Wykład 6
Pierścień wielomianów jednej zmiennej

Andrzej Sładek
sladek@ux2.math.us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Wykład jest przewidziany na 4 godziny lekcyjne

Wykład jest przewidziany na 4 godziny lekcyjne

Tematy poruszane na wykładzie można znaleźć w:

Wykład jest przewidziany na 4 godziny lekcyjne

Tematy poruszane na wykładzie można znaleźć w:

- A. Białynicki-Birula, *Algebra,* Bibl. Mat. 40, PWN 2009, [rozdz. VI]
- A.I. Kostrykin, *Wstęp do algebry, t. I,* PWN 2004, [rozdz. V, §2]

Definicje

Wielomianem (jednej zmiennej) o współczynnikach z pierścienia P nazywamy każdy nieskończony ciąg

$$f = (f_0, f_1, f_2, ...)$$

elementów pierścienia P taki, że od pewnego wskaźnika $n \in N \cup \{0\}$ wyrazy f_m tego ciągu są równe 0, tzn. $f_m = 0$ dla $m \geqslant n$.

Definicje

Wielomianem (jednej zmiennej) o współczynnikach z pierścienia P nazywamy każdy nieskończony ciąg

$$f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$$

elementów pierścienia P taki, że od pewnego wskaźnika $n \in N \cup \{0\}$ wyrazy f_m tego ciągu są równe 0, tzn. $f_m = 0$ dla $m \geqslant n$.
Wyrazy $f_0, f_1, f_2, \ldots$ tego ciągu nazywamy **współczynnikami** wielomianu f.

Definicje

Wielomianem (jednej zmiennej) o współczynnikach z pierścienia P nazywamy każdy nieskończony ciąg

$$f = (f_0, f_1, f_2, ...)$$

elementów pierścienia P taki, że od pewnego wskaźnika $n \in N \cup \{0\}$ wyrazy f_m tego ciągu są równe 0, tzn. $f_m = 0$ dla $m \geqslant n$.
Wyrazy $f_0, f_1, f_2, ...$ tego ciągu nazywamy **współczynnikami** wielomianu f.
Wielomian $0 = (0, 0, 0, ...)$ nazywamy **zerowym**, a wielomian $1 = (1, 0, 0, ...)$ **jedynkowym**.

Definicje

Wielomianem (jednej zmiennej) o współczynnikach z pierścienia P nazywamy każdy nieskończony ciąg

$$f = (f_0, f_1, f_2, ...)$$

elementów pierścienia P taki, że od pewnego wskaźnika $n \in N \cup \{0\}$ wyrazy f_m tego ciągu są równe 0, tzn. $f_m = 0$ dla $m \geqslant n$.
Wyrazy $f_0, f_1, f_2, ...$ tego ciągu nazywamy **współczynnikami** wielomianu f.
Wielomian $0 = (0, 0, 0, ...)$ nazywamy **zerowym**, a wielomian $1 = (1, 0, 0, ...)$ **jedynkowym**.
Jeśli f nie jest wielomianem zerowym i $f_n \neq 0$, lecz $f_m = 0$ dla $m > n$, to n nazywamy **stopniem wielomianu** f i oznaczamy $\mathrm{st}(f)$.

Definicje

Wielomianem (jednej zmiennej) o współczynnikach z pierścienia P nazywamy każdy nieskończony ciąg

$$f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$$

elementów pierścienia P taki, że od pewnego wskaźnika $n \in N \cup \{0\}$ wyrazy f_m tego ciągu są równe 0, tzn. $f_m = 0$ dla $m \geqslant n$.
Wyrazy $f_0, f_1, f_2, \ldots$ tego ciągu nazywamy **współczynnikami** wielomianu f.
Wielomian $0 = (0, 0, 0, \ldots)$ nazywamy **zerowym**, a wielomian $1 = (1, 0, 0, \ldots)$ **jedynkowym**.
Jeśli f nie jest wielomianem zerowym i $f_n \neq 0$, lecz $f_m = 0$ dla $m > n$, to n nazywamy **stopniem wielomianu** f i oznaczamy $\mathrm{st}(f)$. Wtedy też współczynnik f_n nazywamy **najwyższym współczynnikiem** wielomianu f.

Definicje

Wielomianem (jednej zmiennej) o współczynnikach z pierścienia P nazywamy każdy nieskończony ciąg

$$f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$$

elementów pierścienia P taki, że od pewnego wskaźnika $n \in N \cup \{0\}$ wyrazy f_m tego ciągu są równe 0, tzn. $f_m = 0$ dla $m \geqslant n$.
Wyrazy $f_0, f_1, f_2, \dots$ tego ciągu nazywamy **współczynnikami** wielomianu f.
Wielomian $0 = (0, 0, 0, \dots)$ nazywamy **zerowym**, a wielomian $1 = (1, 0, 0, \dots)$ **jedynkowym**.
Jeśli f nie jest wielomianem zerowym i $f_n \neq 0$, lecz $f_m = 0$ dla $m > n$, to n nazywamy **stopniem wielomianu** f i oznaczamy $\mathrm{st}(f)$. Wtedy też współczynnik f_n nazywamy **najwyższym współczynnikiem** wielomianu f. Dodatkowo przyjmujemy $\mathrm{st}(0) = -\infty$.

Definicje

Wielomianem (jednej zmiennej) o współczynnikach z pierścienia P nazywamy każdy nieskończony ciąg

$$f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$$

elementów pierścienia P taki, że od pewnego wskaźnika $n \in N \cup \{0\}$ wyrazy f_m tego ciągu są równe 0, tzn. $f_m = 0$ dla $m \geqslant n$.
Wyrazy $f_0, f_1, f_2, \ldots$ tego ciągu nazywamy **współczynnikami** wielomianu f.
Wielomian $0 = (0, 0, 0, \ldots)$ nazywamy **zerowym**, a wielomian $1 = (1, 0, 0, \ldots)$ **jedynkowym**.
Jeśli f nie jest wielomianem zerowym i $f_n \neq 0$, lecz $f_m = 0$ dla $m > n$, to n nazywamy **stopniem wielomianu** f i oznaczamy $\mathrm{st}(f)$. Wtedy też współczynnik f_n nazywamy **najwyższym współczynnikiem** wielomianu f. Dodatkowo przyjmujemy $\mathrm{st}(0) = -\infty$.

W zbiorze $P[X]$ wszystkich wielomianów o współczynnikach z pierścienia P określamy działania dodawania i mnożenia.

Definicje

Wielomianem (jednej zmiennej) o współczynnikach z pierścienia P nazywamy każdy nieskończony ciąg

$$f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$$

elementów pierścienia P taki, że od pewnego wskaźnika $n \in N \cup \{0\}$ wyrazy f_m tego ciągu są równe 0, tzn. $f_m = 0$ dla $m \geqslant n$.
Wyrazy $f_0, f_1, f_2, \ldots$ tego ciągu nazywamy **współczynnikami** wielomianu f.
Wielomian $0 = (0, 0, 0, \ldots)$ nazywamy **zerowym**, a wielomian $1 = (1, 0, 0, \ldots)$ **jedynkowym**.
Jeśli f nie jest wielomianem zerowym i $f_n \neq 0$, lecz $f_m = 0$ dla $m > n$, to n nazywamy **stopniem wielomianu** f i oznaczamy $\mathrm{st}(f)$. Wtedy też współczynnik f_n nazywamy **najwyższym współczynnikiem** wielomianu f. Dodatkowo przyjmujemy $\mathrm{st}(0) = -\infty$.

W zbiorze $P[X]$ wszystkich wielomianów o współczynnikach z pierścienia P określamy działania dodawania i mnożenia. Jeśli $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$, to

$$f + g = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots),$$

Definicje

Wielomianem (jednej zmiennej) o współczynnikach z pierścienia P nazywamy każdy nieskończony ciąg

$$f = (f_0, f_1, f_2, ...)$$

elementów pierścienia P taki, że od pewnego wskaźnika $n \in N \cup \{0\}$ wyrazy f_m tego ciągu są równe 0, tzn. $f_m = 0$ dla $m \geqslant n$.
Wyrazy $f_0, f_1, f_2, ...$ tego ciągu nazywamy **współczynnikami** wielomianu f.
Wielomian $0 = (0, 0, 0, ...)$ nazywamy **zerowym**, a wielomian $1 = (1, 0, 0, ...)$ **jedynkowym**.
Jeśli f nie jest wielomianem zerowym i $f_n \neq 0$, lecz $f_m = 0$ dla $m > n$, to n nazywamy **stopniem wielomianu** f i oznaczamy $\mathrm{st}(f)$. Wtedy też współczynnik f_n nazywamy **najwyższym współczynnikiem** wielomianu f. Dodatkowo przyjmujemy $\mathrm{st}(0) = -\infty$.

W zbiorze $P[X]$ wszystkich wielomianów o współczynnikach z pierścienia P określamy działania dodawania i mnożenia. Jeśli $f = (f_0, f_1, f_2, ...)$, $g = (g_0, g_1, g_2, ...)$, to

$$f + g = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, ...),$$

$$f \cdot g = (q_0, q_1, q_2, ...), \text{ gdzie } q_n = \sum_{j=0}^{n} f_{n-j}\, g_j \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Definicje

Wielomianem (jednej zmiennej) o współczynnikach z pierścienia P nazywamy każdy nieskończony ciąg

$$f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$$

elementów pierścienia P taki, że od pewnego wskaźnika $n \in N \cup \{0\}$ wyrazy f_m tego ciągu są równe 0, tzn. $f_m = 0$ dla $m \geqslant n$.
Wyrazy $f_0, f_1, f_2, \ldots$ tego ciągu nazywamy **współczynnikami** wielomianu f.
Wielomian $0 = (0, 0, 0, \ldots)$ nazywamy **zerowym**, a wielomian $1 = (1, 0, 0, \ldots)$ **jedynkowym**.
Jeśli f nie jest wielomianem zerowym i $f_n \neq 0$, lecz $f_m = 0$ dla $m > n$, to n nazywamy **stopniem wielomianu** f i oznaczamy $\mathrm{st}(f)$. Wtedy też współczynnik f_n nazywamy **najwyższym współczynnikiem** wielomianu f. Dodatkowo przyjmujemy $\mathrm{st}(0) = -\infty$.

W zbiorze $P[X]$ wszystkich wielomianów o współczynnikach z pierścienia P określamy działania dodawania i mnożenia. Jeśli $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$, to

$$f + g = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots),$$

$$f \cdot g = (q_0, q_1, q_2, \ldots), \text{ gdzie } q_n = \sum_{j=0}^{n} f_{n-j}\, g_j \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Definicje

Wielomianem (jednej zmiennej) o współczynnikach z pierścienia P nazywamy każdy nieskończony ciąg

$$f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$$

elementów pierścienia P taki, że od pewnego wskaźnika $n \in N \cup \{0\}$ wyrazy f_m tego ciągu są równe 0, tzn. $f_m = 0$ dla $m \geqslant n$.
Wyrazy $f_0, f_1, f_2, \ldots$ tego ciągu nazywamy **współczynnikami** wielomianu f.
Wielomian $0 = (0, 0, 0, \ldots)$ nazywamy **zerowym**, a wielomian $1 = (1, 0, 0, \ldots)$ **jedynkowym**.
Jeśli f nie jest wielomianem zerowym i $f_n \neq 0$, lecz $f_m = 0$ dla $m > n$, to n nazywamy **stopniem wielomianu** f i oznaczamy $\mathrm{st}(f)$. Wtedy też współczynnik f_n nazywamy **najwyższym współczynnikiem** wielomianu f. Dodatkowo przyjmujemy $\mathrm{st}(0) = -\infty$.

