in K$, to $\det B = a \det A$.
4. Jeśli macierz A zawiera kolumnę złożoną z samych zer, to $\det A = 0$.
5. Jeśli macierz A zawiera dwie proporcjonalne (w szczególności identyczne) kolumny, to $\det A = 0$.
6. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez dodanie do jednej kolumny innej pomnożonej przez element ciała K, to $\det B = \det A$.
7. Jeśli macierz B powstała z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch kolumn, to $\det B = -\det A$.

Powyższe własności są prawdziwe również dla wierszy.

Twierdzenie Laplace'a *(P. S. Laplace (1749-1827))*

Jeśli A jest macierzą stopnia $n > 1$, to dla dowolnego j

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}$$

oraz

$$\det A = (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1} + (-1)^{j+2} a_{j2} \det A_{j2} + \ldots + (-1)^{j+n} a_{jn} \det A_{jn}.$$

Twierdzenie Laplace'a *(P. S. Laplace (1749-1827))*

Jeśli A jest macierzą stopnia $n > 1$, to dla dowolnego j

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}$$

oraz

$$\det A = (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1} + (-1)^{j+2} a_{j2} \det A_{j2} + \ldots + (-1)^{j+n} a_{jn} \det A_{jn}.$$

Porównaj to z definicją wyznacznika:

Definicja

Wyznacznikiem macierzy $A = [a_{ij}] \in K_n^n$ nazywamy element $\det A \in K$ określony następująco:

1. $\det A = a_{11}$, gdy $n = 1$, tzn. $A = [a_{11}]$,
2. $\det A = (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} + (-1)^{2+n} a_{2n} \det A_{2n} + \ldots + (-1)^{n+n} a_{nn} \det A_{nn}$, gdzie A_{in} dla $n > 1$ oraz $i = 1, \ldots, n$, jest macierzą powstałą przez skreślenie w macierzy A $i-$tego wiersza i $n-$tej kolumny.

Wniosek

- $$(-1)^{1+j}a_{1k}\det A_{1j}+(-1)^{2+j}a_{2k}\det A_{2j}+\ldots+(-1)^{n+j}a_{nk}\det A_{nj} = \\ = \begin{cases} \det(A), & \text{gdy } j=k \\ 0, & \text{gdy } j\neq k \end{cases},$$

- $$\det A = (-1)^{j+1}a_{k1}\det A_{j1}+(-1)^{j+2}a_{k2}\det A_{j2}+\ldots+(-1)^{j+n}a_{kn}\det A_{jn} = \\ = \begin{cases} \det(A), & \text{gdy } j=k \\ 0, & \text{gdy } j\neq k \end{cases}.$$

Teraz już

możemy stosunkowo łatwo

obliczać wyznaczniki dużych macierzy!!!

Zadanie

Pokaż, że

$$u_n := \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Zadanie

Pokaż, że

$$u_n := \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Wsk. "Rozwijając" wyznacznik względem ostatniego wiersza pokaż, że $u_n = u_{n-1}a_{nn}$ *wykorzystując wzór z tw. Laplace'a*

$$\det A = (-1)^{j+1}a_{j1}\det A_{j1} + (-1)^{j+2}a_{j2}\det A_{j2} + \dots + (-1)^{j+n}a_{jn}\det A_{jn}.$$

dla $j = n$.

Zadanie

Pokaż, że

$$u_n := \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Wsk. "Rozwijając" wyznacznik względem ostatniego wiersza pokaż, że $u_n = u_{n-1}a_{nn}$ *wykorzystując wzór z tw. Laplace'a*

$$\det A = (-1)^{j+1}a_{j1}\det A_{j1} + (-1)^{j+2}a_{j2}\det A_{j2} + \dots + (-1)^{j+n}a_{jn}\det A_{jn}.$$

dla $j = n$.

Podobnie, jeśli macierz zawiera zera nad przekątną, to wyznacznik tej macierzy jest iloczynem elementów na przekątnej.

