Wykład 4
Ciało ułamków pierścienia całkowitego

Andrzej Sładek
sladek@ux2.math.us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Wykład jest przewidziany na (co najwyżej) 2 godziny lekcyjne

Wykład jest przewidziany na (co najwyżej) 2 godziny lekcyjne

Tematy poruszane na wykładzie można znaleźć w:

Wykład jest przewidziany na (co najwyżej) 2 godziny lekcyjne

Tematy poruszane na wykładzie można znaleźć w:

- A. Białynicki-Birula, *Algebra*, Bibl. Mat. 40, PWN 2009, [rozdz. VIII, §4]
- A.I. Kostrykin, *Wstęp do algebry, t. I*, PWN 2004, [rozdz. V, §4]

Definicja - przypomnienie

Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym** (lub dziedziną całkowitości), jeżeli jedynym dzielnikiem zera w P jest zero, tzn. spełniony jest warunek:

$$\underset{a,b\in P}{\forall} (a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ lub } b = 0).$$

Definicja - przypomnienie

Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym** (lub dziedziną całkowitości), jeżeli jedynym dzielnikiem zera w P jest zero, tzn. spełniony jest warunek:

$$\forall_{a,b \in P} \ (a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ lub } b = 0).$$

W trakcie całego wykładu wszystkie pierścienie będą pierścieniami całkowitymi!

Definicja - przypomnienie

Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym** (lub dziedziną całkowitości), jeżeli jedynym dzielnikiem zera w P jest zero, tzn. spełniony jest warunek:

$$\underset{a,b\in P}{\forall} (a\cdot b=0 \implies a=0 \text{ lub } b=0).$$

W trakcie całego wykładu wszystkie pierścienie będą pierścieniami całkowitymi!

Definicja

Podzbiór S pierścienia P nazywamy podzbiorem multiplikatywnym, jeśli:

Definicja - przypomnienie

Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym** (lub dziedziną całkowitości), jeżeli jedynym dzielnikiem zera w P jest zero, tzn. spełniony jest warunek:

$$\underset{a,b \in P}{\forall} (a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ lub } b = 0).$$

W trakcie całego wykładu wszystkie pierścienie będą pierścieniami całkowitymi!

Definicja

Podzbiór S pierścienia P nazywamy podzbiorem multiplikatywnym, jeśli:

- $0 \notin S$,

Definicja - przypomnienie

Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym** (lub dziedziną całkowitości), jeżeli jedynym dzielnikiem zera w P jest zero, tzn. spełniony jest warunek:

$$\underset{a,b\in P}{\forall} (a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ lub } b = 0).$$

W trakcie całego wykładu wszystkie pierścienie będą pierścieniami całkowitymi!

Definicja

Podzbiór S pierścienia P nazywamy podzbiorem multiplikatywnym, jeśli:

- $0 \notin S$,
- $1 \in S$,

Definicja - przypomnienie

Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym** (lub dziedziną całkowitości), jeżeli jedynym dzielnikiem zera w P jest zero, tzn. spełniony jest warunek:

$$\forall_{a,b\in P}\ (a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ lub } b = 0).$$

W trakcie całego wykładu wszystkie pierścienie będą pierścieniami całkowitymi!

Definicja

Podzbiór S pierścienia P nazywamy podzbiorem multiplikatywnym, jeśli:

- $0 \notin S$,
- $1 \in S$,
- zbiór S jest zamknięty ze względu na mnożenie, tzn. $\forall_{s,t\in S}\ s \cdot t \in S$.

Definicja - przypomnienie

Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym** (lub dziedziną całkowitości), jeżeli jedynym dzielnikiem zera w P jest zero, tzn. spełniony jest warunek:

$$\underset{a,b\in P}{\forall}\ (a\cdot b=0 \implies a=0 \text{ lub } b=0).$$

W trakcie całego wykładu wszystkie pierścienie będą pierścieniami całkowitymi!

Definicja

Podzbiór S pierścienia P nazywamy podzbiorem multiplikatywnym, jeśli:

- $0\notin S$,
- $1\in S$,
- zbiór S jest zamknięty ze względu na mnożenie, tzn. $\underset{s,t\in S}{\forall}\ s\cdot t\in S$.

Definicja - przypomnienie

Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym** (lub dziedziną całkowitości), jeżeli jedynym dzielnikiem zera w P jest zero, tzn. spełniony jest warunek:

$$\underset{a,b \in P}{\forall} \ (a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ lub } b = 0).$$

W trakcie całego wykładu wszystkie pierścienie będą pierścieniami całkowitymi!