W zbiorze $P[X]$ wszystkich wielomianów o współczynnikach z pierścienia P określamy działania dodawania i mnożenia. Jeśli $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$, to

$$f + g = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots),$$

$$f \cdot g = (q_0, q_1, q_2, \ldots), \text{ gdzie } q_n = \sum_{j=0}^{n} f_{n-j}\, g_j \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Działania są poprawnie określone (*wyjaśnienie na tablicy*).

Twierdzenie

Zbiór $P[X]$ z wyróżnionymi wielomianami 0 i 1 oraz działaniami dodawania i mnożenia wielomianów jest pierścieniem.

Dowód. Niech $f = (f_0, f_1, f_2, ...)$, $g = (g_0, g_1, g_2, ...)$, $h = (h_0, h_1, h_2, ...)$.
Działanie dodawania jest łączne, bo

$$(f + g) + h =$$

Twierdzenie

Zbiór $P[X]$ z wyróżnionymi wielomianami 0 i 1 oraz działaniami dodawania i mnożenia wielomianów jest pierścieniem.

Dowód. Niech $f = (f_0, f_1, f_2, ...)$, $g = (g_0, g_1, g_2, ...)$, $h = (h_0, h_1, h_2, ...)$.
Działanie dodawania jest łączne, bo

$$(f + g) + h = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, ...) + (h_0, h_1, h_2, ...) =$$

Twierdzenie

Zbiór $P[X]$ z wyróżnionymi wielomianami 0 i 1 oraz działaniami dodawania i mnożenia wielomianów jest pierścieniem.

Dowód. Niech $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$, $h = (h_0, h_1, h_2, \ldots)$.
Działanie dodawania jest łączne, bo

$$(f+g)+h = (f_0+g_0, f_1+g_1, f_2+g_2, \ldots) + (h_0, h_1, h_2, \ldots) =$$

$$= ((f_0+g_0)+h_0, (f_1+g_1)+h_1, (f_2+g_2)+h_2, \ldots) =$$

Twierdzenie

Zbiór $P[X]$ z wyróżnionymi wielomianami 0 i 1 oraz działaniami dodawania i mnożenia wielomianów jest pierścieniem.

Dowód. Niech $f = (f_0, f_1, f_2, ...)$, $g = (g_0, g_1, g_2, ...)$, $h = (h_0, h_1, h_2, ...)$.
Działanie dodawania jest łączne, bo

$$(f+g)+h = (f_0+g_0, f_1+g_1, f_2+g_2, ...) + (h_0, h_1, h_2, ...) =$$

$$= ((f_0+g_0)+h_0, (f_1+g_1)+h_1, (f_2+g_2)+h_2, ...) =$$

$$= (f_0+(g_0+h_0), f_1+(g_1+h_1), f_2+(g_2+h_2), ...) =$$

Twierdzenie

Zbiór $P[X]$ z wyróżnionymi wielomianami 0 i 1 oraz działaniami dodawania i mnożenia wielomianów jest pierścieniem.

Dowód. Niech $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \dots)$, $h = (h_0, h_1, h_2, \dots)$.
Działanie dodawania jest łączne, bo

$$(f + g) + h = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots) + (h_0, h_1, h_2, \dots) =$$

$$= ((f_0 + g_0) + h_0, (f_1 + g_1) + h_1, (f_2 + g_2) + h_2, \dots) =$$

$$= (f_0 + (g_0 + h_0), f_1 + (g_1 + h_1), f_2 + (g_2 + h_2), \dots) =$$

$$= (f_0, f_1, f_2, \dots) + (g_0 + h_0, g_1 + h_1, g_2 + h_2, \dots) =$$

Twierdzenie

Zbiór $P[X]$ z wyróżnionymi wielomianami 0 i 1 oraz działaniami dodawania i mnożenia wielomianów jest pierścieniem.

Dowód. Niech $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$, $h = (h_0, h_1, h_2, \ldots)$.
Działanie dodawania jest łączne, bo

$$(f+g)+h = (f_0+g_0, f_1+g_1, f_2+g_2, \ldots) + (h_0, h_1, h_2, \ldots) =$$

$$= ((f_0+g_0)+h_0, (f_1+g_1)+h_1, (f_2+g_2)+h_2, \ldots) =$$

$$= (f_0+(g_0+h_0), f_1+(g_1+h_1), f_2+(g_2+h_2), \ldots) =$$

$$= (f_0, f_1, f_2, \ldots) + (g_0+h_0, g_1+h_1, g_2+h_2, \ldots) = f+(g+h).$$

Twierdzenie

Zbiór $P[X]$ z wyróżnionymi wielomianami 0 i 1 oraz działaniami dodawania i mnożenia wielomianów jest pierścieniem.

Dowód. Niech $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$, $h = (h_0, h_1, h_2, \ldots)$.
Działanie dodawania jest łączne, bo

$$(f+g)+h = (f_0+g_0, f_1+g_1, f_2+g_2, \ldots) + (h_0, h_1, h_2, \ldots) =$$

$$= ((f_0+g_0)+h_0, (f_1+g_1)+h_1, (f_2+g_2)+h_2, \ldots) =$$

$$= (f_0+(g_0+h_0), f_1+(g_1+h_1), f_2+(g_2+h_2), \ldots) =$$

$$= (f_0, f_1, f_2, \ldots) + (g_0+h_0, g_1+h_1, g_2+h_2, \ldots) = f+(g+h).$$

Wielomian $0 = (0, 0, 0, \ldots)$ jest elementem neutralnym dodawania.

Twierdzenie

Zbiór $P[X]$ z wyróżnionymi wielomianami 0 i 1 oraz działaniami dodawania i mnożenia wielomianów jest pierścieniem.

Dowód. Niech $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \dots)$, $h = (h_0, h_1, h_2, \dots)$.
Działanie dodawania jest łączne, bo

$$(f+g)+h = (f_0+g_0, f_1+g_1, f_2+g_2, \dots) + (h_0, h_1, h_2, \dots) =$$

$$= ((f_0+g_0)+h_0, (f_1+g_1)+h_1, (f_2+g_2)+h_2, \dots) =$$

$$= (f_0+(g_0+h_0), f_1+(g_1+h_1), f_2+(g_2+h_2), \dots) =$$

$$= (f_0, f_1, f_2, \dots) + (g_0+h_0, g_1+h_1, g_2+h_2, \dots) = f+(g+h).$$

Wielomian $0 = (0, 0, 0, \dots)$ jest elementem neutralnym dodawania.

Wielomian $-f = (-f_0, -f_1, -f_2, \dots)$ jest elementem przeciwnym do $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$.

Twierdzenie

Zbiór $P[X]$ z wyróżnionymi wielomianami 0 i 1 oraz działaniami dodawania i mnożenia wielomianów jest pierścieniem.

Dowód. Niech $f = (f_0, f_1, f_2, ...)$, $g = (g_0, g_1, g_2, ...)$, $h = (h_0, h_1, h_2, ...)$.
Działanie dodawania jest łączne, bo

$$(f+g)+h = (f_0+g_0, f_1+g_1, f_2+g_2, ...) + (h_0, h_1, h_2, ...) =$$

$$= ((f_0+g_0)+h_0, (f_1+g_1)+h_1, (f_2+g_2)+h_2, ...) =$$

$$= (f_0+(g_0+h_0), f_1+(g_1+h_1), f_2+(g_2+h_2), ...) =$$

$$= (f_0, f_1, f_2, ...) + (g_0+h_0, g_1+h_1, g_2+h_2, ...) = f+(g+h).$$

Wielomian $0 = (0, 0, 0, ...)$ jest elementem neutralnym dodawania.

Wielomian $-f = (-f_0, -f_1, -f_2, ...)$ jest elementem przeciwnym do $f = (f_0, f_1, f_2, ...)$.

Wprost z definicji widać, że dodawanie jest przemienne.

Teraz zajmijmy się własnościami mnożenia. Zauważmy, że jeśli $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \dots)$, i

$$f \cdot g = (q_0, q_1, q_2, \dots), \text{ to } q_n = \sum_{j=0}^{n} f_{n-j}\, g_j = \sum_{i+j=n} f_i\, g_j \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Stąd od razu widać, że mnożenie jest przemienne.

Teraz zajmijmy się własnościami mnożenia. Zauważmy, że jeśli $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \dots)$, i

$$f \cdot g = (q_0, q_1, q_2, \dots), \text{ to } q_n = \sum_{j=0}^{n} f_{n-j}\, g_j = \sum_{i+j=n} f_i\, g_j \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Stąd od razu widać, że mnożenie jest przemienne.

Niech $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \dots)$, $h = (h_0, h_1, h_2, \dots)$.

Teraz zajmijmy się własnościami mnożenia. Zauważmy, że jeśli $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$, i

$$f \cdot g = (q_0, q_1, q_2, \ldots), \text{ to } q_n = \sum_{j=0}^{n} f_{n-j}\, g_j = \sum_{i+j=n} f_i\, g_j \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Stąd od razu widać, że mnożenie jest przemienne.

Niech $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$, $h = (h_0, h_1, h_2, \ldots)$. Wtedy

$$(fg)h = (q_0, q_1, q_2, \ldots) \cdot h = (r_0, r_1, r_2, \ldots),$$

Teraz zajmijmy się własnościami mnożenia. Zauważmy, że jeśli $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \dots)$, i

$$f \cdot g = (q_0, q_1, q_2, \dots), \text{ to } q_n = \sum_{j=0}^{n} f_{n-j}\, g_j = \sum_{i+j=n} f_i\, g_j \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Stąd od razu widać, że mnożenie jest przemienne.

Niech $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \dots)$, $h = (h_0, h_1, h_2, \dots)$. Wtedy

$$(fg)h = (q_0, q_1, q_2, \dots) \cdot h = (r_0, r_1, r_2, \dots),$$

gdzie

$$r_n = \sum_{i+j=n} q_i h_j = \sum_{i+j=n} \left(\sum_{k+l=i} f_k\, g_l \right) h_j = \sum_{k+l+j=n} (f_k g_l) h_j.$$

Teraz zajmijmy się własnościami mnożenia. Zauważmy, że jeśli $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \dots)$, i

$$f \cdot g = (q_0, q_1, q_2, \dots), \text{ to } q_n = \sum_{j=0}^{n} f_{n-j}\, g_j = \sum_{i+j=n} f_i\, g_j \ \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Stąd od razu widać, że mnożenie jest przemienne.

Niech $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \dots)$, $h = (h_0, h_1, h_2, \dots)$. Wtedy

$$(fg)h = (q_0, q_1, q_2, \dots) \cdot h = (r_0, r_1, r_2, \dots),$$

gdzie

$$r_n = \sum_{i+j=n} q_i h_j = \sum_{i+j=n} \left(\sum_{k+l=i} f_k\, g_l \right) h_j = \sum_{k+l+j=n} (f_k g_l) h_j.$$

Postępując podobnie przekonujemy się, że

$$f(gh) = (s_0, s_1, s_2, \dots), \text{ gdzie } s_n = \sum_{k+l+j=n} f_k (g_l h_j).$$

Teraz zajmijmy się własnościami mnożenia. Zauważmy, że jeśli $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$, i

$$f \cdot g = (q_0, q_1, q_2, \ldots), \text{ to } q_n = \sum_{j=0}^{n} f_{n-j}\, g_j = \sum_{i+j=n} f_i\, g_j \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Stąd od razu widać, że mnożenie jest przemienne.