Zadanie

$$\det \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ \hline c_{11} & \dots & c_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1m} & \dots & c_{mn} & b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{array}\right] =$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

Zadanie

$$\det \left[\begin{array}{ccc|ccc} c_{11} & \dots & c_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1m} & \dots & c_{mn} & b_{m1} & \dots & b_{mm} \\ \hline a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] =$$

$$= (-1)^{mn} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

Zadanie

$$\det\left[\begin{array}{ccc|ccc} c_{11} & \dots & c_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1m} & \dots & c_{mn} & b_{m1} & \dots & b_{mm} \\ \hline a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] =$$

$$= (-1)^{mn} \det\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

Zajrzyj do *A. Białynicki-Birula, Algebra liniowa z geometrią, Przykład 6.7, str.158*

Zadanie

Oblicz wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Rozw. Wykonujemy operacje elementarne na liniach macierzy:

	planowana operacja
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	I wiersz$\cdot(-2)+$ II wiersz

	planowana operacja
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	I wiersz$\cdot(-2)+$ II wiersz

wyznacznik po planowanej operacji

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

wyznacznik po poprzedniej operacji	planowana operacja
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	I wiersz+ III wiersz

wyznacznik po poprzedniej operacji	planowana operacja
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	I wiersz+ III wiersz

wyznacznik po planowanej operacji
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

wyznacznik po poprzedniej operacji	planowana operacja
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	I wiersz$\cdot(-3)+$ IV wiersz

wyznacznik po poprzedniej operacji	planowana operacja
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	I wiersz$\cdot(-3)+$ IV wiersz

wyznacznik po planowanej operacji

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

wyznacznik po poprzedniej operacji	planowana operacja
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$	II wiersz$\cdot$6+ III wiersz

wyznacznik po poprzedniej operacji	planowana operacja
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$	II wiersz$\cdot 6+$ III wiersz

wyznacznik po planowanej operacji
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 19 & -20 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

wyznacznik po poprzedniej operacji	planowana operacja
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 19 & -20 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$	II wiersz$\cdot(-4)+$ IV wiersz

wyznacznik po poprzedniej operacji	planowana operacja
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 19 & -20 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$	II wiersz$\cdot(-4)+$ IV wiersz

wyznacznik po planowanej operacji

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & -8 & 12 \end{bmatrix}$$

wyznacznik po poprzedniej operacji	planowana operacja
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & -8 & 12 \end{bmatrix}$	III wiersz$\cdot \frac{8}{19} +$ IV wiersz

wyznacznik po poprzedniej operacji	planowana operacja
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & -8 & 12 \end{bmatrix}$	III wiersz$\cdot \frac{8}{19} +$ IV wiersz

wyznacznik po planowanej operacji
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{68}{19} \end{bmatrix}$

wyznacznik po poprzedniej operacji	planowana operacja
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & -8 & 12 \end{bmatrix}$	III wiersz$\cdot \frac{8}{19} +$ IV wiersz

wyznacznik po planowanej operacji

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{68}{19} \end{bmatrix}$$

wyznacznik po poprzedniej operacji	planowana operacja
$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & -8 & 12 \end{bmatrix}$	III wiersz$\cdot \frac{8}{19} +$ IV wiersz

wyznacznik po planowanej operacji

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{68}{19} \end{bmatrix} = -68$$

Twierdzenie Cauchy'ego *(A. Cauchy(1789-1857))*

Jeżeli $A, B \in K_n^n$, to
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Twierdzenie Cauchy'ego *(A. Cauchy(1789-1857))*

Jeżeli $A, B \in K_n^n$, to
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Dowód. Pokażemy, że macierz
$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -I_n & B \end{array}\right]$$
za pomocą operacji elementarnych można sprowadzić do postaci
$$C' = \left[\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right]$$

Twierdzenie Cauchy'ego *(A. Cauchy(1789-1857))*

Jeżeli $A, B \in K_n^n$, to

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Dowód. Pokażemy, że macierz

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -I_n & B \end{array}\right]$$

za pomocą operacji elementarnych można sprowadzić do postaci

$$C' = \left[\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right]$$

Wtedy na podstawie poprzednich zadań i własności wyznacznika

$$\det(A)\det(B) = \det(C) = \det(C') = (-1)^{n^2}(-1)^n\det(AB) =$$

$$= (-1)^{n(n+1)}\det(AB) = \det(AB).$$

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -I_n & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{ni} & \dots & b_{nn} \end{array}\right]$$

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -I_n & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{ni} & \dots & b_{nn} \end{array}\right]$$

Dla $i \in \{1, ..., n\}$ wykonujemy na powyższej macierzy następujące operacje elementarne:

- 1-sza kolumna$\cdot b_{1i}$ $+$ $(n+i)$-ta kolumna

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -I_n & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{ni} & \dots & b_{nn} \end{array}\right]$$