Definicja

Podzbiór S pierścienia P nazywamy podzbiorem multiplikatywnym, jeśli:

- $0 \notin S$,
- $1 \in S$,
- zbiór S jest zamknięty ze względu na mnożenie, tzn. $\underset{s,t \in S}{\forall} \ s \cdot t \in S$.

Przykłady podzbiorów multiplikatywnych

- $P \setminus \{0\}$,

Definicja - przypomnienie

Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym** (lub dziedziną całkowitości), jeżeli jedynym dzielnikiem zera w P jest zero, tzn. spełniony jest warunek:

$$\underset{a,b\in P}{\forall} (a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ lub } b = 0).$$

W trakcie całego wykładu wszystkie pierścienie będą pierścieniami całkowitymi!

Definicja

Podzbiór S pierścienia P nazywamy podzbiorem multiplikatywnym, jeśli:

- $0 \notin S$,
- $1 \in S$,
- zbiór S jest zamknięty ze względu na mnożenie, tzn. $\underset{s,t\in S}{\forall} s \cdot t \in S$.

Przykłady podzbiorów multiplikatywnych

- $P \setminus \{0\}$,
- $\mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} = \{a \in \mathbb{Z} : p \nmid a\},\ p \in \mathbb{P}$,

Definicja - przypomnienie

Pierścień P nazywamy **pierścieniem całkowitym** (lub dziedziną całkowitości), jeżeli jedynym dzielnikiem zera w P jest zero, tzn. spełniony jest warunek:

$$\forall_{a,b\in P} \; (a\cdot b=0 \implies a=0 \text{ lub } b=0).$$

W trakcie całego wykładu wszystkie pierścienie będą pierścieniami całkowitymi!

Definicja

Podzbiór S pierścienia P nazywamy podzbiorem multiplikatywnym, jeśli:

- $0\notin S$,
- $1\in S$,
- zbiór S jest zamknięty ze względu na mnożenie, tzn. $\forall_{s,t\in S} \; s\cdot t\in S$.

Przykłady podzbiorów multiplikatywnych

- $P\setminus\{0\}$,
- $\mathbb{Z}\setminus p\mathbb{Z}=\{a\in\mathbb{Z} : p \nmid a\}, \; p\in\mathbb{P}$,
- $S=\{a^k : k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$, gdzie $a\in P, a\neq 0$.

Niech S będzie podzbiorem multiplikatywnym pierścienia P. W zbiorze $P \times S$ określamy relację $\sim$ następująco:

Niech S będzie podzbiorem multiplikatywnym pierścienia P. W zbiorze $P \times S$ określamy relację $\sim$ następująco:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff a \cdot t = b \cdot s.$$

Niech S będzie podzbiorem multiplikatywnym pierścienia P. W zbiorze $P \times S$ określamy relację $\sim$ następująco:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff a \cdot t = b \cdot s.$$

Stwierdzenie

Relacja $\sim$ jest relacją równoważnościową.

Niech S będzie podzbiorem multiplikatywnym pierścienia P. W zbiorze $P \times S$ określamy relację $\sim$ następująco:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff a \cdot t = b \cdot s.$$

Stwierdzenie

Relacja $\sim$ jest relacją równoważnościową.

Dowód na tablicy.

Niech S będzie podzbiorem multiplikatywnym pierścienia P. W zbiorze $P \times S$ określamy relację $\sim$ następująco:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff a \cdot t = b \cdot s.$$

Stwierdzenie

Relacja $\sim$ jest relacją równoważnościową.

Dowód na tablicy.

Klasę abstrakcji $[(a, s)]_\sim$ nazywamy **ułamkiem** i oznaczamy $\frac{a}{s}$.

Niech S będzie podzbiorem multiplikatywnym pierścienia P. W zbiorze $P \times S$ określamy relację $\sim$ następująco:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff a \cdot t = b \cdot s.$$

Stwierdzenie

Relacja $\sim$ jest relacją równoważnościową.

Dowód na tablicy.

Klasę abstrakcji $[(a, s)]_\sim$ nazywamy **ułamkiem** i oznaczamy $\frac{a}{s}$.

Lemat

Jeśli $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$, $(b_1, t_1) \sim (b_2, t_2)$, to

Niech S będzie podzbiorem multiplikatywnym pierścienia P. W zbiorze $P \times S$ określamy relację $\sim$ następująco:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff a \cdot t = b \cdot s.$$

Stwierdzenie

Relacja $\sim$ jest relacją równoważnościową.

Dowód na tablicy.

Klasę abstrakcji $[(a, s)]_\sim$ nazywamy **ułamkiem** i oznaczamy $\frac{a}{s}$.