Niech $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$, $h = (h_0, h_1, h_2, \ldots)$. Wtedy

$$(fg)h = (q_0, q_1, q_2, \ldots) \cdot h = (r_0, r_1, r_2, \ldots),$$

gdzie

$$r_n = \sum_{i+j=n} q_i h_j = \sum_{i+j=n} \left(\sum_{k+l=i} f_k\, g_l \right) h_j = \sum_{k+l+j=n} (f_k g_l) h_j.$$

Postępując podobnie przekonujemy się, że

$$f(gh) = (s_0, s_1, s_2, \ldots), \text{ gdzie } s_n = \sum_{k+l+j=n} f_k (g_l h_j).$$

Ponieważ mnożenie w P jest łączne, więc

$$(fg)h = f(gh).$$

Teraz zajmijmy się własnościami mnożenia. Zauważmy, że jeśli $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \dots)$, i

$$f \cdot g = (q_0, q_1, q_2, \dots), \text{ to } q_n = \sum_{j=0}^{n} f_{n-j}\, g_j = \sum_{i+j=n} f_i\, g_j \ \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Stąd od razu widać, że mnożenie jest przemienne.

Niech $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \dots)$, $h = (h_0, h_1, h_2, \dots)$. Wtedy

$$(fg)h = (q_0, q_1, q_2, \dots) \cdot h = (r_0, r_1, r_2, \dots),$$

gdzie

$$r_n = \sum_{i+j=n} q_i h_j = \sum_{i+j=n} \left(\sum_{k+l=i} f_k\, g_l \right) h_j = \sum_{k+l+j=n} (f_k g_l) h_j.$$

Postępując podobnie przekonujemy się, że

$$f(gh) = (s_0, s_1, s_2, \dots), \text{ gdzie } s_n = \sum_{k+l+j=n} f_k (g_l h_j).$$

Ponieważ mnożenie w P jest łączne, więc

$$(fg)h = f(gh).$$

Sprawdziliśmy łączność mnożenia w $P[X]$.

Teraz zajmijmy się własnościami mnożenia. Zauważmy, że jeśli $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$, i

$$f \cdot g = (q_0, q_1, q_2, \ldots), \text{ to } q_n = \sum_{j=0}^{n} f_{n-j}\, g_j = \sum_{i+j=n} f_i\, g_j \text{ dla } n \geqslant 0.$$

Stąd od razu widać, że mnożenie jest przemienne.

Niech $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots)$, $g = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$, $h = (h_0, h_1, h_2, \ldots)$. Wtedy

$$(fg)h = (q_0, q_1, q_2, \ldots) \cdot h = (r_0, r_1, r_2, \ldots),$$

gdzie

$$r_n = \sum_{i+j=n} q_i h_j = \sum_{i+j=n} \left(\sum_{k+l=i} f_k\, g_l \right) h_j = \sum_{k+l+j=n} (f_k g_l) h_j.$$

Postępując podobnie przekonujemy się, że

$$f(gh) = (s_0, s_1, s_2, \ldots), \text{ gdzie } s_n = \sum_{k+l+j=n} f_k (g_l h_j).$$

Ponieważ mnożenie w P jest łączne, więc

$$(fg)h = f(gh).$$

Sprawdziliśmy łączność mnożenia w $P[X]$. Pozostałe dwa aksjomaty sprawdzimy na tablicy.

Własności stopnia wielomianu

$$\mathrm{st}(f+g) \leqslant \max(\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g)), \quad \mathrm{st}(fg) \leqslant \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g).$$

$$\operatorname{st}(f+g) \leqslant \max(\operatorname{st}(f), \operatorname{st}(g)), \quad \operatorname{st}(fg) \leqslant \operatorname{st}(f) + \operatorname{st}(g).$$

Na tablicy przykłady pokazujące, że powyżej równości nie muszą zachodzić.

Własności stopnia wielomianu

$$\mathrm{st}(f+g) \leqslant \max(\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g)), \quad \mathrm{st}(fg) \leqslant \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g).$$

Stwierdzenie

Jeżeli wielomiany $f, g \in P[X]$ są niezerowe oraz najwyższy współczynnik wielomianu f lub wielomianu g jest elementem regularnym pierścienia P, to

$$\mathrm{st}(fg) = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g).$$

Własności stopnia wielomianu

$$\mathrm{st}(f+g) \leqslant \max(\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g)), \quad \mathrm{st}(fg) \leqslant \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g).$$

Stwierdzenie

Jeżeli wielomiany $f, g \in P[X]$ są niezerowe oraz najwyższy współczynnik wielomianu f lub wielomianu g jest elementem regularnym pierścienia P, to

$$\mathrm{st}(fg) = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g).$$

Dowód. Niech $\mathrm{st}(f) = m$, $\mathrm{st}(g) = n$ oraz niech
$f = (f_0, f_1, f_2, ..., f_m, 0, ...)$, $g = (g_0, g_1, g_2, ..., g_n, 0, ...)$.

$$\mathrm{st}(f+g) \leqslant \max(\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g)), \quad \mathrm{st}(fg) \leqslant \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g).$$

Stwierdzenie

Jeżeli wielomiany $f, g \in P[X]$ są niezerowe oraz najwyższy współczynnik wielomianu f lub wielomianu g jest elementem regularnym pierścienia P, to

$$\mathrm{st}(fg) = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g).$$

Dowód. Niech $\mathrm{st}(f) = m$, $\mathrm{st}(g) = n$ oraz niech
$f = (f_0, f_1, f_2, ..., f_m, 0, ...)$, $g = (g_0, g_1, g_2, ..., g_n, 0, ...)$. Wtedy $f_m \neq 0$ oraz $g_n \neq 0$ oraz

$$fg = (f_0 g_0, f_0 g_1 + f_1 g_0, f_2 g_0 + f_1 g_1 + f_0 g_2, ..., f_m g_n, 0, 0, ...).$$

$$\mathrm{st}(f+g) \leqslant \max(\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g)), \quad \mathrm{st}(fg) \leqslant \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g).$$

Stwierdzenie

Jeżeli wielomiany $f, g \in P[X]$ są niezerowe oraz najwyższy współczynnik wielomianu f lub wielomianu g jest elementem regularnym pierścienia P, to

$$\mathrm{st}(fg) = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g).$$

Dowód. Niech $\mathrm{st}(f) = m$, $\mathrm{st}(g) = n$ oraz niech $f = (f_0, f_1, f_2, ..., f_m, 0, ...)$, $g = (g_0, g_1, g_2, ..., g_n, 0, ...)$. Wtedy $f_m \neq 0$ oraz $g_n \neq 0$ oraz

$$fg = (f_0 g_0, f_0 g_1 + f_1 g_0, f_2 g_0 + f_1 g_1 + f_0 g_2, ..., f_m g_n, 0, 0, ...).$$

Ponieważ f_m lub g_n jest elementem regularnym, więc $f_m g_n \neq 0$, co oznacza, że

$$\mathrm{st}(fg) = m + n = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g). \quad ¶$$

Własności stopnia wielomianu

$$\mathrm{st}(f+g) \leqslant \max(\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g)), \quad \mathrm{st}(fg) \leqslant \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g).$$

Stwierdzenie

Jeżeli wielomiany $f, g \in P[X]$ są niezerowe oraz najwyższy współczynnik wielomianu f lub wielomianu g jest elementem regularnym pierścienia P, to

$$\mathrm{st}(fg) = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g).$$

Dowód. Niech $\mathrm{st}(f) = m$, $\mathrm{st}(g) = n$ oraz niech
$f = (f_0, f_1, f_2, ..., f_m, 0, ...)$, $g = (g_0, g_1, g_2, ..., g_n, 0, ...)$. Wtedy $f_m \neq 0$ oraz $g_n \neq 0$ oraz

$$fg = (f_0g_0, f_0g_1 + f_1g_0, f_2g_0 + f_1g_1 + f_0g_2, ..., f_mg_n, 0, 0, ...).$$

Ponieważ f_m lub g_n jest elementem regularnym, więc $f_mg_n \neq 0$, co oznacza, że

$$\mathrm{st}(fg) = m + n = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g). \quad \P$$

Wniosek

Jeżeli P jest pierścieniem całkowitym, to dla dowolnych niezerowych wielomianów $f, g \in P[X]$ mamy

$$\mathrm{st}(fg) = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g).$$

Stwierdzenie

Jeżeli najwyższy współczynnik wielomianu $f \in P[X]$ jest regularnym elementem pierścienia P, to f jest regularnym elementem pierścienia $P[X]$.

Stwierdzenie

Jeżeli najwyższy współczynnik wielomianu $f \in P[X]$ jest regularnym elementem pierścienia P, to f jest regularnym elementem pierścienia $P[X]$.
Jeśli P jest pierścieniem całkowitym, to $P[X]$ też jest pierścieniem całkowitym.

Stwierdzenie

Jeżeli najwyższy współczynnik wielomianu $f \in P[X]$ jest regularnym elementem pierścienia P, to f jest regularnym elementem pierścienia $P[X]$.
Jeśli P jest pierścieniem całkowitym, to $P[X]$ też jest pierścieniem całkowitym.

Dowód. Niech $\mathrm{st}(f) = n \geqslant 0$ oraz niech f_n będzie elementem regularnym pierścienia P.

Stwierdzenie

Jeżeli najwyższy współczynnik wielomianu $f \in P[X]$ jest regularnym elementem pierścienia P, to f jest regularnym elementem pierścienia $P[X]$.
Jeśli P jest pierścieniem całkowitym, to $P[X]$ też jest pierścieniem całkowitym.

Dowód. Niech $\mathrm{st}(f) = n \geqslant 0$ oraz niech f_n będzie elementem regularnym pierścienia P. Przypuśćmy, że $fg = 0$ dla pewnego $0 \neq g \in P[X]$.

Stwierdzenie

Jeżeli najwyższy współczynnik wielomianu $f \in P[X]$ jest regularnym elementem pierścienia P, to f jest regularnym elementem pierścienia $P[X]$.
Jeśli P jest pierścieniem całkowitym, to $P[X]$ też jest pierścieniem całkowitym.

Dowód. Niech $\mathrm{st}(f) = n \geqslant 0$ oraz niech f_n będzie elementem regularnym pierścienia P. Przypuśćmy, że $fg = 0$ dla pewnego $0 \neq g \in P[X]$. Wtedy $\mathrm{st}(fg) = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g) \geqslant 0$.

Stwierdzenie

Jeżeli najwyższy współczynnik wielomianu $f \in P[X]$ jest regularnym elementem pierścienia P, to f jest regularnym elementem pierścienia $P[X]$.
Jeśli P jest pierścieniem całkowitym, to $P[X]$ też jest pierścieniem całkowitym.

Dowód. Niech $\mathrm{st}(f) = n \geqslant 0$ oraz niech f_n będzie elementem regularnym pierścienia P. Przypuśćmy, że $fg = 0$ dla pewnego $0 \neq g \in P[X]$. Wtedy $\mathrm{st}(fg) = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g) \geqslant 0$. Otrzymaliśmy sprzeczność, bo $\mathrm{st}(0) = -\infty$.

Stwierdzenie

Jeżeli najwyższy współczynnik wielomianu $f \in P[X]$ jest regularnym elementem pierścienia P, to f jest regularnym elementem pierścienia $P[X]$.
Jeśli P jest pierścieniem całkowitym, to $P[X]$ też jest pierścieniem całkowitym.

