Elementy teorii reprezentacji liniowych grup skończonych

Andrzej Sładek
sladek@ux2.math.us.edu.pl

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \overline{g}(x) = gx = x^g$.
Odwzorowanie $\overline{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\overline{\phi} : g \longmapsto \overline{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gxg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gA$ - przesunięcie lewostronne zbioru A.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := Ag^{-1}$ - przesunięcie prawostronne zbioru A.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gAg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = \mathcal{G}(G)$, $\phi(g, H) := gHg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $G = GL(n, K)$, $X = K^n$, $\phi(A, v) := Av$ - działanie za pomocą przekształceń liniowych.

Definicja

Niech grupa G działa na zbiorze X.
Orbitą elementu $x \in X$ nazywamy

$$\operatorname{orb}(x) := \{y \in X : \underset{g \in G}{\exists} y = gx\} = \{gx \in X : g \in G\}.$$

Stabilizatorem elementu $x \in X$ nazywamy

$$\operatorname{stab}(x) = \{g \in G : \ gx = x\}.$$

Zbiór

$$\operatorname{fix}(g) = \{x \in X : \ gx = x\}$$

nazywamy **zbiorem elementów stałych** elementu $g \in G$.

Spójrzmy na poprzednie przykłady i dla kilku z nich wyznaczmy powyższe zbiory.

Własności

- $x \in \mathrm{orb}(x)$;
- $y \in \mathrm{orb}(x) \iff \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$;
- $\mathrm{orb}(x) \cap \mathrm{orb}(y) \neq \emptyset \implies \mathrm{orb}(x) = \mathrm{orb}(y)$.

Twierdzenie

1. $\mathrm{stab}(x) < G$,
2. $|\mathrm{orb}(x)| = |G : \mathrm{stab}(x)|$,
3. $|G| = |\mathrm{orb}(x)||\mathrm{stab}(x)|$,
4. $y = gx \implies \mathrm{stab}(y) = g\mathrm{stab}(x)g^{-1}$,
5. $y \in \mathrm{orb}(x) \implies |\mathrm{stab}(y)| = |\mathrm{stab}(x)|$.

Stwierdzenie

Niech $\mathcal{R} = \{x_i : i \in I\}$ będzie zbiorem reprezentantów orbit. Wtedy

$$| X | = \sum_{i \in I} | \operatorname{orb}(x_i) | = \sum_{i \in I} |G : \operatorname{stab}(x_i)|.$$

Dowód na tablicy.

Wniosek

- Jeśli $|G| = p^n$, $|X| = p^m$, $m, n \geqslant 1$ p- liczba pierwsza, to liczba orbit jednoelementowych jest podzielna przez p.
- Jeśli $|G| = p^n, n \geqslant 1$, to centrum

$$Z(G) = \{g \in G : \underset{h \in G}{\forall} gh = hg\}$$

grupy G jest nietrywialne.

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X, to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G,X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{fix}(g)|.$$

Dowód.

Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.
Liczba jedynek w g-tym wierszu $= |\{x \in X : gx = x\}| = |\mathrm{fix}(g)|$
Liczba jedynek w x-tej kolumnie $= |\{g \in G : gx = x\}| = |\mathrm{stab}(x)|$
Jeśli N - liczba jedynek w całej macierzy, a $\mathcal{R}$ - zbiór reprezentantów orbit, to $|\mathcal{R}| = n(G,X)$.
Wtedy z jednej strony

$$N = \sum_{g \in G} |\mathrm{fix}(g)|,$$

a z drugiej

$$N = \sum_{x \in X} |\mathrm{stab}(x)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} \sum_{y \in \mathrm{orb}(x)} |\mathrm{stab}(y)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} |\mathrm{orb}(x)||\mathrm{stab}(x)| = |\mathcal{R}||G| = n(G,X)|G|.$$

Stąd teza. ¶

Na początku dwie ważne informacje:

- Zbiór $\mathrm{Aut}(V)$ automorfizmów przestrzeni liniowej V (nad dowolnym ciałem K) z działaniem składania odwzorowań jest grupą.