Lemat

Jeśli $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$, $(b_1, t_1) \sim (b_2, t_2)$, to
$(a_1 \cdot t_1 + b_1 \cdot s_1, s_1 \cdot t_1) \sim (a_2 \cdot t_2 + b_2 \cdot s_2, s_2 \cdot t_2)$,

Niech S będzie podzbiorem multiplikatywnym pierścienia P. W zbiorze $P \times S$ określamy relację $\sim$ następująco:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff a \cdot t = b \cdot s.$$

Stwierdzenie

Relacja $\sim$ jest relacją równoważnościową.

Dowód na tablicy.

Klasę abstrakcji $[(a, s)]_{\sim}$ nazywamy **ułamkiem** i oznaczamy $\frac{a}{s}$.

Lemat

Jeśli $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$, $(b_1, t_1) \sim (b_2, t_2)$, to
$(a_1 \cdot t_1 + b_1 \cdot s_1, s_1 \cdot t_1) \sim (a_2 \cdot t_2 + b_2 \cdot s_2, s_2 \cdot t_2)$, $(a_1 \cdot b_1, s_1 \cdot t_1) \sim (a_2 \cdot b_2, s_2 \cdot t_2)$.

Niech S będzie podzbiorem multiplikatywnym pierścienia P. W zbiorze $P \times S$ określamy relację $\sim$ następująco:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff a \cdot t = b \cdot s.$$

Stwierdzenie

Relacja $\sim$ jest relacją równoważnościową.

Dowód na tablicy.

Klasę abstrakcji $[(a, s)]_\sim$ nazywamy **ułamkiem** i oznaczamy $\frac{a}{s}$.

Lemat

Jeśli $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$, $(b_1, t_1) \sim (b_2, t_2)$, to
$(a_1 \cdot t_1 + b_1 \cdot s_1, s_1 \cdot t_1) \sim (a_2 \cdot t_2 + b_2 \cdot s_2, s_2 \cdot t_2)$, $(a_1 \cdot b_1, s_1 \cdot t_1) \sim (a_2 \cdot b_2, s_2 \cdot t_2)$.

Inne sformułowanie:

$$\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2}, \ \frac{b_1}{t_1} = \frac{b_2}{t_2} \implies \frac{a_1 \cdot t_1 + b_1 \cdot s_1}{s_1 \cdot t_1} = \frac{a_2 \cdot t_2 + b_2 \cdot s_2}{s_2 \cdot t_2}, \ \frac{a_1 \cdot b_1}{s_1 \cdot t_1} = \frac{a_2 \cdot b_2}{s_2 \cdot t_2}$$

Niech S będzie podzbiorem multiplikatywnym pierścienia P. W zbiorze $P \times S$ określamy relację $\sim$ następująco:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff a \cdot t = b \cdot s.$$

Stwierdzenie

Relacja $\sim$ jest relacją równoważnościową.

Dowód na tablicy.

Klasę abstrakcji $[(a, s)]_\sim$ nazywamy **ułamkiem** i oznaczamy $\frac{a}{s}$.

Lemat

Jeśli $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$, $(b_1, t_1) \sim (b_2, t_2)$, to
$(a_1 \cdot t_1 + b_1 \cdot s_1, s_1 \cdot t_1) \sim (a_2 \cdot t_2 + b_2 \cdot s_2, s_2 \cdot t_2)$, $(a_1 \cdot b_1, s_1 \cdot t_1) \sim (a_2 \cdot b_2, s_2 \cdot t_2)$.

Inne sformułowanie:

$$\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2}, \ \frac{b_1}{t_1} = \frac{b_2}{t_2} \implies \frac{a_1 \cdot t_1 + b_1 \cdot s_1}{s_1 \cdot t_1} = \frac{a_2 \cdot t_2 + b_2 \cdot s_2}{s_2 \cdot t_2}, \ \frac{a_1 \cdot b_1}{s_1 \cdot t_1} = \frac{a_2 \cdot b_2}{s_2 \cdot t_2}$$

Dowód znowu na tablicy.

Niech S będzie podzbiorem multiplikatywnym pierścienia P. W zbiorze $P \times S$ określamy relację $\sim$ następująco:

$$(a, s) \sim (b, t) \iff a \cdot t = b \cdot s.$$

Stwierdzenie

Relacja $\sim$ jest relacją równoważnościową.

Dowód na tablicy.

Klasę abstrakcji $[(a, s)]_\sim$ nazywamy **ułamkiem** i oznaczamy $\frac{a}{s}$.

