**Zadania z Algebry, cz. 1**

Studia Doktoranckie Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego [1]

1. Dowieść, że istnieją tylko dwie nieizomorficzne grupy nieabelowe rzędu 8.

2. Jeśli dla każdych elementów $a, b$ skończonej grupy $G$ różnych od elementu neutralnego istnieje automorfizm $\sigma$ grupy $G$ taki, że $\sigma(a) = b$, to grupa $G$ jest abelowa.

3. Niech $G$ będzie grupą skończoną. Niech $X = \{(g, h) \in G \times G;\ gh = hg\}$. Pokazać, że $|X| = c|G|$, gdzie $c$ jest liczbą klas sprzężoności grupy $G$.

4. Niech $G$ będzie grupą skończoną i niech $p$ będzie najmniejszą liczbą pierwszą dzielącą rząd grupy $G$. Dowieść, że każda podgrupa $H$ grupy $G$, której indeks $|G : H|$ jest równy $p$, jest podgrupą normalną grupy $G$.

5. Udowodnić lemat Burnside'a: Jeśli grupa $G$ i zbiór $X$ są skończone i $G$ działa na $X$, to liczba orbit $n(G, X)$ tego działania jest równa średniej liczebności zbioru elementów stałych

$$n(G, X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{fix}(g)|$$

   *Wsk.* Rozwazyć macierz $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku i obliczyć ilość jedynek w tej macierzy na dwa sposoby, raz licząc po wierszach a drugi raz po kolumnach.

6. Dla ciał kwadratowych $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2}\,)$ oraz $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-7}\,)$ udowodnić, że

   (a) Addytywne grupy ciał $K$ i $F$ są izomorficzne.

   (b) Multyplikatywne grupy ciał $K$ i $F$ są izomorficzne.

   (c) Ciała $K$ i $F$ nie są izomorficzne.

   *Wsk (b).* Ciało $K$ jest ciałem ułamków pierścienia $P = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, a ciało $F$ jest ciałem ułamków pierścienia $R = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]$. Pierścienie $P$ oraz $R$ są pierścieniami z jednoznacznym rozkładem i mają identyczne grupy elementów odwracalnych.

7. Pokazać, że grupa $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nie posiada właściwych podgrup o skończonym indeksie.

8. Dowieść, że każda skończona grupa abelowa, która nie jest grupą cykliczną, zawiera podgrupę $H$, która jest sumą prostą dwóch grup cyklicznych rzędu $p$, gdzie $p$ jest pewną liczbą pierwszą.

9. Niech $G$ będzie grupą rzędu 168. Udowodnić, że grupy $G$ nie można zanurzyć w grupę symetryczną $S_6$. Pokazać, że jeśli grupa $G$ jest prosta, to ma 8 podgrup rzędu 7 i można ją zanurzyć w grupę $S_8$.

10. Pokazać, że grupa zawierająca 45 elementów jest grupą abelową.

11. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ będą takie, że podgrupa addytywnej grupy ciała $\mathbb{R}$ generowana przez $\alpha$ oraz $\beta$ jest podzbiorem domkniętym $\mathbb{R}$. Wykazać, że istnieją $x, y \in \mathbb{Q}$, $x^2 + y^2 > 0$, takie, że $x\alpha + y\beta = 0$.

12. Niech $G < S(n)$. Pokazać, że jeżeli dwa elementy grupy $G$ są sprzężone, to mają tego samego typu rozkłady na cykle rozłączne, tzn. w ich rozkładach jest tyle samo cykli tej samej długości. Uzasadnić, że jeżeli $G = S(n)$, to ten warunek jest warunkiem WKW.

13. Na szachownicy o $n \times n$ polach należy umieścić $n$ wież w taki sposób, by się wzajemnie nie szachowały. Na ile istotnie różnych sposobów jest to możliwe? Przy tym dwa rozmieszenia uważamy za równe, jeżeli z jednego można otrzymać drugie za pomocą pewnego obrotu szachownicy.

[1] Część zadań pochodzi ze „Zbioru zadań z teorii grup" K. Szymiczka, PWN Warszawa, 1989. Niektóre zadania zaopatrzone są w wskazówki i rozwiązania.