Dowód. Niech $\mathrm{st}(f) = n \geqslant 0$ oraz niech f_n będzie elementem regularnym pierścienia P.
Przypuśćmy, że $fg = 0$ dla pewnego $0 \neq g \in P[X]$. Wtedy $\mathrm{st}(fg) = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g) \geqslant 0$.
Otrzymaliśmy sprzeczność, bo $\mathrm{st}(0) = -\infty$.
Druga część tezy wynika z pierwszej części. ¶

Wniosek

Jeśli dla wielomianów $f, g, h \in P[X]$ prawdziwa jest równość $fg = fh$ oraz najwyższy współczynnik wielomianu f jest regularny, to $g = h$.

Wielomiany stopnia 0 oraz wielomian zerowy nazywamy **wielomianami stałymi**.

Wielomiany stopnia 0 oraz wielomian zerowy nazywamy **wielomianami stałymi**.
Działania dodawania, odejmowania i mnożenia na zbiorze wielomianów stałych przyjmują następującą postać:

$$(f_0, 0, 0, \ldots) \pm (g_0, 0, 0, \ldots) = (f_0 \pm g_0, 0, 0, \ldots),$$

$$(f_0, 0, 0, \ldots) \cdot (g_0, 0, 0, \ldots) = (f_0 g_0, 0, 0, \ldots).$$

Wielomian $1 = (1, 0, 0, \ldots)$ jest również wielomianem stałym.

Wielomiany stopnia 0 oraz wielomian zerowy nazywamy **wielomianami stałymi**.
Działania dodawania, odejmowania i mnożenia na zbiorze wielomianów stałych przyjmują następującą postać:

$$(f_0, 0, 0, ...) \pm (g_0, 0, 0, ...) = (f_0 \pm g_0, 0, 0, ...),$$

$$(f_0, 0, 0, ...) \cdot (g_0, 0, 0, ...) = (f_0 g_0, 0, 0, ...).$$

Wielomian $1 = (1, 0, 0, ...)$ jest również wielomianem stałym.
Stąd następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Podzbiór P' pierścienia $P[X]$ złożony z wielomianów stałych jest podpierścieniem pierścienia $P[X]$. Odwzorowanie $\psi : P \longrightarrow P'$, $\psi(a) = (a, 0, 0, ...)$, jest izomorfizmem pierścieni.

Wielomiany stopnia 0 oraz wielomian zerowy nazywamy **wielomianami stałymi**.
Działania dodawania, odejmowania i mnożenia na zbiorze wielomianów stałych przyjmują następującą postać:

$$(f_0, 0, 0, \dots) \pm (g_0, 0, 0, \dots) = (f_0 \pm g_0, 0, 0, \dots),$$

$$(f_0, 0, 0, \dots) \cdot (g_0, 0, 0, \dots) = (f_0 g_0, 0, 0, \dots).$$

Wielomian $1 = (1, 0, 0, \dots)$ jest również wielomianem stałym.
Stąd następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Podzbiór P' pierścienia $P[X]$ złożony z wielomianów stałych jest podpierścieniem pierścienia $P[X]$. Odwzorowanie $\psi : P \longrightarrow P'$, $\psi(a) = (a, 0, 0, \dots)$, jest izomorfizmem pierścieni.

Ostatnie twierdzenie pozwala zamiast wielomianu stałego $(a, 0, 0, \ldots)$ pisać po prostu a. Wtedy

$$af = a(f_0, f_1, f_2, \ldots) = (a, 0, 0, \ldots)(f_0, f_1, f_2, \ldots) = (af_0, af_1, af_2, \ldots).$$

Ostatnie twierdzenie pozwala zamiast wielomianu stałego $(a, 0, 0, \ldots)$ pisać po prostu a. Wtedy

$$af = a(f_0, f_1, f_2, \ldots) = (a, 0, 0, \ldots)(f_0, f_1, f_2, \ldots) = (af_0, af_1, af_2, \ldots).$$

Przyjmijmy oznaczenie: $X = (0, 1, 0, \ldots)$ i zauważmy, że

$$X^2 = (0, 0, 1, 0, \ldots), \quad X^3 = (0, 0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots$$

Ostatnie twierdzenie pozwala zamiast wielomianu stałego $(a, 0, 0, ...)$ pisać po prostu a. Wtedy

$$af = a(f_0, f_1, f_2, ...) = (a, 0, 0, ...)(f_0, f_1, f_2, ...) = (af_0, af_1, af_2, ...).$$

Przyjmijmy oznaczenie: $X = (0, 1, 0, ...)$ i zauważmy, że

$$X^2 = (0, 0, 1, 0, ...), \quad X^3 = (0, 0, 0, 1, 0, ...), ...$$

Przy tak przyjętych umowach mamy

$$(f_0, f_1, ..., f_n, 0, ...) = (f_0, 0, 0, ...) + (0, f_1, 0, ...) + ... + (0, 0, 0, ..., f_n, 0, ...) =$$

$$= f_0 \cdot (1, 0, 0, ...) + f_1(0, 1, 0, ...) + ... + f_n(0, 0, 0, ..., 1, 0, ...) = f_0 + f_1 X + ... + f_n X^n.$$

Ostatnie twierdzenie pozwala zamiast wielomianu stałego $(a, 0, 0, \dots)$ pisać po prostu a. Wtedy

$$af = a(f_0, f_1, f_2, \dots) = (a, 0, 0, \dots)(f_0, f_1, f_2, \dots) = (af_0, af_1, af_2, \dots).$$

Przyjmijmy oznaczenie: $X = (0, 1, 0, \dots)$ i zauważmy, że

$$X^2 = (0, 0, 1, 0, \dots), \ \ X^3 = (0, 0, 0, 1, 0, \dots), \dots$$

Przy tak przyjętych umowach mamy

$$(f_0, f_1, \dots, f_n, 0, \dots) = (f_0, 0, 0, \dots) + (0, f_1, 0, \dots) + \dots + (0, 0, 0, \dots, f_n, 0, \dots) =$$

$$= f_0 \cdot (1, 0, 0, \dots) + f_1(0, 1, 0, \dots) + \dots + f_n(0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots) = f_0 + f_1X + \dots + f_nX^n.$$

Od tego momentu wielomianem będziemy nazywać wyrażenie postaci

$$f = f_0 + f_1X + \dots + f_nX^n.$$

Ostatnie twierdzenie pozwala zamiast wielomianu stałego $(a, 0, 0, ...)$ pisać po prostu a. Wtedy

$$af = a(f_0, f_1, f_2, ...) = (a, 0, 0, ...)(f_0, f_1, f_2, ...) = (af_0, af_1, af_2, ...).$$

Przyjmijmy oznaczenie: $X = (0, 1, 0, ...)$ i zauważmy, że

$$X^2 = (0, 0, 1, 0, ...), \;\; X^3 = (0, 0, 0, 1, 0, ...), ...$$

Przy tak przyjętych umowach mamy

$$(f_0, f_1, ..., f_n, 0, ...) = (f_0, 0, 0, ...) + (0, f_1, 0, ...) + ... + (0, 0, 0, ..., f_n, 0, ...) =$$

$$= f_0 \cdot (1, 0, 0, ...) + f_1(0, 1, 0, ...) + ... + f_n(0, 0, 0, ..., 1, 0, ...) = f_0 + f_1 X + ... + f_n X^n.$$

Od tego momentu wielomianem będziemy nazywać wyrażenie postaci

$$f = f_0 + f_1 X + ... + f_n X^n.$$

Takie przedstawienie wielomianu nie jest całkowicie jednoznaczne, gdyż dwa przedstawienia tego samego wielomianu mogą się różnić o składniki postaci $0 \cdot X^i$.

Przy tak przyjętej umowie dotyczącej zapisu wielomianu działania dodawania, odejmowania oraz mnożenie wielomianów przyjmują następującą postać.

Przy tak przyjętej umowie dotyczącej zapisu wielomianu działania dodawania, odejmowania oraz mnożenie wielomianów przyjmują następującą postać.

Niech $f = f_0 + f_1X + ... + f_nX^n$, $g = g_0 + g_1X + ... + g_mX^m$, $n \geqslant m$.

Przy tak przyjętej umowie dotyczącej zapisu wielomianu działania dodawania, odejmowania oraz mnożenie wielomianów przyjmują następującą postać.

Niech $f = f_0 + f_1X + ... + f_nX^n,\ g = g_0 + g_1X + ... + g_mX^m,\ n \geqslant m.$

Wtedy

$$f \pm g = (f_0 \pm g_0) + (f_1 \pm g_1)X + ... + (f_m \pm g_m)X^m + ... + f_nX^n,$$

$$fg = f_0g_0 + (f_0g_1 + f_1g_0)X + (f_0g_2 + f_1g_1 + f_2g_0)X^2 + ... + f_ng_mX^{n+m}.$$

Zatem działania te przyjmują "szkolną" postać:

Przy tak przyjętej umowie dotyczącej zapisu wielomianu działania dodawania, odejmowania oraz mnożenie wielomianów przyjmują następującą postać.

Niech $f = f_0 + f_1 X + ... + f_n X^n,\ g = g_0 + g_1 X + ... + g_m X^m,\ n \geqslant m.$

Wtedy

$$f \pm g = (f_0 \pm g_0) + (f_1 \pm g_1)X + ... + (f_m \pm g_m)X^m + ... + f_n X^n,$$

$$fg = f_0 g_0 + (f_0 g_1 + f_1 g_0)X + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0)X^2 + ... + f_n g_m X^{n+m}.$$

Zatem działania te przyjmują "szkolną" postać:

* dodajemy (odejmujemy) wielomiany dodając (odejmując) w obu wielomianach współczynniki przy tych samych potęgach elementu X.

Przy tak przyjętej umowie dotyczącej zapisu wielomianu działania dodawania, odejmowania oraz mnożenie wielomianów przyjmują następującą postać.

Niech $f = f_0 + f_1 X + ... + f_n X^n,\ g = g_0 + g_1 X + ... + g_m X^m,\ n \geqslant m.$

Wtedy

$$f \pm g = (f_0 \pm g_0) + (f_1 \pm g_1)X + ... + (f_m \pm g_m)X^m + ... + f_n X^n,$$

$$fg = f_0 g_0 + (f_0 g_1 + f_1 g_0)X + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0)X^2 + ... + f_n g_m X^{n+m}.$$

Zatem działania te przyjmują "szkolną" postać:

* dodajemy (odejmujemy) wielomiany dodając (odejmując) w obu wielomianach współczynniki przy tych samych potęgach elementu X.

* mnożymy wielomiany mnożąc każdy składnik pierwszego wielomianu przez każdy składnik drugiego i porządkujemy względem potęg elementu X.

Przy tak przyjętej umowie dotyczącej zapisu wielomianu działania dodawania, odejmowania oraz mnożenie wielomianów przyjmują następującą postać.

Niech $f = f_0 + f_1 X + ... + f_n X^n,\ g = g_0 + g_1 X + ... + g_m X^m,\ n \geqslant m.$

Wtedy

$$f \pm g = (f_0 \pm g_0) + (f_1 \pm g_1)X + ... + (f_m \pm g_m)X^m + ... + f_n X^n,$$

$$fg = f_0 g_0 + (f_0 g_1 + f_1 g_0)X + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0)X^2 + ... + f_n g_m X^{n+m}.$$

Zatem działania te przyjmują "szkolną" postać:

* dodajemy (odejmujemy) wielomiany dodając (odejmując) w obu wielomianach współczynniki przy tych samych potęgach elementu X.

* mnożymy wielomiany mnożąc każdy składnik pierwszego wielomianu przez każdy składnik drugiego i porządkujemy względem potęg elementu X.

Przykłady na tablicy.