Lemat

Jeśli $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$, $(b_1, t_1) \sim (b_2, t_2)$, to
$(a_1 \cdot t_1 + b_1 \cdot s_1, s_1 \cdot t_1) \sim (a_2 \cdot t_2 + b_2 \cdot s_2, s_2 \cdot t_2)$, $(a_1 \cdot b_1, s_1 \cdot t_1) \sim (a_2 \cdot b_2, s_2 \cdot t_2)$.

Inne sformułowanie:

$$\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2}, \quad \frac{b_1}{t_1} = \frac{b_2}{t_2} \implies \frac{a_1 \cdot t_1 + b_1 \cdot s_1}{s_1 \cdot t_1} = \frac{a_2 \cdot t_2 + b_2 \cdot s_2}{s_2 \cdot t_2}, \quad \frac{a_1 \cdot b_1}{s_1 \cdot t_1} = \frac{a_2 \cdot b_2}{s_2 \cdot t_2}$$

Dowód znowu na tablicy.
W dalszej części będziemy pomijać znak mnożenie, czyli zamiast $a \cdot b$ będziemy pisać ab.

Twierdzenie

1. Zbiór $S^{-1}P = \{\frac{a}{s} : a \in P, s \in S\}$ z działaniami:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

jest pierścieniem. Nazywamy go **pierścieniem ułamków** pierścienia P względem zbioru multiplikatywnego S.

Twierdzenie

1. Zbiór $S^{-1}P = \{\frac{a}{s} : a \in P, s \in S\}$ z działaniami:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

   jest pierścieniem. Nazywamy go **pierścieniem ułamków** pierścienia P względem zbioru multiplikatywnego S.

2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia $S^{-1}P$.

Twierdzenie

1. Zbiór $S^{-1}P = \{\frac{a}{s} : a \in P, s \in S\}$ z działaniami:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

jest pierścieniem. Nazywamy go **pierścieniem ułamków** pierścienia P względem zbioru multiplikatywnego S.

2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia $S^{-1}P$.
3. Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow P'$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ dla $a \in P$, jest izomorfizmem pierścieni.

Twierdzenie

1. Zbiór $S^{-1}P = \{\frac{a}{s} : a \in P, s \in S\}$ z działaniami:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

   jest pierścieniem. Nazywamy go **pierścieniem ułamków** pierścienia P względem zbioru multiplikatywnego S.
2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia $S^{-1}P$.
3. Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow P'$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ dla $a \in P$, jest izomorfizmem pierścieni.
4. Jeśli ponadto $S = P \setminus \{0\}$, to $S^{-1}P$ jest ciałem. Nazywamy go **ciałem ułamków** pierścienia całkowitego P.

Twierdzenie

1. Zbiór $S^{-1}P = \{\frac{a}{s} : a \in P, s \in S\}$ z działaniami:
$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$
jest pierścieniem. Nazywamy go **pierścieniem ułamków** pierścienia P względem zbioru multiplikatywnego S.
2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia $S^{-1}P$.
3. Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow P'$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ dla $a \in P$, jest izomorfizmem pierścieni.
4. Jeśli ponadto $S = P \setminus \{0\}$, to $S^{-1}P$ jest ciałem. Nazywamy go **ciałem ułamków** pierścienia całkowitego P.

Twierdzenie

1. Zbiór $S^{-1}P = \{\frac{a}{s} : a \in P, s \in S\}$ z działaniami:
$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$
jest pierścieniem. Nazywamy go **pierścieniem ułamków** pierścienia P względem zbioru multiplikatywnego S.
2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia $S^{-1}P$.
3. Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow P'$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ dla $a \in P$, jest izomorfizmem pierścieni.
4. Jeśli ponadto $S = P \setminus \{0\}$, to $S^{-1}P$ jest ciałem. Nazywamy go **ciałem ułamków** pierścienia całkowitego P.

Zwróćmy uwagę, że działania są poprawnie określone. Gwarantuje to poprzedni lemat.

Twierdzenie

1. Zbiór $S^{-1}P = \{\frac{a}{s} : a \in P, s \in S\}$ z działaniami:
$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$
jest pierścieniem. Nazywamy go **pierścieniem ułamków** pierścienia P względem zbioru multiplikatywnego S.
2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia $S^{-1}P$.
3. Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow P'$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ dla $a \in P$, jest izomorfizmem pierścieni.
4. Jeśli ponadto $S = P \setminus \{0\}$, to $S^{-1}P$ jest ciałem. Nazywamy go **ciałem ułamków** pierścienia całkowitego P.