Dla $i \in \{1, ..., n\}$ wykonujemy na powyższej macierzy następujące operacje elementarne:

- 1-sza kolumna$\cdot b_{1i}$ $+$ $(n+i)$-ta kolumna
- 2-ga kolumna$\cdot b_{2i}$ $+$ $(n+i)$-ta kolumna

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -I_n & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{ni} & \dots & b_{nn} \end{array}\right]$$

Dla $i \in \{1, ..., n\}$ wykonujemy na powyższej macierzy następujące operacje elementarne:

- 1-sza kolumna$\cdot b_{1i}$ $+$ $(n+i)$-ta kolumna
- 2-ga kolumna$\cdot b_{2i}$ $+$ $(n+i)$-ta kolumna

  $\vdots$

- n-ta kolumna$\cdot b_{ni}$ $+$ $(n+i)$-ta kolumna.

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -I_n & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{ni} & \dots & b_{nn} \end{array}\right]$$

Dla $i \in \{1, ..., n\}$ wykonujemy na powyższej macierzy następujące operacje elementarne:

- 1-sza kolumna$\cdot b_{1i}$ $+$ $(n+i)$-ta kolumna
- 2-ga kolumna$\cdot b_{2i}$ $+$ $(n+i)$-ta kolumna

  $\vdots$

- n-ta kolumna$\cdot b_{ni}$ $+$ $(n+i)$-ta kolumna.

Jak się zmieni $(n+i)$-ta kolumna macierzy C?

Otrzymujemy następującą macierz:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{ki} & \dots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{ki} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{ki} & \dots & 0 \\
\hline
-1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & 0 & \dots & b_{1n} \\
0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & \dots & 0 & \dots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & 0 & \dots & b_{nn}
\end{array}\right]$$

Otrzymujemy następującą macierz:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{ki} & \dots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{ki} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{ki} & \dots & 0 \\
\hline
-1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & 0 & \dots & b_{1n} \\
0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & \dots & 0 & \dots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & 0 & \dots & b_{nn}
\end{array}\right]$$

Zwróćmy uwagę, że w górnej części $(n+i)$-tej kolumny stoi i-ta kolumna macierzy AB.

Otrzymujemy następującą macierz:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{ki} & \dots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{ki} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{ki} & \dots & 0 \\
\hline
-1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & 0 & \dots & b_{1n} \\
0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & \dots & 0 & \dots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & 0 & \dots & b_{nn}
\end{array}\right]$$

Zwróćmy uwagę, że w górnej części $(n+i)$-tej kolumny stoi i-ta kolumna macierzy AB.

Wykonajmy teraz powyższe operacje dla każdego $i = 1, ..., n$. Co otrzymamy?

Wynikiem wszystkich tych operacji jest oczywiście macierz

$$C' = \left[\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right]. \qquad \P$$

Definicja

Macierz $A \in K_n^n$ nazywamy odwracalną, jeśli istnieje macierz $B \in K_n^n$ taka, że

$$AB = BA = I_n.$$

Definicja

Macierz $A \in K_n^n$ nazywamy odwracalną, jeśli istnieje macierz $B \in K_n^n$ taka, że

$$AB = BA = I_n.$$

Uwaga

Jeśli macierz A jest odwracalna, to macierz B w powyższej definicji jest jednoznacznie wyznaczona. Nazywamy ją macierzą odwrotną do A i oznaczamy A^{-1}.

Definicja

Macierz $A \in K_n^n$ nazywamy odwracalną, jeśli istnieje macierz $B \in K_n^n$ taka, że

$$AB = BA = I_n.$$

Uwaga

Jeśli macierz A jest odwracalna, to macierz B w powyższej definicji jest jednoznacznie wyznaczona. Nazywamy ją macierzą odwrotną do A i oznaczamy A^{-1}.

Pytanie

Jakie macierze są odwracalne i jak znaleźć macierz odwrotną do macierzy odwracalnej?

Definicja

Macierz $A \in K_n^n$ nazywamy odwracalną, jeśli istnieje macierz $B \in K_n^n$ taka, że

$$AB = BA = I_n.$$

Uwaga

Jeśli macierz A jest odwracalna, to macierz B w powyższej definicji jest jednoznacznie wyznaczona. Nazywamy ją macierzą odwrotną do A i oznaczamy A^{-1}.

Pytanie

Jakie macierze są odwracalne i jak znaleźć macierz odwrotną do macierzy odwracalnej?

