Zadania z Algebry, cz. 2

Studia Doktoranckie Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego

1. Niech $f \in \mathbb{Q}[X]$. Udowodnić, że jeśli $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, to f jest wielomianem liniowym: $f = aX + b$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$.

2. Niech A będzie pierścieniem przemiennym oraz niech $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in A[X]$. Pokazać, że:

   (a) $f \in U(A[X]) \iff a_0 \in U(A)$, $a_1, ...a_n$ są nilpotentami w A.
   Wsk. Jeśli $b_0 + b_1X + ... + b_mX^m$ jest elementem odwrotnym do f, to indukcyjnie po r pokazać, że $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$. Wywnioskować stąd, że a_n jest elementem nilpotentnym.

   (b) f jest elementem nilpotentnym w $A[X] \iff a_0, ..., a_n$ są elementemi nilpotentnymi w A.

   (c) jest dzielnikiem zera w $A[X] \iff$ istnieje niezerowy element $a \in A$ taki, że $af = 0$.

3. Radykałem Jacobsona pierścienia nazywamy część wspólną wszystkich ideałów maksymalnych tego pierścienia. Pokazać, że w pierścieniu $A[X]$, A pierścień przemienny, radykał Jacobsona pokrywa się z nilradykałem.

4. Niech A będzie pierścieniem przemiennym oraz niech $A[[X]]$ będzie pierścieniem szeregów formalnych o współczynnikach z A. Niech $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nX^n$. Pokazać, że:

   (a) $f \in U(A[[X]]) \iff a_0 \in U(A)$.

   (b) Jeśli f jest elementem nilpotentnym w $A[[X]]$, to a_n jest elementem nilpotentnym w A dla każdego $n \geqslant 0$. Pokazać, że jeśli A jest pierścieniem noetherowskim, to implikacja przeciwna jest prawdziwa.

   (c) f należy do radykału Jacobsona pierścienia $A[[X]] \iff a_0$ należy do radykału Jacobsona pierścienia A.

   (d) Zwężenie $\mathfrak{m}^c$ ideału maksymalnego $\mathfrak{m}$ pierścienia $A[[X]]$ jest ideałem maksymalnym pierścienia A i $\mathfrak{m}$ jest generowany przez $\mathfrak{m}^c$ oraz X.

   (e) Dowolny ideał pierwszy pierścienia A jest zwężeniem ideału pierwszego pierścienia $A[[X]]$.

5. Jeżeli dowolny ideał pierścienia przemiennego A, który nie zawiera się w nilradykale zawiera element idempotentny, to nilradykał tego pierścienia pokrywa się z radykałem Jacobsona.

6. Niech $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ będą parami różne. Pokazać, że wielomiany $f = (X - a_1)...(X - a_n) - 1$ oraz $g = (X - a_1)^2...(X - a_n)^2 + 1$ są nierozkładalne nad ciałem $\mathbb{Q}$.

7. Pokazać, że jeżeli wielomian $X^n + aX + p \in \mathbb{Z}[X]$, p-liczba pierwsza, jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[X]$, to $1 + |a| \geqslant p$.

8. Pokazać, że dla dowolnych liczb naturalnych m oraz n, $m \equiv n \pmod 2$, $n \geqslant m$, istnieje wielomian nierozkładalny $f \in \mathbb{Q}[X]$ stopnia n, który posiada dokładnie m pierwiastków rzeczywistych.

9. Niech $0 \neq f \in \mathbb{Q}[X]$. Wykaż, że istnieje $g \in \mathbb{Q}[X]$ taki, że $fg = a_2X^2 + a_3X^3 + a_5X^5 + ... + a_pX^p \neq 0$ jest wielomianem, w którym zmienna X występuje tylko z wykładnikiem będącym liczbą pierwszą.

10. Niech a będzie elementem ciała K oraz niech p będzie liczbą pierwszą. Pokazać, że wielomian $X^p - a$ albo ma pierwiastek w K albo jest nad K nierozkładalny.