Dowód. ad 1. Sprawdzamy łączność dodawania. Mamy
$$\frac{a}{s} + \left(\frac{b}{t} + \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} + \frac{bu+ct}{tu} = \frac{atu+sbu+sct}{stu}$$

Twierdzenie

1. Zbiór $S^{-1}P = \{\frac{a}{s} : a \in P, s \in S\}$ z działaniami:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

jest pierścieniem. Nazywamy go **pierścieniem ułamków** pierścienia P względem zbioru multiplikatywnego S.

2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia $S^{-1}P$.
3. Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow P'$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ dla $a \in P$, jest izomorfizmem pierścieni.
4. Jeśli ponadto $S = P \setminus \{0\}$, to $S^{-1}P$ jest ciałem. Nazywamy go **ciałem ułamków** pierścienia całkowitego P.

Dowód. ad 1. Sprawdzamy łączność dodawania. Mamy

$$\frac{a}{s} + \left(\frac{b}{t} + \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} + \frac{bu+ct}{tu} = \frac{atu+sbu+sct}{stu}$$

$$\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right) + \frac{c}{u} = \frac{at+bs}{st} + \frac{c}{u} = \frac{atu+bsu+sct}{stu}.$$

Twierdzenie

1. Zbiór $S^{-1}P = \{\frac{a}{s} : a \in P, s \in S\}$ z działaniami:
$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$
jest pierścieniem. Nazywamy go **pierścieniem ułamków** pierścienia P względem zbioru multiplikatywnego S.
2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia $S^{-1}P$.
3. Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow P'$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ dla $a \in P$, jest izomorfizmem pierścieni.
4. Jeśli ponadto $S = P \setminus \{0\}$, to $S^{-1}P$ jest ciałem. Nazywamy go **ciałem ułamków** pierścienia całkowitego P.

Dowód. ad 1. Sprawdzamy łączność dodawania. Mamy
$$\frac{a}{s} + \left(\frac{b}{t} + \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} + \frac{bu+ct}{tu} = \frac{atu+sbu+sct}{stu}$$
$$\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right) + \frac{c}{u} = \frac{at+bs}{st} + \frac{c}{u} = \frac{atu+bsu+sct}{stu}.$$
Zatem dodawanie jest łączne.

Twierdzenie

1. Zbiór $S^{-1}P = \{\frac{a}{s} : a \in P, s \in S\}$ z działaniami:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

   jest pierścieniem. Nazywamy go **pierścieniem ułamków** pierścienia P względem zbioru multiplikatywnego S.
2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia $S^{-1}P$.
3. Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow P'$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ dla $a \in P$, jest izomorfizmem pierścieni.
4. Jeśli ponadto $S = P \setminus \{0\}$, to $S^{-1}P$ jest ciałem. Nazywamy go **ciałem ułamków** pierścienia całkowitego P.

Dowód. ad 1. Sprawdzamy łączność dodawania. Mamy

$$\frac{a}{s} + \left(\frac{b}{t} + \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} + \frac{bu+ct}{tu} = \frac{atu+sbu+sct}{stu}$$

$$\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right) + \frac{c}{u} = \frac{at+bs}{st} + \frac{c}{u} = \frac{atu+bsu+sct}{stu}.$$

Zatem dodawanie jest łączne.
Widać, że element $\frac{0}{1}$ jest elementem neutralnym dodawania,

Twierdzenie

1. Zbiór $S^{-1}P = \{\frac{a}{s} : a \in P, s \in S\}$ z działaniami:
$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$
jest pierścieniem. Nazywamy go **pierścieniem ułamków** pierścienia P względem zbioru multiplikatywnego S.
2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia $S^{-1}P$.
3. Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow P'$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ dla $a \in P$, jest izomorfizmem pierścieni.
4. Jeśli ponadto $S = P \setminus \{0\}$, to $S^{-1}P$ jest ciałem. Nazywamy go **ciałem ułamków** pierścienia całkowitego P.

Dowód. ad 1. Sprawdzamy łączność dodawania. Mamy
$$\frac{a}{s} + \left(\frac{b}{t} + \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} + \frac{bu+ct}{tu} = \frac{atu+sbu+sct}{stu}$$
$$\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right) + \frac{c}{u} = \frac{at+bs}{st} + \frac{c}{u} = \frac{atu+bsu+sct}{stu}.$$
Zatem dodawanie jest łączne.
Widać, że element $\frac{0}{1}$ jest elementem neutralnym dodawania, działanie dodawania jest przemienne

Twierdzenie

1. Zbiór $S^{-1}P = \{\frac{a}{s} : a \in P, s \in S\}$ z działaniami:
$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$
jest pierścieniem. Nazywamy go **pierścieniem ułamków** pierścienia P względem zbioru multiplikatywnego S.
2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia $S^{-1}P$.
3. Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow P'$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ dla $a \in P$, jest izomorfizmem pierścieni.
4. Jeśli ponadto $S = P \setminus \{0\}$, to $S^{-1}P$ jest ciałem. Nazywamy go **ciałem ułamków** pierścienia całkowitego P.