Zauważmy, że jeśli $AB = I_n$, to z twierdzenia Cauchy'ego mamy

$$1 = \det(AB) = \det(A)\det(B),$$

a więc

$$\det(A) \neq 0.$$

Twierdzenie

1. Macierz $A = [a_{ij}] \in K_n^n$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A) \neq 0$.
2. Jeśli A jest odwracalna, to $A^{-1} = [b_{ij}]$, gdzie

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)},$$

   a macierz A_{ji} powstaje z macierzy A przez skreślenie j-tego wiersza oraz i-tej kolumny.

Twierdzenie

1. Macierz $A = [a_{ij}] \in K_n^n$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A) \neq 0$.
2. Jeśli A jest odwracalna, to $A^{-1} = [b_{ij}]$, gdzie

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)},$$

a macierz A_{ji} powstaje z macierzy A przez skreślenie j-tego wiersza oraz i-tej kolumny.

Własności macierzy odwrotnej

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Twierdzenie

1. Macierz $A = [a_{ij}] \in K_n^n$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A) \neq 0$.
2. Jeśli A jest odwracalna, to $A^{-1} = [b_{ij}]$, gdzie

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)},$$

a macierz A_{ji} powstaje z macierzy A przez skreślenie j-tego wiersza oraz i-tej kolumny.

Własności macierzy odwrotnej

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Twierdzenie

1. Macierz $A = [a_{ij}] \in K_n^n$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A) \neq 0$.
2. Jeśli A jest odwracalna, to $A^{-1} = [b_{ij}]$, gdzie

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)},$$

a macierz A_{ji} powstaje z macierzy A przez skreślenie j-tego wiersza oraz i-tej kolumny.

Własności macierzy odwrotnej

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Macierz $A = [a_{ij}] \in K_n^n$ taką, że $\det(A) \neq 0$ nazywamy *macierzą nieosobliwą*.

Twierdzenie

1. Macierz $A = [a_{ij}] \in K_n^n$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A) \neq 0$.
2. Jeśli A jest odwracalna, to $A^{-1} = [b_{ij}]$, gdzie

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)},$$

a macierz A_{ji} powstaje z macierzy A przez skreślenie j-tego wiersza oraz i-tej kolumny.

Własności macierzy odwrotnej

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

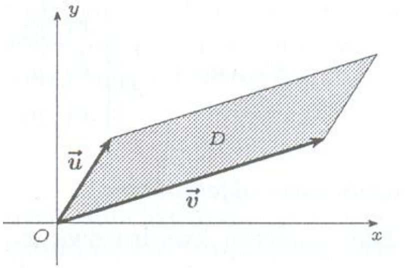
Macierz $A = [a_{ij}] \in K_n^n$ taką, że $\det(A) \neq 0$ nazywamy *macierzą nieosobliwą*.

Zbiór $\mathrm{GL}(n, K) = \{A \in K_n^n; \det(A) \neq 0\}$ z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę. Nazywamy ją *ogólną grupą liniową stopnia n nad ciałem K*.

Wyznacznik ma duże zastosowania w geometrii. Oto kilka przykładów:

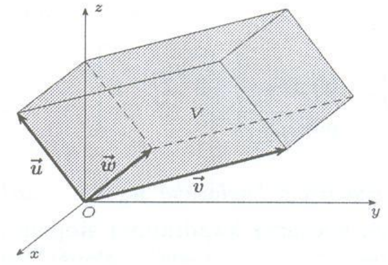
- Pole równoległoboku

Jeśli $\vec{u} = [a, b]$, $\vec{v} = [c, d]$, to pole D równoległoboku "opartego" na tych wektorach (patrz rysunek) jest równe $D = \left| \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right|$.



- Objętość równoległościanu

Jeśli $\vec{u} = [a, b, c]$, $\vec{v} = [d, e, f]$, $\vec{w} = [g, h, i]$, to objętość V równoleglościanu "opartego" na tych wektorach (patrz rysunek) jest równa $V = \left| \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \right|$.



Ale o tym więcej dowiecie się w następnym semestrze na przedmiocie geometria.

Zadania

- Znajdź A^{-1} dla $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, jeśli $ad - bc \neq 0$.

Zadania

- Znajdź A^{-1} dla $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, jeśli $ad - bc \neq 0$.
- Znajdź $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$.

Zadania

- Znajdź A^{-1} dla $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, jeśli $ad - bc \neq 0$.
- Znajdź $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$.