Definicja

Niech $f, g \in P[X]$. Mówimy,że w pierścieniu $P[X]$ wykonalne jest **dzielenie z resztą** wielomianu g przez wielomian f, gdy istnieją $q, r \in P[X]$, takie że

$$g = qf + r, \quad \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(f).$$

Definicja

Niech $f, g \in P[X]$. Mówimy,że w pierścieniu $P[X]$ wykonalne jest **dzielenie z resztą** wielomianu g przez wielomian f, gdy istnieją $q, r \in P[X]$, takie że

$$g = qf + r, \;\; \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(f).$$

Wielomian q nazywamy **ilorazem**, a wielomian r **resztą**. Jeżeli reszta z dzielenia g przez f jest równa zero, to mówimy, że f **dzieli** g.

Definicja

Niech $f, g \in P[X]$. Mówimy,że w pierścieniu $P[X]$ wykonalne jest **dzielenie z resztą** wielomianu g przez wielomian f, gdy istnieją $q, r \in P[X]$, takie że

$$g = qf + r, \;\; \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(f).$$

Wielomian q nazywamy **ilorazem**, a wielomian r **resztą**. Jeżeli reszta z dzielenia g przez f jest równa zero, to mówimy, że f **dzieli** g.

Twierdzenie

Jeżeli $f, g \in P[X]$ i najwyższy współczynnik wielomianu f jest elementem odwracalnym w pierścieniu P, to w pierścieniu $P[X]$ wykonalne jest dzielenie z resztą wielomianu g przez wielomian f. Ponadto iloraz oraz reszta są wyznaczone jednoznacznie.

Dowód. Najpierw <u>wykonalność dzielenia</u>.

Definicja

Niech $f, g \in P[X]$. Mówimy,że w pierścieniu $P[X]$ wykonalne jest **dzielenie z resztą** wielomianu g przez wielomian f, gdy istnieją $q, r \in P[X]$, takie że

$$g = qf + r, \ \ \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(f).$$

Wielomian q nazywamy **ilorazem**, a wielomian r **resztą**. Jeżeli reszta z dzielenia g przez f jest równa zero, to mówimy, że f **dzieli** g.

Twierdzenie

Jeżeli $f, g \in P[X]$ i najwyższy współczynnik wielomianu f jest elementem odwracalnym w pierścieniu P, to w pierścieniu $P[X]$ wykonalne jest dzielenie z resztą wielomianu g przez wielomian f. Ponadto iloraz oraz reszta są wyznaczone jednoznacznie.

Dowód. Najpierw wykonalność dzielenia.
Przypadek I. $\mathrm{st}(f) = 0$.

$$\mathrm{st}(f) = 0 \implies f \in U(P) \implies g = (gf^{-1})f + 0.$$

Definicja

Niech $f, g \in P[X]$. Mówimy,że w pierścieniu $P[X]$ wykonalne jest **dzielenie z resztą** wielomianu g przez wielomian f, gdy istnieją $q, r \in P[X]$, takie że

$$g = qf + r, \;\; \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(f).$$

Wielomian q nazywamy **ilorazem**, a wielomian r **resztą**. Jeżeli reszta z dzielenia g przez f jest równa zero, to mówimy, że f **dzieli** g.

Twierdzenie

Jeżeli $f, g \in P[X]$ i najwyższy współczynnik wielomianu f jest elementem odwracalnym w pierścieniu P, to w pierścieniu $P[X]$ wykonalne jest dzielenie z resztą wielomianu g przez wielomian f. Ponadto iloraz oraz reszta są wyznaczone jednoznacznie.

Dowód. Najpierw wykonalność dzielenia.
Przypadek I. $\mathrm{st}(f) = 0$.

$$\mathrm{st}(f) = 0 \implies f \in U(P) \implies g = (gf^{-1})f + 0.$$

Przypadek II. $n = \mathrm{st}(f) > 0$.

Definicja

Niech $f, g \in P[X]$. Mówimy,że w pierścieniu $P[X]$ wykonalne jest **dzielenie z resztą** wielomianu g przez wielomian f, gdy istnieją $q, r \in P[X]$, takie że

$$g = qf + r, \ \ \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(f).$$

Wielomian q nazywamy **ilorazem**, a wielomian r **resztą**. Jeżeli reszta z dzielenia g przez f jest równa zero, to mówimy, że f **dzieli** g.

Twierdzenie

Jeżeli $f, g \in P[X]$ i najwyższy współczynnik wielomianu f jest elementem odwracalnym w pierścieniu P, to w pierścieniu $P[X]$ wykonalne jest dzielenie z resztą wielomianu g przez wielomian f. Ponadto iloraz oraz reszta są wyznaczone jednoznacznie.

Dowód. Najpierw wykonalność dzielenia.
Przypadek I. $\mathrm{st}(f) = 0$.

$$\mathrm{st}(f) = 0 \implies f \in U(P) \implies g = (gf^{-1})f + 0.$$

Przypadek II. $n = \mathrm{st}(f) > 0$.
Indukcja względem $m = \mathrm{st}(g)$.

Definicja

Niech $f, g \in P[X]$. Mówimy,że w pierścieniu $P[X]$ wykonalne jest **dzielenie z resztą** wielomianu g przez wielomian f, gdy istnieją $q, r \in P[X]$, takie że

$$g = qf + r, \;\; \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(f).$$

Wielomian q nazywamy **ilorazem**, a wielomian r **resztą**. Jeżeli reszta z dzielenia g przez f jest równa zero, to mówimy, że f **dzieli** g.

Twierdzenie

Jeżeli $f, g \in P[X]$ i najwyższy współczynnik wielomianu f jest elementem odwracalnym w pierścieniu P, to w pierścieniu $P[X]$ wykonalne jest dzielenie z resztą wielomianu g przez wielomian f. Ponadto iloraz oraz reszta są wyznaczone jednoznacznie.

Dowód. Najpierw wykonalność dzielenia.
Przypadek I. $\mathrm{st}(f) = 0$.

$$\mathrm{st}(f) = 0 \implies f \in U(P) \implies g = (gf^{-1})f + 0.$$

Przypadek II. $n = \mathrm{st}(f) > 0$.
Indukcja względem $m = \mathrm{st}(g)$.

$$m < n \implies g = 0 \cdot f + g.$$

Założenie indukcyjne:

$m \geqslant n$ i dzielenie przez f jest wykonalne dla wielomianów stopnia $< m$.

Założenie indukcyjne:

$m \geqslant n$ i dzielenie przez f jest wykonalne dla wielomianów stopnia $< m$.

Niech g_m będzie najwyższym współczynnikiem wielomianu g, a f_n najwyższym współczynnikiem wielomianu f.

Założenie indukcyjne:

$m \geqslant n$ i dzielenie przez f jest wykonalne dla wielomianów stopnia $< m$.

Niech g_m będzie najwyższym współczynnikiem wielomianu g, a f_n najwyższym współczynnikiem wielomianu f.
Wtedy wielomian

$$g' = g - g_m f_n^{-1} X^{m-n} f$$

jest wielomianem stopnia $< m$.

Założenie indukcyjne:

$m \geqslant n$ i dzielenie przez f jest wykonalne dla wielomianów stopnia $< m$.

Niech g_m będzie najwyższym współczynnikiem wielomianu g, a f_n najwyższym współczynnikiem wielomianu f.
Wtedy wielomian

$$g' = g - g_m f_n^{-1} X^{m-n} f$$

jest wielomianem stopnia $< m$.
Z założenia indukcyjnego istnieją $q', r' \in P[X]$ takie, że

$$g' = q'f + r', \ \mathrm{st}(r') < \mathrm{st}(f).$$

Założenie indukcyjne:

$m \geqslant n$ i dzielenie przez f jest wykonalne dla wielomianów stopnia $< m$.

Niech g_m będzie najwyższym współczynnikiem wielomianu g, a f_n najwyższym współczynnikiem wielomianu f.
Wtedy wielomian

$$g' = g - g_m f_n^{-1} X^{m-n} f$$

jest wielomianem stopnia $< m$.
Z założenia indukcyjnego istnieją $q', r' \in P[X]$ takie, że

$$g' = q'f + r', \ \mathrm{st}(r') < \mathrm{st}(f).$$

Zatem

$$g = (q' + g_m f_n^{-1} X^{m-n}) f + r'.$$

Założenie indukcyjne:

$m \geqslant n$ i dzielenie przez f jest wykonalne dla wielomianów stopnia $< m$.

Niech g_m będzie najwyższym współczynnikiem wielomianu g, a f_n najwyższym współczynnikiem wielomianu f.
Wtedy wielomian

$$g' = g - g_m f_n^{-1} X^{m-n} f$$

jest wielomianem stopnia $< m$.
Z założenia indukcyjnego istnieją $q', r' \in P[X]$ takie, że

$$g' = q'f + r', \ \mathrm{st}(r') < \mathrm{st}(f).$$

Zatem

$$g = (q' + g_m f_n^{-1} X^{m-n}) f + r'.$$

Wystarczy wziąć $q = q' + g_m f_n^{-1} X^{m-n}$ oraz $r = r'$.

Założenie indukcyjne:

$m \geqslant n$ i dzielenie przez f jest wykonalne dla wielomianów stopnia $< m$.

Niech g_m będzie najwyższym współczynnikiem wielomianu g, a f_n najwyższym współczynnikiem wielomianu f.
Wtedy wielomian

$$g' = g - g_m f_n^{-1} X^{m-n} f$$

jest wielomianem stopnia $< m$.
Z założenia indukcyjnego istnieją $q', r' \in P[X]$ takie, że

$$g' = q'f + r', \ \mathrm{st}(r') < \mathrm{st}(f).$$

Zatem

$$g = (q' + g_m f_n^{-1} X^{m-n}) f + r'.$$

Wystarczy wziąć $q = q' + g_m f_n^{-1} X^{m-n}$ oraz $r = r'$.
Zasada indukcji matematycznej gwarantuje, że dzielenie z resztą przez f jest wykonalne dla dowolnego wielomianu g.

Jednoznaczność dzielenia.

Jednoznaczność dzielenia.
Przypuśćmy, że

$$g = qf + r = q'f + r', \;\; \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(f), \; \mathrm{st}(r') < \mathrm{st}(f).$$

Jednoznaczność dzielenia.
Przypuśćmy, że

$$g = qf + r = q'f + r', \quad \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(f), \ \mathrm{st}(r') < \mathrm{st}(f).$$

Wtedy

$$(q - q')f = r' - r.$$

Jeśli $q - q' \neq 0$, to po lewej stronie mamy wielomian stopnia równego $\mathrm{st}(q - q') + \mathrm{st}(f) \geqslant \mathrm{st}(f)$, a po prawej wielomian stopnia mniejszego od $\mathrm{st}(f)$.

Jednoznaczność dzielenia.
Przypuśćmy, że

$$g = qf + r = q'f + r', \ \ \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(f), \ \mathrm{st}(r') < \mathrm{st}(f).$$

Wtedy

$$(q - q')f = r' - r.$$

Jeśli $q - q' \neq 0$, to po lewej stronie mamy wielomian stopnia równego $\mathrm{st}(q - q') + \mathrm{st}(f) \geqslant \mathrm{st}(f)$, a po prawej wielomian stopnia mniejszego od $\mathrm{st}(f)$. Jest to niemożliwe, więc $q - q' = 0$.