Dowód. ad 1. Sprawdzamy łączność dodawania. Mamy
$$\frac{a}{s} + \left(\frac{b}{t} + \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} + \frac{bu+ct}{tu} = \frac{atu+sbu+sct}{stu}$$
$$\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right) + \frac{c}{u} = \frac{at+bs}{st} + \frac{c}{u} = \frac{atu+bsu+sct}{stu}.$$
Zatem dodawanie jest łączne.
Widać, że element $\frac{0}{1}$ jest elementem neutralnym dodawania, działanie dodawania jest przemienne oraz $\frac{-a}{s}$ jest elementem przeciwnym do $\frac{a}{s}$.

Twierdzenie

1. Zbiór $S^{-1}P = \{\frac{a}{s} : a \in P, s \in S\}$ z działaniami:
$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$
jest pierścieniem. Nazywamy go **pierścieniem ułamków** pierścienia P względem zbioru multiplikatywnego S.
2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia $S^{-1}P$.
3. Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow P'$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ dla $a \in P$, jest izomorfizmem pierścieni.
4. Jeśli ponadto $S = P \setminus \{0\}$, to $S^{-1}P$ jest ciałem. Nazywamy go **ciałem ułamków** pierścienia całkowitego P.

Dowód. ad 1. Sprawdzamy łączność dodawania. Mamy
$$\frac{a}{s} + \left(\frac{b}{t} + \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} + \frac{bu+ct}{tu} = \frac{atu+sbu+sct}{stu}$$
$$\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right) + \frac{c}{u} = \frac{at+bs}{st} + \frac{c}{u} = \frac{atu+bsu+sct}{stu}.$$
Zatem dodawanie jest łączne.
Widać, że element $\frac{0}{1}$ jest elementem neutralnym dodawania, działanie dodawania jest przemienne oraz $\frac{-a}{s}$ jest elementem przeciwnym do $\frac{a}{s}$.

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia.

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\quad \dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{b}{t} = \dfrac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u} \right) =$$

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bc}{tu} =$$

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u} \right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bc}{tu} = \frac{abc}{stu} =$$

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u} \right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bc}{tu} = \frac{abc}{stu} = \frac{ab}{st} \cdot \frac{c}{u} =$$

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bc}{tu} = \frac{abc}{stu} = \frac{ab}{st} \cdot \frac{c}{u} = \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) \cdot \frac{c}{u}.$$

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bc}{tu} = \frac{abc}{stu} = \frac{ab}{st} \cdot \frac{c}{u} = \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) \cdot \frac{c}{u}.$$

Zatem mnożenie jest łączne.

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bc}{tu} = \frac{abc}{stu} = \frac{ab}{st} \cdot \frac{c}{u} = \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) \cdot \frac{c}{u}.$$

Zatem mnożenie jest łączne.
Widać, że element $\frac{1}{1}$ jest elementem neutralnym mnożenia,

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\quad \dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{b}{t} = \dfrac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bc}{tu} = \frac{abc}{stu} = \frac{ab}{st} \cdot \frac{c}{u} = \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) \cdot \frac{c}{u}.$$

Zatem mnożenie jest łączne.
Widać, że element $\frac{1}{1}$ jest elementem neutralnym mnożenia, działanie mnożenia jest przemienne.

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bc}{tu} = \frac{abc}{stu} = \frac{ab}{st} \cdot \frac{c}{u} = \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) \cdot \frac{c}{u}.$$

Zatem mnożenie jest łączne.
Widać, że element $\frac{1}{1}$ jest elementem neutralnym mnożenia, działanie mnożenia jest przemienne.
Rozdzielność mnożenia względem dodawania każdy sobie sprawdzi we własnym zakresie.

