Zadania z Algebry, cz. 3

Studia Doktoranckie Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego

1. Niech M będzie $A-$modułem. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne.
   (a) Istnieją podmoduły $M_1, \dots, M_n$ modułu M takie, że $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$.
   (b) Istnieją endomorfizmy $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ modułu M takie, że $\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = \mathbf{1}_M$, $\varphi_i \circ \varphi_j = 0$ dla $i \neq j$ oraz $\varphi_i \circ \varphi_i = \varphi_i$ dla $i, j = 1, \dots, n$.

2. Niech A będzie pierścieniem przemiennym i niech $a, b \in A$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne.
   (a) $A = aA \oplus bA$ (suma prosta $A-$modułów).
   (b) $ab = 0$ i istnieją $x, y \in A$ takie, że $ax + by = 1$.
   (c) $ab = 0$ oraz $a + b$ jest elementem odwracalnym pierścienia A.

3. Niech $J = (X, Y) = A \cdot X + A \cdot Y$ będzie ideałem w pierścieniu $A = K[X, Y]$ wielomianów dwóch zmiennych X, Y nad ciałem K. Udowodnić, że J nie jest wolnym podmodułem $A-$modułu wolnego A.

4. Niech $R = M_2(\mathbf{R})$ będzie pierścieniem macierzy 2×2 nad ciałem $\mathbf{R}$ liczb rzeczywistych i niech
$$I = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \in R : \ x, y \in \mathbf{R} \right\}.$$
   Sprawdzić, że
   (a) I jest ideałem lewostronnym pierścienia R.
   (b) I jest projektywnym $R-$modułem.
   (c) I nie jest wolnym $R-$modułem.

5. Niech P będzie $R-$modułem projektywnym. Udowodnić, że dla każdego niezerowego elementu $p \in P$ istnieje funkcjonał liniowy φ na P taki, że $\varphi(p) \neq 0$.

6. Udowodnić, że jeśli P jest podmodułem $R-$modułu wolnego, to dla każdego niezerowego elementu $p \in P$ istnieje funkcjonał liniowy $\alpha : P \to R$ taki, że $\alpha(p) \neq 0$.

7. Niech A będzie podpierścieniem ciała K różnym od K i niech K będzie ciałem ułamków pierścienia A. Traktując K jako $A-$moduł udowodnić, że
   (a) $\mathrm{Hom}_A(K, A) = 0$ (nie istnieją niezerowe funkcjonały liniowe na $A-$module K),
   (b) K nie jest projektywnym $A-$modułem.

8. Niech F będzie grupą abelową wolną z bazą $\{f_1, ..., f_n\}$ i niech
$$h_i = a_{ii} f_i + \cdots + a_{in} f_n, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad a_{ii} > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$
   Niech $H = \langle h_1, \dots, h_n \rangle$ będzie podgrupą grupy F generowaną przez elementy $h_1, \dots, h_n$. Udowodnić, że indeks $|F : H|$ podgrupy H w grupie F można obliczyć następująco:
$$|F : H| = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

9. Niech $\{f_1, \dots, f_n\}$ będzie bazą grupy abelowej wolnej F i niech $a_1, \dots, a_n$ będą liczbami naturalnymi. Udowodnić, że
$$F / \langle a_1 f_1, \dots, a_n f_n \rangle \cong \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}.$$

10. Niech G będzie grupą abelową generowaną przez elementy x, y oraz z spełniające relacje

$$\begin{aligned} 15x + 3y &= 0 \\ 3x + 7y + 4z &= 0 \ . \\ 18x + 14y + 8z &= 0 \end{aligned}$$

Przedstaw grupę G w postaci sumy prostej p-podgrup.

11. Niech I oraz J będą ideałami pierścienia przemiennego A.

    (a) Udowodnić, że jeśli $A-$moduły A/I oraz A/J są izomorficzne, to $I = J$.

    (b) Wskazać przykład pierścienia A i ideałów I, J takich, że *pierścienie* A/I oraz A/J są izomorficzne, ale $I \neq J$.

12. Udowodnić, że pierścień przemienny A jest pierścieniem całkowitym wtedy i tylko wtedy gdy ma następującą własność:
Dla każdego $A-$modułu M i dla każdego skończonego układu $m_1, \ldots, m_r \in M$, jeśli $m_1, \ldots, m_r$ są liniowo niezależne, to także $am_1, \ldots, am_r$ są liniowo niezależne dla każdego niezerowego $a \in A$.

13. Udowodnić, że jeśli nad pierścieniem przemiennym A każdy skończenie generowany $A-$moduł jest wolny, to A jest ciałem.

14. Niech A będzie pierścieniem noetherowskim i niech $\varphi : A \to A$ będzie homomorfizmem pierścieni. Udowodnić, że jeśli φ jest epimorfizmem, to φ jest izomorfizmem.