Chyba się zgodzimy, że w tym drugim przypadku trzeba się trochę narachować, aby zastosować wzór z poprzedniego twierdzenia.

Widać, że im wyższy stopień macierzy tym gorzej!

Czy istnieje inny sposób obliczania macierzy odwrotnej?

Bezwyznacznikowy algorytm "odwracania" macierzy

$$[A|I_n] \xrightarrow{\text{operacje elementarne}} \left[I_n|A^{-1}\right]$$

Kolejne kroki:

- Z prawej strony macierzy A dopisujemy macierz jednostkową.
- Na wierszach otrzymanej w ten sposób macierzy wykonujemy operacje elementarne (zamiana wierszy miejscami, mnożenie wierszy przez liczbę różną od zera, dodawanie do elementów jednego wiersza elementów innego wiersza pomnożonego przez liczbę), aby macierz $[A|I_n]$ doprowadzić do postaci $[I_n|B]$.
- Otrzymana macierz B jest macierzą odwrotną do A, tzn. $B = A^{-1}$.

Przykład

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I wiersz $\cdot(-2)+$ II wiersz
I wiersz $\cdot(-1)+$ III wiersz

Przykład

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I wiersz $\cdot(-2)+$ II wiersz
I wiersz $\cdot(-1)+$ III wiersz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Przykład

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I wiersz $\cdot(-2)+$ II wiersz
I wiersz $\cdot(-1)+$ III wiersz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

III wiersz $+$ II wiersz

Przykład

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \text{I wiersz } \cdot(-2) + \text{ II wiersz} \\ \text{I wiersz } \cdot(-1) + \text{ III wiersz} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \text{III wiersz } + \text{ II wiersz}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Przykład

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{I wiersz } \cdot(-2) + \text{ II wiersz} \\ \text{I wiersz } \cdot(-1) + \text{ III wiersz} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{III wiersz } + \text{ II wiersz}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{II wiersz } \cdot(-\tfrac{1}{2})$$

Przykład

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{I wiersz } \cdot(-2) + \text{ II wiersz} \\ \text{I wiersz } \cdot(-1) + \text{ III wiersz} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{III wiersz } + \text{ II wiersz}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{II wiersz } \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Przykład

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{I wiersz } \cdot(-2) + \text{ II wiersz} \\ \text{I wiersz } \cdot(-1) + \text{ III wiersz} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{III wiersz } + \text{ II wiersz}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{II wiersz } \cdot(-\tfrac{1}{2})$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{II wiersz } \cdot(-1) + \text{ I wiersz} \\ \text{II wiersz } \cdot(-1) + \text{ III wiersz} \end{array}$$

Przykład

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I wiersz $\cdot(-2)+$ II wiersz
I wiersz $\cdot(-1)+$ III wiersz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

III wiersz $+$ II wiersz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

II wiersz $\cdot(-\frac{1}{2})$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

II wiersz $\cdot(-1)+$ I wiersz
II wiersz $\cdot(-1)+$ III wiersz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Przykład

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I wiersz $\cdot(-2)+$ II wiersz
I wiersz $\cdot(-1)+$ III wiersz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

III wiersz $+$ II wiersz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

II wiersz $\cdot(-\frac{1}{2})$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

II wiersz $\cdot(-1)+$ I wiersz
II wiersz $\cdot(-1)+$ III wiersz

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

III wiersz $\cdot(-1)$

Przykład

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I wiersz $\cdot(-2)+$ II wiersz
I wiersz $\cdot(-1)+$ III wiersz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

III wiersz $+$ II wiersz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

II wiersz $\cdot(-\frac{1}{2})$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

II wiersz $\cdot(-1)+$ I wiersz
II wiersz $\cdot(-1)+$ III wiersz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

III wiersz $\cdot(-1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Przykład

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{I wiersz } \cdot(-2) + \text{ II wiersz} \\ \text{I wiersz } \cdot(-1) + \text{ III wiersz} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{III wiersz } + \text{ II wiersz}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{II wiersz } \cdot(-\tfrac{1}{2})$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{II wiersz } \cdot(-1) + \text{ I wiersz} \\ \text{II wiersz } \cdot(-1) + \text{ III wiersz} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right] \quad \text{III wiersz } \cdot(-1)$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \quad \text{Zatem } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

To już koniec wykładu 7!

To już koniec wykładu 7!

$\heartsuit\heartsuit\heartsuit$

Dziękuję za uwagę