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bc}{tu} = \frac{abc}{stu} = \frac{ab}{st} \cdot \frac{c}{u} = \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) \cdot \frac{c}{u}.$$

Zatem mnożenie jest łączne.
Widać, że element $\frac{1}{1}$ jest elementem neutralnym mnożenia, działanie mnożenia jest przemienne.
Rozdzielność mnożenia względem dodawania każdy sobie sprawdzi we własnym zakresie.

ad 2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia P, gdyż

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bc}{tu} = \frac{abc}{stu} = \frac{ab}{st} \cdot \frac{c}{u} = \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) \cdot \frac{c}{u}.$$

Zatem mnożenie jest łączne.
Widać, że element $\frac{1}{1}$ jest elementem neutralnym mnożenia, działanie mnożenia jest przemienne.
Rozdzielność mnożenia względem dodawania każdy sobie sprawdzi we własnym zakresie.

ad 2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia P, gdyż

$$\frac{1}{1} \in P',$$

$$\text{Mnożenie w } S^{-1}P \text{ określone jest wzorem : } \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bc}{tu} = \frac{abc}{stu} = \frac{ab}{st} \cdot \frac{c}{u} = \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) \cdot \frac{c}{u}.$$

Zatem mnożenie jest łączne.
Widać, że element $\frac{1}{1}$ jest elementem neutralnym mnożenia, działanie mnożenia jest przemienne.
Rozdzielność mnożenia względem dodawania każdy sobie sprawdzi we własnym zakresie.

ad 2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia P, gdyż

$$\frac{1}{1} \in P', \quad \frac{a}{1} - \frac{b}{1} = \frac{a-b}{1} \in P',$$

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u} \right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bc}{tu} = \frac{abc}{stu} = \frac{ab}{st} \cdot \frac{c}{u} = \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \right) \cdot \frac{c}{u}.$$

Zatem mnożenie jest łączne.
Widać, że element $\frac{1}{1}$ jest elementem neutralnym mnożenia, działanie mnożenia jest przemienne.
Rozdzielność mnożenia względem dodawania każdy sobie sprawdzi we własnym zakresie.

ad 2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia P, gdyż

$$\frac{1}{1} \in P', \quad \frac{a}{1} - \frac{b}{1} = \frac{a-b}{1} \in P', \quad \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1} \in P'.$$

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bc}{tu} = \frac{abc}{stu} = \frac{ab}{st} \cdot \frac{c}{u} = \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) \cdot \frac{c}{u}.$$

Zatem mnożenie jest łączne.
Widać, że element $\frac{1}{1}$ jest elementem neutralnym mnożenia, działanie mnożenia jest przemienne.
Rozdzielność mnożenia względem dodawania każdy sobie sprawdzi we własnym zakresie.

ad 2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia P, gdyż

$$\frac{1}{1} \in P', \quad \frac{a}{1} - \frac{b}{1} = \frac{a-b}{1} \in P', \quad \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1} \in P'.$$

ad 3. Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow P'$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ dla $a \in P$, jest izomorfizmem pierścieni, gdyż jest wzajemnie jednoznaczne (*na tablicy*)

$$\text{Mnożenie w } S^{-1}P \text{ określone jest wzorem : } \quad \frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}=\frac{ab}{st}$$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s}\cdot\left(\frac{b}{t}\cdot\frac{c}{u}\right)=\frac{a}{s}\cdot\frac{bc}{tu}=\frac{abc}{stu}=\frac{ab}{st}\cdot\frac{c}{u}=\left(\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}\right)\cdot\frac{c}{u}.$$

Zatem mnożenie jest łączne.
Widać, że element $\frac{1}{1}$ jest elementem neutralnym mnożenia, działanie mnożenia jest przemienne.
Rozdzielność mnożenia względem dodawania każdy sobie sprawdzi we własnym zakresie.

ad 2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia P, gdyż

$$\frac{1}{1}\in P',\quad \frac{a}{1}-\frac{b}{1}=\frac{a-b}{1}\in P',\quad \frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1}=\frac{ab}{1}\in P'.$$

ad 3. Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow P'$, $\varphi(a)=\frac{a}{1}$ dla $a\in P$, jest izomorfizmem pierścieni, gdyż jest wzajemnie jednoznaczne (*na tablicy*) oraz

$$\varphi(a+b)=\frac{a+b}{1}=\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\varphi(a)+\varphi(b),$$

Mnożenie w $S^{-1}P$ określone jest wzorem : $\quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

Sprawdzamy łączność mnożenia. Mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \left(\frac{b}{t} \cdot \frac{c}{u}\right) = \frac{a}{s} \cdot \frac{bc}{tu} = \frac{abc}{stu} = \frac{ab}{st} \cdot \frac{c}{u} = \left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right) \cdot \frac{c}{u}.$$

Zatem mnożenie jest łączne.
Widać, że element $\frac{1}{1}$ jest elementem neutralnym mnożenia, działanie mnożenia jest przemienne.
Rozdzielność mnożenia względem dodawania każdy sobie sprawdzi we własnym zakresie.