Jednoznaczność dzielenia.
Przypuśćmy, że

$$g = qf + r = q'f + r', \ \ \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(f), \ \mathrm{st}(r') < \mathrm{st}(f).$$

Wtedy

$$(q - q')f = r' - r.$$

Jeśli $q - q' \neq 0$, to po lewej stronie mamy wielomian stopnia równego $\mathrm{st}(q - q') + \mathrm{st}(f) \geqslant \mathrm{st}(f)$, a po prawej wielomian stopnia mniejszego od $\mathrm{st}(f)$.
Jest to niemożliwe, więc $q - q' = 0$.
Stąd

$$q = q', \ r = r'. \quad \P$$

Jednoznaczność dzielenia.

Przypuśćmy, że

$$g = qf + r = q'f + r', \ \ \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(f), \ \mathrm{st}(r') < \mathrm{st}(f).$$

Wtedy

$$(q - q')f = r' - r.$$

Jeśli $q - q' \neq 0$, to po lewej stronie mamy wielomian stopnia równego $\mathrm{st}(q - q') + \mathrm{st}(f) \geqslant \mathrm{st}(f)$, a po prawej wielomian stopnia mniejszego od $\mathrm{st}(f)$. Jest to niemożliwe, więc $q - q' = 0$.

Stąd

$$q = q', \ r = r'. \quad \P$$

Wniosek

Jeśli P jest ciałem oraz $0 \neq f \in P[x]$, to dla dowolnego $g \in P[X]$ istnieje dokładnie jedna para wielomianów $q, r \in P[X]$ taka, że

$$g = qf + r, \ \ \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(f).$$

Przykłady

- W pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$ nie jest wykonalne dzielenie z resztą wielomianu X przez wielomian $2X$.

Przykłady

- W pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$ nie jest wykonalne dzielenie z resztą wielomianu X przez wielomian $2X$.

Przykłady

- W pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$ nie jest wykonalne dzielenie z resztą wielomianu X przez wielomian $2X$. Wiesz dlaczego?

Przykłady

- W pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$ nie jest wykonalne dzielenie z resztą wielomianu X przez wielomian $2X$. Wiesz dlaczego?
- W pierścieniu $\mathbb{Z}_4[X]$ mamy

$$0 = 0(2X + 1) + 0 = 2(2X + 1) + 2.$$

Przykłady

- W pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$ nie jest wykonalne dzielenie z resztą wielomianu X przez wielomian $2X$. Wiesz dlaczego?
- W pierścieniu $\mathbb{Z}_4[X]$ mamy

$$0 = 0(2X+1)+0 = 2(2X+1)+2.$$

Przykłady

- W pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$ nie jest wykonalne dzielenie z resztą wielomianu X przez wielomian $2X$. Wiesz dlaczego?
- W pierścieniu $\mathbb{Z}_4[X]$ mamy

$$0 = 0(2X + 1) + 0 = 2(2X + 1) + 2.$$

  Zatem dzielenie wielomianu zerowego przez wielomian $2X + 1$ jest wykonalne, ale nie jest jednoznaczne.

Przykłady

- W pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$ nie jest wykonalne dzielenie z resztą wielomianu X przez wielomian $2X$. Wiesz dlaczego?
- W pierścieniu $\mathbb{Z}_4[X]$ mamy

$$0 = 0(2X + 1) + 0 = 2(2X + 1) + 2.$$

Zatem dzielenie wielomianu zerowego przez wielomian $2X + 1$ jest wykonalne, ale nie jest jednoznaczne. Wiesz dlaczego?

Przykłady

- W pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$ nie jest wykonalne dzielenie z resztą wielomianu X przez wielomian $2X$. Wiesz dlaczego?
- W pierścieniu $\mathbb{Z}_4[X]$ mamy

$$0 = 0(2X + 1) + 0 = 2(2X + 1) + 2.$$

  Zatem dzielenie wielomianu zerowego przez wielomian $2X + 1$ jest wykonalne, ale nie jest jednoznaczne. Wiesz dlaczego?
- Podzielmy z resztą (*na tablicy*) wielomian $2X^3 + X^2 + 3X - 1$ przez wielomian $X^2 + 1$ w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$.

Definicja

Wartością wielomianu $f = f_0 + f_1 X + \ldots + f_n X^n \in P[X]$ w punkcie $a \in P$ nazywamy

$$f(a) = f_0 + f_1 a + \ldots + f_n a^n \in P.$$

Definicja

Wartością wielomianu $f = f_0 + f_1 X + \ldots + f_n X^n \in P[X]$ w punkcie $a \in P$ nazywamy

$$f(a) = f_0 + f_1 a + \ldots + f_n a^n \in P.$$

Funkcją wielomianową wielomianu f nazywamy funkcję

$$\Phi_f : P \longrightarrow P,\ \Phi_f(a) = f(a),\ \text{dla } a \in P.$$

Definicja

Wartością wielomianu $f = f_0 + f_1X + ... + f_nX^n \in P[X]$ w punkcie $a \in P$ nazywamy

$$f(a) = f_0 + f_1a + ... + f_na^n \in P.$$

Funkcją wielomianową wielomianu f nazywamy funkcję

$$\Phi_f : P \longrightarrow P,\ \Phi_f(a) = f(a),\ \text{dla } a \in P.$$

Element $a \in P$ nazywamy **pierwiastkiem** wielomianu $f \in P[X]$, jeśli $f(a) = 0$.

Definicja

Wartością wielomianu $f = f_0 + f_1 X + \ldots + f_n X^n \in P[X]$ w punkcie $a \in P$ nazywamy

$$f(a) = f_0 + f_1 a + \ldots + f_n a^n \in P.$$

Funkcją wielomianową wielomianu f nazywamy funkcję

$$\Phi_f : P \longrightarrow P,\ \Phi_f(a) = f(a),\ \text{dla } a \in P.$$

Element $a \in P$ nazywamy **pierwiastkiem** wielomianu $f \in P[X]$, jeśli $f(a) = 0$.

Uwga $\quad (f+g)(a) = f(a) + g(a), \ \ (fg)(a) = f(a)g(a).$

Definicja

Wartością wielomianu $f = f_0 + f_1X + ... + f_nX^n \in P[X]$ w punkcie $a \in P$ nazywamy

$$f(a) = f_0 + f_1a + ... + f_na^n \in P.$$

Funkcją wielomianową wielomianu f nazywamy funkcję

$$\Phi_f : P \longrightarrow P, \ \Phi_f(a) = f(a), \text{ dla } a \in P.$$

Element $a \in P$ nazywamy **pierwiastkiem** wielomianu $f \in P[X]$, jeśli $f(a) = 0$.

Uwaga $\quad (f+g)(a) = f(a) + g(a), \ \ (fg)(a) = f(a)g(a).$

Twierdzenie (E.Bezout (1730-1783)

Niech $f \in P[X]$, $a \in P$. Wtedy $\quad f(a) = 0 \iff \underset{g \in P[X]}{\exists} f = (X-a)g.$

Definicja

Wartością wielomianu $f = f_0 + f_1 X + \ldots + f_n X^n \in P[X]$ w punkcie $a \in P$ nazywamy

$$f(a) = f_0 + f_1 a + \ldots + f_n a^n \in P.$$

Funkcją wielomianową wielomianu f nazywamy funkcję

$$\Phi_f : P \longrightarrow P,\ \Phi_f(a) = f(a),\ \text{dla } a \in P.$$

Element $a \in P$ nazywamy **pierwiastkiem** wielomianu $f \in P[X]$, jeśli $f(a) = 0$.

Uwaga $\quad (f+g)(a) = f(a) + g(a), \ \ (fg)(a) = f(a)g(a).$

Twierdzenie (E.Bezout (1730-1783)

Niech $f \in P[X]$, $a \in P$. Wtedy $\quad f(a) = 0 \iff \underset{g \in P[X]}{\exists} f = (X-a)g.$

Dowód. Z twierdzenia o dzieleniu z resztą mamy

$$f = g(X-a) + r, \quad \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(X-a) = 1.$$

Definicja

Wartością wielomianu $f = f_0 + f_1X + ... + f_nX^n \in P[X]$ w punkcie $a \in P$ nazywamy

$$f(a) = f_0 + f_1 a + ... + f_n a^n \in P.$$

Funkcją wielomianową wielomianu f nazywamy funkcję

$$\Phi_f : P \longrightarrow P,\ \Phi_f(a) = f(a),\ \text{dla } a \in P.$$

Element $a \in P$ nazywamy **pierwiastkiem** wielomianu $f \in P[X]$, jeśli $f(a) = 0$.

Uwga $\quad (f+g)(a) = f(a) + g(a),\ \ (fg)(a) = f(a)g(a).$

Twierdzenie (E.Bezout (1730-1783)

Niech $f \in P[X]$, $a \in P$. Wtedy $\quad f(a) = 0 \iff \underset{g \in P[X]}{\exists} f = (X-a)g.$

Dowód. Z twierdzenia o dzieleniu z resztą mamy

$$f = g(X-a) + r, \quad \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(X-a) = 1.$$

Zatem r jest wielomianem stałym i $f(a) = r$.

Definicja

Wartością wielomianu $f = f_0 + f_1 X + ... + f_n X^n \in P[X]$ w punkcie $a \in P$ nazywamy

$$f(a) = f_0 + f_1 a + ... + f_n a^n \in P.$$

Funkcją wielomianową wielomianu f nazywamy funkcję

$$\Phi_f : P \longrightarrow P,\ \Phi_f(a) = f(a),\ \text{dla } a \in P.$$

Element $a \in P$ nazywamy **pierwiastkiem** wielomianu $f \in P[X]$, jeśli $f(a) = 0$.

Uwaga $\quad (f+g)(a) = f(a) + g(a),\ \ (fg)(a) = f(a)g(a).$

Twierdzenie (E.Bezout (1730-1783)

Niech $f \in P[X]$, $a \in P$. Wtedy $\quad f(a) = 0 \iff \underset{g \in P[X]}{\exists} f = (X-a)g.$

Dowód. Z twierdzenia o dzieleniu z resztą mamy

$$f = g(X-a) + r, \quad \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(X-a) = 1.$$

Zatem r jest wielomianem stałym i $f(a) = r$. Stąd

$$f(a) = 0 \iff r = 0 \iff f = g(X-a). \quad ¶$$

Definicja

Element $a \in P$ nazywamy **pierwiastkiem** k**-krotnym** wielomianu $f \in P[X]$, jeśli wielomian $(X - a)^k$ dzieli wielomian f, a wielomian $(X - a)^{k+1}$ nie dzieli f.

Definicja

Element $a \in P$ nazywamy **pierwiastkiem** k**-krotnym** wielomianu $f \in P[X]$, jeśli wielomian $(X - a)^k$ dzieli wielomian f, a wielomian $(X - a)^{k+1}$ nie dzieli f.

Uwaga

Element $a \in P$ jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f = (X - a)^k g, \quad g(a) \neq 0.$$

Definicja

Element $a \in P$ nazywamy **pierwiastkiem** k**-krotnym** wielomianu $f \in P[X]$, jeśli wielomian $(X - a)^k$ dzieli wielomian f, a wielomian $(X - a)^{k+1}$ nie dzieli f.

Uwaga

Element $a \in P$ jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f = (X - a)^k g, \quad g(a) \neq 0.$$

Twierdzenie

Niech P będzie pierścieniem całkowitym oraz niech $0 \neq f \in P[X]$. Niech $a_1, ..., a_m$ będą parami różnymi pierwiastkami wielomianu f o krotnościach odpowiednio $k_1, ..., k_m$. Wtedy wielomian f jest podzielny przez wielomian $(X - a_1)^{k_1} ... (X - a_m)^{k_m}$.