11. Niech $f \in \mathbb{Z}[X]$. Skończony ciąg różnych liczb całkowitych $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ nazywamy f-cyklem o długości k, jeśli $\quad f(x_0) = x_1, \quad f(x_1) = x_2, \quad \ldots, \quad f(x_{k-1}) = x_0$.

    (a) Wskazać wielomiany f i g takie, że f ma cykl długości 1 i g ma cykl długości 2.

    (b) Udowodnić, że wielomian $f \in \mathbb{Z}[X]$ nie może mieć cyklu o długości $\geqslant 3$.

12. Niech $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ i niech f będzie wielomianem unormowanym (najwyższy współczynnik równy 1). Udowodnić, że jeśli $f(n)$ dzieli $g(n)$ dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n, to f dzieli g w $\mathbb{Z}[X]$.

13. Znaleźć wszystkie ideały maksymalne pierścienia funkcji rzeczywistych ciągłych na odcinku $[0, 1]$.

14. Znaleźć wszystkie ideały maksymalne pierścienia $\mathbb{Z}[X]$.

15. Niech A będzie pierścieniem przemiennym i niech $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ będą ideałami w A.

    (a) Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = A$, to $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = A$.

    (b) Dla $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$ i $\mathfrak{a} = (2, 1 + \sqrt{-5})$ znaleźć ideał $\mathfrak{b}$ w A taki, że $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ jest ideałem głównym.

    (c) Dla $A = \mathbb{Z}[fi]$, gdzie $f > 1$ jest liczbą naturalną oraz $i^2 = -1$, i dla $\mathfrak{a} = f\mathbb{Z}[i]$, sprawdzić, że $\mathfrak{a}$ jest ideałem w A i nie istnieje niezerowy ideał $\mathfrak{b}$ w A taki, że $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ jest ideałem głównym.

16. Niech K będzie ciałem i niech $A = K[X]/(X^m)$. Udowodnić, że A jest pierścieniem lokalnym i jego jedyny ideał maksymalny jest ideałem głównym.

17. Udowodnić, że pierścień przemienny A jest pierścieniem lokalnym wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnych $a, b \in A$ z tego, że $a + b = 1$ wynika, że a jest elementem odwracalnym lub b jest elementem odwracalnym.

18. Pokazać, że pierścień przemienny ze skończoną liczbą elementów jest produktem kartezjańskim pierścieni lokalnych.

19. Pokazać, że liczba elementów skończonego pierścienia lokalnego jest potęgą liczby pierwszej.

20. Niech A będzie pierścieniem przemiennym, który ma tylko skończoną liczbę n dzielników zera $\neq 0$. Udowodnić, że A jest pierścieniem skończonym i ma co najwyżej $(n+1)^2$ elementów.

    Wskazówka. Niech $0 \neq a \in A$ będzie dzielnikiem zera i niech J będzie anihilatorem elementu a. Udowodnić, że $|J| \leqslant n + 1$ oraz $|A/J| \leqslant n + 1$.

21. Niech R będzie pierścieniem (niekoniecznie przemiennym), w którym każda podgrupa addytywnej grupy pierścienia jest ideałem pierścienia R. Udowodnić, że pierścień R jest izomorficzny bądź z pierścieniem liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ bądź z pewnym pierścieniem reszt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

22. Niech S będzie podzbiorem multiplikatywnym pierścienia przemiennego A.

    (a) Udowodnić, że w zbiorze ideałów pierścienia A rozłącznych z S istnieje element maksymalny $\mathfrak{p}$.

    (b) Udowodnić, że $\mathfrak{p}$ jest ideałem pierwszym.

23. Niech A będzie pierścieniem przemiennym i niech Σ będzie zbiorem wszystkich podzbiorów multiplikatywnych $S \subset A$.

    (a) Zauważyć, że Σ jest zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację inkluzji. Udowodnić, że w Σ istnieje element maksymalny.

    (b) Udowodnić, że zbiór $S \in \Sigma$ jest elementem maksymalnym w Σ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \setminus S$ jest minimalnym ideałem pierwszym pierścienia A.