ad 2. Podzbiór $P' = \{\frac{a}{1} : a \in P\}$ jest podpierścieniem pierścienia P, gdyż

$$\frac{1}{1} \in P', \quad \frac{a}{1} - \frac{b}{1} = \frac{a-b}{1} \in P', \quad \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1} \in P'.$$

ad 3. Odwzorowanie $\varphi : P \longrightarrow P'$, $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ dla $a \in P$, jest izomorfizmem pierścieni, gdyż jest wzajemnie jednoznaczne (*na tablicy*) oraz

$$\varphi(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(ab) = \frac{ab}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \varphi(a)\varphi(b).$$

ad 4. Jeśli $S = P \setminus \{0\}$ oraz $\frac{a}{s} \neq \frac{0}{1}$, to możemy rozważyć ułamek $\frac{s}{a}$

ad 4. Jeśli $S = P \setminus \{0\}$ oraz $\frac{a}{s} \neq \frac{0}{1}$, to możemy rozważyć ułamek $\frac{s}{a}$ i wtedy mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = \frac{as}{sa} = \frac{1}{1},$$

ad 4. Jeśli $S = P \setminus \{0\}$ oraz $\frac{a}{s} \neq \frac{0}{1}$, to możemy rozważyć ułamek $\frac{s}{a}$ i wtedy mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = \frac{as}{sa} = \frac{1}{1},$$

co oznacza, że $\frac{s}{a}$ jest elementem odwrotnym do $\frac{a}{s}$.

ad 4. Jeśli $S = P \setminus \{0\}$ oraz $\frac{a}{s} \neq \frac{0}{1}$, to możemy rozważyć ułamek $\frac{s}{a}$ i wtedy mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = \frac{as}{sa} = \frac{1}{1},$$

co oznacza, że $\frac{s}{a}$ jest elementem odwrotnym do $\frac{a}{s}$.

Zatem $S^{-1}P$ jest ciałem. ¶

ad 4. Jeśli $S = P \setminus \{0\}$ oraz $\frac{a}{s} \neq \frac{0}{1}$, to możemy rozważyć ułamek $\frac{s}{a}$ i wtedy mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = \frac{as}{sa} = \frac{1}{1},$$

co oznacza, że $\frac{s}{a}$ jest elementem odwrotnym do $\frac{a}{s}$.

Zatem $S^{-1}P$ jest ciałem. ¶

Przykłady

- Ciało liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest ciałem ułamków pierścienia liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

ad 4. Jeśli $S = P \setminus \{0\}$ oraz $\frac{a}{s} \neq \frac{0}{1}$, to możemy rozważyć ułamek $\frac{s}{a}$ i wtedy mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = \frac{as}{sa} = \frac{1}{1},$$

co oznacza, że $\frac{s}{a}$ jest elementem odwrotnym do $\frac{a}{s}$.

Zatem $S^{-1}P$ jest ciałem. ¶

Przykłady

- Ciało liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest ciałem ułamków pierścienia liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.
- Niech $p \in \mathbb{P}$. Wtedy $S = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} = \{s \in \mathbb{Z} : p \nmid s\}$ jest zbiorem multiplikatywnym oraz
$$S^{-1}P = \left\{ \frac{a}{s} \in \mathbb{Q} : a, s \in \mathbb{Z},\ p \nmid s \right\}.$$

ad 4. Jeśli $S = P \setminus \{0\}$ oraz $\frac{a}{s} \neq \frac{0}{1}$, to możemy rozważyć ułamek $\frac{s}{a}$ i wtedy mamy

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = \frac{as}{sa} = \frac{1}{1},$$

co oznacza, że $\frac{s}{a}$ jest elementem odwrotnym do $\frac{a}{s}$.

Zatem $S^{-1}P$ jest ciałem. ¶

Przykłady

- Ciało liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest ciałem ułamków pierścienia liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.
- Niech $p \in \mathbb{P}$. Wtedy $S = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} = \{s \in \mathbb{Z} : p \not| s\}$ jest zbiorem multiplikatywnym oraz
$$S^{-1}P = \left\{ \frac{a}{s} \in \mathbb{Q} : a, s \in \mathbb{Z},\ p \not| s \right\}.$$
- Za kilka wykładów poznamy jeszcze jeden ważny przykład ciała ułamków, tzw. ciało funkcji wymiernych. Proszę uzbroić się w cierpliwość.


Dosyć na dziś!!!

Zatem to koniec wykładu 4!

♡♡♡

Dziękuję za uwagę