Definicja

Element $a \in P$ nazywamy **pierwiastkiem** k**-krotnym** wielomianu $f \in P[X]$, jeśli wielomian $(X - a)^k$ dzieli wielomian f, a wielomian $(X - a)^{k+1}$ nie dzieli f.

Uwaga

Element $a \in P$ jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f = (X - a)^k g, \quad g(a) \neq 0.$$

Twierdzenie

Niech P będzie pierścieniem całkowitym oraz niech $0 \neq f \in P[X]$. Niech $a_1, ..., a_m$ będą parami różnymi pierwiastkami wielomianu f o krotnościach odpowiednio $k_1, ..., k_m$. Wtedy wielomian f jest podzielny przez wielomian $(X - a_1)^{k_1} ... (X - a_m)^{k_m}$.

Dowód (pominiemy) jest indukcyjny ze względu na m.

Wnioski

Niech P będzie pierścieniem całkowitym.

1. Jeśli $0 \neq f \in P[X]$, $\mathrm{st}(f) = m$, to f ma co najwyżej m pierwiastków (licząc wraz z krotnościami).

Wnioski

Niech P będzie pierścieniem całkowitym.

1. Jeśli $0 \neq f \in P[X]$, $\mathrm{st}(f) = m$, to f ma co najwyżej m pierwiastków (licząc wraz z krotnościami).
2. Jeśli w dodatku P zawiera nieskończenie wiele elementów, to dla dowolnego $0 \neq f \in P[X]$ istnieje element $b \in P$, że $f(b) \neq 0$.

Wnioski

Niech P będzie pierścieniem całkowitym.

1. Jeśli $0 \neq f \in P[X]$, $\mathrm{st}(f) = m$, to f ma co najwyżej m pierwiastków (licząc wraz z krotnościami).
2. Jeśli w dodatku P zawiera nieskończenie wiele elementów, to dla dowolnego $0 \neq f \in P[X]$ istnieje element $b \in P$, że $f(b) \neq 0$.
3. Jeśli $f, g \in P[X]$ i zbiór $\{a \in P : f(a) = g(a)\}$ ma więcej elementów niż $\max(\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g))$, to $f = g$.

Wnioski

Niech P będzie pierścieniem całkowitym.

1. Jeśli $0 \neq f \in P[X]$, $\mathrm{st}(f) = m$, to f ma co najwyżej m pierwiastków (licząc wraz z krotnościami).
2. Jeśli w dodatku P zawiera nieskończenie wiele elementów, to dla dowolnego $0 \neq f \in P[X]$ istnieje element $b \in P$, że $f(b) \neq 0$.
3. Jeśli $f, g \in P[X]$ i zbiór $\{a \in P : f(a) = g(a)\}$ ma więcej elementów niż $\max(\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g))$, to $f = g$.

Wnioski

Niech P będzie pierścieniem całkowitym.

1. Jeśli $0 \neq f \in P[X]$, $\mathrm{st}(f) = m$, to f ma co najwyżej m pierwiastków (licząc wraz z krotnościami).
2. Jeśli w dodatku P zawiera nieskończenie wiele elementów, to dla dowolnego $0 \neq f \in P[X]$ istnieje element $b \in P$, że $f(b) \neq 0$.
3. Jeśli $f, g \in P[X]$ i zbiór $\{a \in P : f(a) = g(a)\}$ ma więcej elementów niż $\max(\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g))$, to $f = g$.

Dowody na tablicy.

Wnioski

Niech P będzie pierścieniem całkowitym.

1. Jeśli $0 \neq f \in P[X]$, $\mathrm{st}(f) = m$, to f ma co najwyżej m pierwiastków (licząc wraz z krotnościami).
2. Jeśli w dodatku P zawiera nieskończenie wiele elementów, to dla dowolnego $0 \neq f \in P[X]$ istnieje element $b \in P$, że $f(b) \neq 0$.
3. Jeśli $f, g \in P[X]$ i zbiór $\{a \in P : f(a) = g(a)\}$ ma więcej elementów niż $\max(\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g))$, to $f = g$.

Dowody na tablicy.

Przykład

Niech $f = X^3 - X \in \mathbb{Z}_3[X]$. Wtedy $f(0) =$

Wnioski

Niech P będzie pierścieniem całkowitym.

1. Jeśli $0 \neq f \in P[X]$, $\mathrm{st}(f) = m$, to f ma co najwyżej m pierwiastków (licząc wraz z krotnościami).
2. Jeśli w dodatku P zawiera nieskończenie wiele elementów, to dla dowolnego $0 \neq f \in P[X]$ istnieje element $b \in P$, że $f(b) \neq 0$.
3. Jeśli $f, g \in P[X]$ i zbiór $\{a \in P : f(a) = g(a)\}$ ma więcej elementów niż $\max(\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g))$, to $f = g$.

Dowody na tablicy.

Przykład

Niech $f = X^3 - X \in \mathbb{Z}_3[X]$. Wtedy $f(0) = 0,\ f(1) =$

Wnioski

Niech P będzie pierścieniem całkowitym.

1. Jeśli $0 \neq f \in P[X]$, $\mathrm{st}(f) = m$, to f ma co najwyżej m pierwiastków (licząc wraz z krotnościami).
2. Jeśli w dodatku P zawiera nieskończenie wiele elementów, to dla dowolnego $0 \neq f \in P[X]$ istnieje element $b \in P$, że $f(b) \neq 0$.
3. Jeśli $f, g \in P[X]$ i zbiór $\{a \in P : f(a) = g(a)\}$ ma więcej elementów niż $\max(\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g))$, to $f = g$.

Dowody na tablicy.

Przykład

Niech $f = X^3 - X \in \mathbb{Z}_3[X]$. Wtedy $f(0) = 0,\ f(1) = 0,\ f(2) =$

Wnioski

Niech P będzie pierścieniem całkowitym.

1. Jeśli $0 \neq f \in P[X]$, $\mathrm{st}(f) = m$, to f ma co najwyżej m pierwiastków (licząc wraz z krotnościami).
2. Jeśli w dodatku P zawiera nieskończenie wiele elementów, to dla dowolnego $0 \neq f \in P[X]$ istnieje element $b \in P$, że $f(b) \neq 0$.
3. Jeśli $f, g \in P[X]$ i zbiór $\{a \in P : f(a) = g(a)\}$ ma więcej elementów niż $\max(\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g))$, to $f = g$.

Dowody na tablicy.

Przykład

Niech $f = X^3 - X \in \mathbb{Z}_3[X]$. Wtedy $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$.

Wnioski

Niech P będzie pierścieniem całkowitym.

1. Jeśli $0 \neq f \in P[X]$, $\mathrm{st}(f) = m$, to f ma co najwyżej m pierwiastków (licząc wraz z krotnościami).
2. Jeśli w dodatku P zawiera nieskończenie wiele elementów, to dla dowolnego $0 \neq f \in P[X]$ istnieje element $b \in P$, że $f(b) \neq 0$.
3. Jeśli $f, g \in P[X]$ i zbiór $\{a \in P : f(a) = g(a)\}$ ma więcej elementów niż $\max(\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g))$, to $f = g$.

Dowody na tablicy.

Przykład

Niech $f = X^3 - X \in \mathbb{Z}_3[X]$. Wtedy $f(0) = 0,\ f(1) = 0,\ f(2) = 0$.

Widać jak ważne jest w powyższym wniosku 2 założenie, że pierścień zawiera nieskończenie wiele elementów.

Problem interpolacyjny

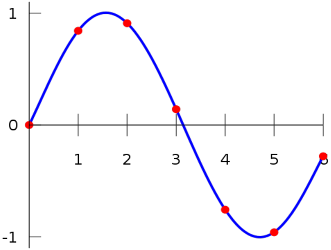
Niech $a_0, \ldots, a_n$ będą parami różnymi elementami ciała K oraz niech $b_0, \ldots, b_n \in K$. Czy istnieje wielomian $f \in K[X]$ taki, że

$$f(a_0) = b_0, f(a_1) = b_1, \ldots, f(a_n) = b_n?$$

Problem interpolacyjny

Niech $a_0, \ldots, a_n$ będą parami różnymi elementami ciała K oraz niech $b_0, \ldots, b_n \in K$. Czy istnieje wielomian $f \in K[X]$ taki, że

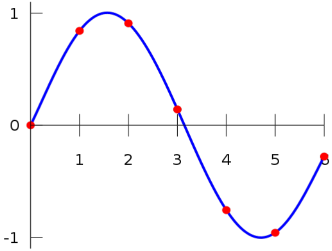
$$f(a_0) = b_0, f(a_1) = b_1, \ldots, f(a_n) = b_n?$$



Problem interpolacyjny

Niech $a_0, \ldots, a_n$ będą parami różnymi elementami ciała K oraz niech $b_0, \ldots, b_n \in K$. Czy istnieje wielomian $f \in K[X]$ taki, że

$$f(a_0) = b_0, f(a_1) = b_1, \ldots, f(a_n) = b_n?$$



Twierdzenie

Jeśli $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są parami różnymi elementami ciała K oraz $b_0, b_1, \ldots, b_n \in K$, to istnieje dokładnie jeden wielomian $f \in K[X]$ stopnia $\leqslant n$ taki, że

$$f(a_0) = b_0, f(a_1) = b_1, \ldots, f(a_n) = b_n.$$

Dowód. Niech

$$f_i = \frac{(X-a_0)\ldots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\ldots(X-a_n)}{(a_i-a_0)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Dowód. Niech

$$f_i = \frac{(X-a_0)...(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})...(X-a_n)}{(a_i-a_0)...(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})...(a_i-a_n)}, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Zauważmy, że

$$f_i(a_j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j \end{cases}.$$

Dowód. Niech

$$f_i = \frac{(X-a_0)\ldots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\ldots(X-a_n)}{(a_i-a_0)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Zauważmy, że

$$f_i(a_j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j \end{cases}.$$

Szukanym wielomianem jest

$$f = b_0 f_0 + b_1 f_1 + \ldots + b_n f_n,$$

Dowód. Niech

$$f_i = \frac{(X - a_0)\dots(X - a_{i-1})(X - a_{i+1})\dots(X - a_n)}{(a_i - a_0)\dots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\dots(a_i - a_n)}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Zauważmy, że

$$f_i(a_j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j \end{cases}.$$

Szukanym wielomianem jest

$$f = b_0 f_0 + b_1 f_1 + \dots + b_n f_n,$$

bo

$$f(a_i) = b_0 f_0(a_i) + b_1 f_1(a_i) + \dots + b_i f_i(a_i) + \dots + b_n f_n(a_i) =$$

Dowód. Niech

$$f_i = \frac{(X-a_0)...(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})...(X-a_n)}{(a_i-a_0)...(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})...(a_i-a_n)}, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Zauważmy, że

$$f_i(a_j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j \end{cases}.$$

Szukanym wielomianem jest

$$f = b_0 f_0 + b_1 f_1 + ... + b_n f_n,$$

bo

$$f(a_i) = b_0 f_0(a_i) + b_1 f_1(a_i) + ... + b_i f_i(a_i) + ... + b_n f_n(a_i) =$$

$$= b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + ... + b_i \cdot 1 + ... + b_n \cdot 0 = b_i.$$

Dowód. Niech

$$f_i = \frac{(X-a_0)\dots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\dots(X-a_n)}{(a_i-a_0)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Zauważmy, że

$$f_i(a_j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j \end{cases}.$$

Szukanym wielomianem jest

$$f = b_0 f_0 + b_1 f_1 + \dots + b_n f_n,$$

bo

$$f(a_i) = b_0 f_0(a_i) + b_1 f_1(a_i) + \dots + b_i f_i(a_i) + \dots + b_n f_n(a_i) =$$

$$= b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + \dots + b_i \cdot 1 + \dots + b_n \cdot 0 = b_i.$$

Zauważ, że skonstruowany wielomian (nazywamy go **wielomianem interpolacyjnym**) ma stopień $\leqslant n$.