14. Niech $F$ będzie grupą wolną o bazie $X$ oraz niech $f : F \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ będzie homomorfizmem takim, że $f(x) = 1$ dla każdego $x \in X$. Pokazać, że $\ker f$ jest grupą wolną i jeśli $F$ ma rangę $m < \infty$, to ranga $\ker f = 2m-1$.

15. Niech $F$ będzie podgrupą grupy $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ generowaną przez macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $m$ jest ustaloną liczbą naturalną $\geqslant 2$. Pokazać, że $F$ jest grupą wolną i $\{A, B\}$ jest jej bazą. *Wsk.* Zastosuj the ping-pong lemma.

16. Pokazać, że grupa wolna rangi 2 zawiera podgrupę, która jest grupą wolną dowolnej rangi $\leqslant \aleph_0$.

17. Pokazać, że z dokładnością do izomorfizmu istnieja dokładnie dwie grupy rzędu $pq$, gdzie $q, p$-liczby pierwsze, $q < p$ oraz $p \equiv 1 \mod q$. Znaleźć ich kody genetyczne.

18. Znajdź kod genetyczny grupy $S_4$ oraz grupy $A_4$.

19. Pokazać, że grupa o kodzie genetycznym $\mathrm{gr}(\{x_1, x_2, ...\} \,||\, x_1 = x_2^2, x_2 = x_3^3, ...)$ jest izomorficzna z addytywną grupą ciała liczb wymiernych.

20. Pokaż, że grupa o kodzie genetycznym $\mathrm{gr}(\{x, y\} \,||\, x^3 = y^2 = 1)$ jest grupą nieskończoną.

21. Pokazać, że grupa o kodzie genetycznym $\mathrm{gr}(\{x_1, ..., x_n\} \,||\, x^3 = 1$ dla każdego $x \in F(x_1, ..., x_n))$ jest grupą skończoną dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

22. Dla elementu $a$ grupy $G$ zbiór $N_G(a) = \{b \in G; ab = ba\}$ nazywamy centralizatorem elementu $a$. Pokazać, że

    (a) $N_G(a) < G$,
    (b) $Z(G) = \bigcap\limits_{a \in G} N_G(a)$,
    (c) Jeśli $[a]_\sim$ oznacza klasę sprzężoności elementu $a$, to $|[a]_\sim| = [G : N_G(a)]$ oraz $|[a]_\sim|$ dzieli $|G|$.

23. Znajdź wszystkie reprezentacje nieprzywielne grupy kwaternionów Quat i sporządź tablicę charakterów tej grupy.

24. Znajdź wszystkie reprezentacje nieprzywielne grupy $S(4))$ i sporządź tablicę charakterów tej grupy.

25. Polecenie jak wyżej dla grupy $A(4)$ oraz $D(4)$.

26. Pokazać, że dowolna rzeczywista reprezentacja nieprzywiedlna grupy cyklicznej $n$-elementowej ma stopień $\leqslant 2$. Wyznacz wszystkie rzeczywiste nieprzywiedlne reprezentacje tej grupy.

27. Rozłożyć funkcję centralną grupy Quat zdefiniowaną następująco $(I, -I, i, -i, j, -j, k, -k) \longmapsto (5, -3, 0, 0, -1, -1, a, a)$ względem bazy charakterów nieprzywiedlnych. Dla jakiego $a$ jest ona charakterem jakiejś reprezentacji tej grupy?

28. Pokazać, że jeśli $G$ jest grupą $p^k$ elementową, $p$-liczba pierwsza, oraz $n$ jest stopniem reprezentacji nieprzywiedlnej grupy $G$, to $n^2 \leqslant p^{k-1}$.

29. Niech $G$ będzie grupą nieabelową rzędu $p^3$, gdzie $p$ jest liczbą pierwszą. Pokazać, że:

    (a) Centrum $Z(G)$ grupy $G$ jest rzędu $p$.
    (b) Komutant $[G, G]$ grupy $G$ jest rzędu $p$.
    (c) Grupa $G$ posiada $p^2$ reprezentacji stopnia 1 oraz $p - 1$ nierównoważnych nieprzywiedlnych reprezentacji stopnia $p$.

    *Uwaga.* W rozwiązaniach ostatnich dwóch zadań trzeba wykorzystać fakt, że stopień reprezentacji nieprzywiedlnej skończonej grupy dzieli rząd tej grupy.