    Wskazówka. $\ker \varphi \subseteq \ker \varphi^2 \subseteq \cdots$.

15. Niech A będzie pierścieniem noetherowskim. Pokazać, że dla każdego ideału $\mathfrak{a}$ pierścienia A istnieje liczba naturalna m taka, że

$$(\mathrm{rad}\mathfrak{a})^m \subseteq \mathfrak{a}.$$

Wywnioskować stąd dwa następujące stwierdzenia:

    (a) W pierścieniu noetherowskim A nilradykał jest ideałem nilpotentnym, to znaczy, istnieje liczba naturalna m taka, że $(\mathrm{Nil}A)^m = (0)$.

    (b) Jeśli $\mathfrak{q}$ jest $\mathfrak{p}-$prymarnym ideałem w pierścieniu noetherowskim A, to istnieje taka liczba naturalna m, że $\mathfrak{p}^m \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.

16. Niech p będzie liczbą pierwszą i niech f będzie unormowanym wielomianem nierozkładalnym pierścienia $\mathbb{Z}[X]$ stopnia $n \geqslant 1$. Niech $\bar{f}$ oznacza wielomian pierścienia $\mathbb{Z}_p[X]$, który powstaje z f przez zastąpienie każdego współczynnika jego resztą modulo p.

    (a) Sprawdzić, że (p) i (f) są ideałami pierwszymi w $\mathbb{Z}[X]$ oraz dla każdej liczby naturalnej m ideały $(p)^m$ i $(f)^m$ są prymarne w $\mathbb{Z}[X]$.

    (b) Sprawdzić, że jeśli $\bar{f}$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}_p[X]$, to $\mathfrak{p} = (p) + (f) = (p, f)$ jest ideałem maksymalnym w $\mathbb{Z}[X]$ i wyznaczyć liczbę elementów ciała $\mathbb{Z}[X]/\mathfrak{p}$.

17. Udowodnić, że wielomian $f = X^4 + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Q}[X]$ ale $\bar{f}$ jest rozkładalny w $\mathbb{Z}_p[X]$ dla każdej liczby pierwszej p.

18. Pokazać, że w pierścieniu $\mathbf{Z}[X]$ ideał $\mathfrak{q} = (4, X)$ jest prymarny, ale nie jest potęgą ideału pierwszego.

19. Niech $A = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X] : a_1 \equiv 0 \pmod 3\}$.

    (a) Pokazać, że w pierścieniu A ideał $\mathfrak{p} = (3X, X^2, X^3)$ jest ideałem pierwszym.

    (b) Pokazać, że $\mathfrak{p}^2$ nie jest ideałem prymarnym.

Wskazówka. (b) Rozpatrzyć wielomian $9X^2$.

20. Niech $\mathfrak{q} = (2, X)^2 = (4, 2X, X^2)$ będzie ideałem w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$.

    (a) Sprawdzić, że $\mathfrak{q}$ jest ideałem prymarnym.

    (b) Sprawdzić, że $\mathfrak{q} = (4, X) \cap (2, X^2)$.

    Ideał $\mathfrak{q}$ jest więc ideałem prymarnym w pierścieniu noetherowskim, ale nie jest nieprzywiedlny.

21. Niech A będzie pierścieniem całkowitym i niech S będzie podzbiorem multiplikatywnym w A. Udowodnić następujące stwierdzenia.

    (a) Jeśli $\mathfrak{A}$ jest ideałem pierścienia ułamków $S^{-1}A$ oraz $\mathfrak{a} = \mathfrak{A} \cap A$, to $\mathfrak{a}$ jest ideałem w A oraz $\mathfrak{A} = S^{-1}\mathfrak{a}$.

    (b) Jeśli A jest pierścieniem noetherowskim, to $S^{-1}A$ jest także pierścieniem noetherowskim.

22. Niech A będzie pierścieniem całkowitym i niech S będzie podzbiorem multiplikatywnym w A. Udowodnić następujące stwierdzenia.

    (a) Jeśli $\mathfrak{A}$ jest ideałem pierwszym pierścienia $S^{-1}A$ oraz $\mathfrak{a} = \mathfrak{A} \cap A$, to $\mathfrak{a}$ jest ideałem pierwszym w A oraz $\mathfrak{a} \subseteq A \setminus S$.

    (b) Jeśli $\mathfrak{A}$ jest ideałem pierścienia $S^{-1}A$ oraz $\mathfrak{a} = \mathfrak{A} \cap A$ jest ideałem pierwszym w A takim, że $\mathfrak{a} \subseteq A \setminus S$, to $\mathfrak{A}$ jest ideałem pierwszym w $S^{-1}A$.

    (c) Jeśli w pierścieniu A każdy niezerowy ideał pierwszy jest maksymalny, to także w pierścieniu $S^{-1}A$ każdy niezerowy ideał pierwszy jest maksymalny.