Dowód. Niech

$$f_i = \frac{(X-a_0)\dots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\dots(X-a_n)}{(a_i-a_0)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Zauważmy, że

$$f_i(a_j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j \end{cases}.$$

Szukanym wielomianem jest

$$f = b_0 f_0 + b_1 f_1 + \dots + b_n f_n,$$

bo

$$f(a_i) = b_0 f_0(a_i) + b_1 f_1(a_i) + \dots + b_i f_i(a_i) + \dots + b_n f_n(a_i) =$$

$$= b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + \dots + b_i \cdot 1 + \dots + b_n \cdot 0 = b_i.$$

Zauważ, że skonstruowany wielomian (nazywamy go **wielomianem interpolacyjnym**) ma stopień $\leqslant n$.

Jednoznaczność wielomianu f wynika z jednego z wcześniejszych wniosków. Wiesz z którego?

Dowód. Niech

$$f_i = \frac{(X-a_0)\dots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\dots(X-a_n)}{(a_i-a_0)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Zauważmy, że

$$f_i(a_j) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i \neq j \\ 1, & \text{gdy } i = j \end{cases}.$$

Szukanym wielomianem jest

$$f = b_0 f_0 + b_1 f_1 + \dots + b_n f_n,$$

bo

$$f(a_i) = b_0 f_0(a_i) + b_1 f_1(a_i) + \dots + b_i f_i(a_i) + \dots + b_n f_n(a_i) =$$

$$= b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + \dots + b_i \cdot 1 + \dots + b_n \cdot 0 = b_i.$$

Zauważ, że skonstruowany wielomian (nazywamy go **wielomianem interpolacyjnym**) ma stopień $\leqslant n$.

Jednoznaczność wielomianu f wynika z jednego z wcześniejszych wniosków. Wiesz z którego? ¶

W ramach wykładu 5 zostaliście poinformowani o zasadniczym twierdzeniu algebry. Przypomnijmy go.

W ramach wykładu 5 zostaliście poinformowani o zasadniczym twierdzeniu algebry. Przypomnijmy go.

Zasadnicze Twierdzenie Algebry

Dowolne równanie postaci

$$a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 = 0, \quad a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$$

ma rozwiązanie w liczbach zespolonych.

W ramach wykładu 5 zostaliście poinformowani o zasadniczym twierdzeniu algebry. Przypomnijmy go.

Zasadnicze Twierdzenie Algebry

Dowolne równanie postaci

$$a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 = 0, \quad a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$$

ma rozwiązanie w liczbach zespolonych.

Zauważmy, z tego twierdzenia oraz twierdzenia Bezout wynika następujący fakt.

Twierdzenie

Jeśli $f \in \mathbb{C}[X]$, $\mathrm{st}(f) \geqslant 1$, to f jest iloczynem wielomianów stopnia 1, tzn.

$$f = a(X - a_1) \cdot \dots \cdot (X - a_n) \text{ dla pewnych } a, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}.$$

W ramach wykładu 5 zostaliście poinformowani o zasadniczym twierdzeniu algebry. Przypomnijmy go.

Zasadnicze Twierdzenie Algebry

Dowolne równanie postaci

$$a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0 = 0, \quad a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$$

ma rozwiązanie w liczbach zespolonych.

Zauważmy, z tego twierdzenia oraz twierdzenia Bezout wynika następujący fakt.

Twierdzenie

Jeśli $f \in \mathbb{C}[X]$, $\mathrm{st}(f) \geqslant 1$, to f jest iloczynem wielomianów stopnia 1, tzn.

$$f = a(X - a_1) \cdot \ldots \cdot (X - a_n) \text{ dla pewnych } a, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}.$$

A jak to jest w przypadku wielomianów o współczynnikach rzeczywistych?

Zadanie

Jeżeli $z \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f \in \mathbb{R}[X]$, to $\overline{z}$ jest również pierwiastkiem wielomianu f.

Zadanie

Jeżeli $z \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f \in \mathbb{R}[X]$, to $\overline{z}$ jest również pierwiastkiem wielomianu f.

Rachunki na tablicy.

Zadanie

Jeżeli $z \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f \in \mathbb{R}[X]$, to $\overline{z}$ jest również pierwiastkiem wielomianu f.

Rachunki na tablicy.

Niech $z_1, \overline{z_1}, ..., z_k, \overline{z_k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ oraz $a_1, ..., a_l \in \mathbb{R}$ będą wszystkimi pierwiastkami wielomianu $f \in \mathbb{R}[X]$.

Zadanie

Jeżeli $z \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f \in \mathbb{R}[X]$, to $\overline{z}$ jest również pierwiastkiem wielomianu f.

Rachunki na tablicy.

Niech $z_1, \overline{z_1}, ..., z_k, \overline{z_k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ oraz $a_1, ..., a_l \in \mathbb{R}$ będą wszystkimi pierwiastkami wielomianu $f \in \mathbb{R}[X]$. Wtedy

$$f = a(X - z_1)(X - \overline{z_1}) \cdot ... \cdot (X - z_k)(X - \overline{z_k})(X - a_1) \cdot ... \cdot (X - a_k)$$

Zadanie

Jeżeli $z \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f \in \mathbb{R}[X]$, to $\overline{z}$ jest również pierwiastkiem wielomianu f.

Rachunki na tablicy.

Niech $z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_k, \overline{z_k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ oraz $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{R}$ będą wszystkimi pierwiastkami wielomianu $f \in \mathbb{R}[X]$. Wtedy

$$f = a(X - z_1)(X - \overline{z_1}) \cdot \ldots \cdot (X - z_k)(X - \overline{z_k})(X - a_1) \cdot \ldots \cdot (X - a_k)$$

Zauważmy, że

$$(X - z_i)(X - \overline{z_i}) = X^2 - (z_i + \overline{z_i})X + z_i\overline{z_i} \in \mathbb{R}[X]$$

jest wielomianem nierozkladalnym nad $\mathbb{R}$, bo

Zadanie

Jeżeli $z \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f \in \mathbb{R}[X]$, to $\overline{z}$ jest również pierwiastkiem wielomianu f.

Rachunki na tablicy.

Niech $z_1, \overline{z_1}, \dots, z_k, \overline{z_k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ oraz $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$ będą wszystkimi pierwiastkami wielomianu $f \in \mathbb{R}[X]$. Wtedy

$$f = a(X - z_1)(X - \overline{z_1}) \cdot \dots \cdot (X - z_k)(X - \overline{z_k})(X - a_1) \cdot \dots \cdot (X - a_k)$$

Zauważmy, że

$$(X - z_i)(X - \overline{z_i}) = X^2 - (z_i + \overline{z_i})X + z_i\overline{z_i} \in \mathbb{R}[X]$$

jest wielomianem nierozkladalnym nad $\mathbb{R}$, bo nie posiada pierwiastków w $\mathbb{R}$.

Zadanie

Jeżeli $z \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu $f \in \mathbb{R}[X]$, to $\overline{z}$ jest również pierwiastkiem wielomianu f.

Rachunki na tablicy.

Niech $z_1, \overline{z_1}, ..., z_k, \overline{z_k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ oraz $a_1, ..., a_l \in \mathbb{R}$ będą wszystkimi pierwiastkami wielomianu $f \in \mathbb{R}[X]$. Wtedy

$$f = a(X - z_1)(X - \overline{z_1}) \cdot ... \cdot (X - z_k)(X - \overline{z_k})(X - a_1) \cdot ... \cdot (X - a_k)$$

Zauważmy, że

$$(X - z_i)(X - \overline{z_i}) = X^2 - (z_i + \overline{z_i})X + z_i\overline{z_i} \in \mathbb{R}[X]$$

jest wielomianem nierozkladalnym nad $\mathbb{R}$, bo nie posiada pierwiastków w $\mathbb{R}$.

Zatem

Twierdzenie

Jeśli $f \in \mathbb{R}[X]$, $\mathrm{st}(f) \geqslant 1$, to

$$f = h_1 ... h_k g_1 ... g_l,$$

gdzie $h_1, ..., h_k \in \mathbb{R}[X]$ są wielomianami nierozkladalnymi stopnia 2, a $g_1, ..., g_l \in \mathbb{R}[X]$ są wielomianami stopnia 1.

Jeżeli $P = K[X]$, gdzie K jest ciałem, to P jest pierścieniem całkowitym (ale nie ciałem).

Jeżeli $P = K[X]$, gdzie K jest ciałem, to P jest pierścieniem całkowitym (ale nie ciałem).

Zatem możemy utworzyć ciało ułamków pierścienia P, które oznaczamy $K(X)$.
Jego elementami są **funkcje wymierne**, które mają postać

Jeżeli $P = K[X]$, gdzie K jest ciałem, to P jest pierścieniem całkowitym (ale nie ciałem).

Zatem możemy utworzyć ciało ułamków pierścienia P, które oznaczamy $K(X)$.
Jego elementami są **funkcje wymierne**, które mają postać

$$\frac{f}{g} = \frac{a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0}{b_m X^m + \ldots + b_1 X + b_0}, \; g \neq 0, \; a_n, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0 \in K.$$

Jeżeli $P = K[X]$, gdzie K jest ciałem, to P jest pierścieniem całkowitym (ale nie ciałem).

Zatem możemy utworzyć ciało ułamków pierścienia P, które oznaczamy $K(X)$.
Jego elementami są **funkcje wymierne**, które mają postać

$$\frac{f}{g} = \frac{a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0}{b_m X^m + \ldots + b_1 X + b_0}, \; g \neq 0, \; a_n, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0 \in K.$$

Ciało $K(X)$ nazywamy **ciałem funkcji wymiernych** o współczynnikach z ciała K.

Jeżeli $P = K[X]$, gdzie K jest ciałem, to P jest pierścieniem całkowitym (ale nie ciałem).

Zatem możemy utworzyć ciało ułamków pierścienia P, które oznaczamy $K(X)$.
Jego elementami są **funkcje wymierne**, które mają postać

$$\frac{f}{g} = \frac{a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0}{b_m X^m + \ldots + b_1 X + b_0}, \; g \neq 0, \; a_n, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0 \in K.$$

Ciało $K(X)$ nazywamy **ciałem funkcji wymiernych** o współczynnikach z ciała K.

Przypomnijmy, że w tym ciele mamy

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} \iff f_1 g_2 = f_2 g_1,$$

Jeżeli $P = K[X]$, gdzie K jest ciałem, to P jest pierścieniem całkowitym (ale nie ciałem).

Zatem możemy utworzyć ciało ułamków pierścienia P, które oznaczamy $K(X)$.
Jego elementami są **funkcje wymierne**, które mają postać

$$\frac{f}{g} = \frac{a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0}{b_m X^m + \ldots + b_1 X + b_0},\ g \neq 0,\ a_n, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0 \in K.$$

Ciało $K(X)$ nazywamy **ciałem funkcji wymiernych** o współczynnikach z ciała K.

Przypomnijmy, że w tym ciele mamy

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} \iff f_1 g_2 = f_2 g_1,$$

a działania mają postać

$$\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 g_2 + f_2 g_1}{g_1 g_2}, \quad \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2}.$$

To już koniec wykładu 6!

To już koniec wykładu 6!

♡♡♡

Dziękuję za uwagę