- Jeżeli $\dim_K V = n < \infty$, to grupa $\mathrm{Aut}(V)$ jest izomorficzna z ogólną grupą liniową $\mathrm{GL}(n, K)$.
  Przyporządkowanie automorfizmowi jego macierzy (w dowolnie ustalonej) bazie jest izomorfizmem pomiędzy tymi grupami.

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$.
Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s.
Stopniem reprezentacji będziemy nazywać wymiar przestrzeni V.
Reprezentację ρ nazywamy **wierną**, jeśli ρ jest monomorfizmem.
Uwzględniając informację z poprzedniego slajdu w przypadku, gdy $\dim_K V = n < \infty$, reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ możemy traktować jako homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(n, K)$.

Uwaga
Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją, to

- $\rho_1 = \mathrm{id}_V$,
- $\rho_{s^{-1}} = \rho_s^{-1}$ dla $s \in G$,
- $\rho_{st} = \rho_s \circ \rho_t$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \mathrm{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X, to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujmy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X. Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n),\ X = \{1, \dots, n\},\ \sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n),\ k \in \{1, \dots, n\}$.
  Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G. Taka reprezentacja okaże się bardzo ważną. Nazywamy ją **reprezentacją regularną** grupy G.
- $G = \mathrm{GL}(n, K),\ V = \mathrm{M}(n, K),\ \rho_A(X) = AX$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K),\ X \in \mathrm{M}(n, K)$.
- $G = \mathrm{GL}(n, K),\ V = \mathrm{M}(n, K),\ \rho_A(X) = AXA^{-1}$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K),\ X \in \mathrm{M}(n, K)$.
- Niech $G = (a)$ będzie grupą cykliczną rzędu m oraz niech $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ będzie macierzą taką, że $A^m = I_n$. Wtedy

$$\rho^A : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(K^n),\ \rho^A_{a^k}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = A^k \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

jest reprezentacją.

Definicja

Reprezentacje $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ oraz $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V')$ grupy G nazywamy **równoważnymi**, jeśli istnieje izomorfizm $\tau : V \longrightarrow V'$ taki, że

$$\underset{s \in G}{\forall} \; \tau \circ \rho_s = \rho'_s \circ \tau.$$

Uwaga

Jeśli wartości reprezentacji traktujemy macierzowo, tzn. $\rho_s = A_s, \; \rho'_s = A'_s$, to warunek równoważności tych reprezentacji przyjmuje następującą postać:

$$\underset{C \in \mathrm{GL}(n,K)}{\exists} \; \underset{s \in G}{\forall} \; CA_s = A_s C.$$

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G. Podprzestrzeń U przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią G-**niezmienniczą**, jeśli $\underset{s \in G}{\forall}\ \rho_s(U) \subseteq U$.

Przykłady

- Podprzestrzeń zerowa oraz cała przestrzeń są podprzestrzeniami G-niezmienniczymi.
- W reprezentacji regularnej podprzestrzeń $W = \mathrm{lin}\left(\sum_{g \in G} e_g\right)$ jest G-niezmiennicza.
- W przykładzie reprezentacji $G = \mathrm{GL}(n, K),\ V = \mathrm{M}(n, K),\ \rho_A(X) = AX$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K),\ X \in \mathrm{M}(n, K)$, zbiór macierzy z zerową ustaloną kolumną jest podprzestrzenią G-niezmienniczą.
- W przykładzie reprezentacji $G = \mathrm{GL}(n, K),\ V = \mathrm{M}(n, K),\ \rho_A(X) = AXA^{-1}$ dla $A \in \mathrm{GL}(n, K),\ X \in \mathrm{M}(n, K)$, zbiór macierzy skalarnych (jak i zbiór macierzy z zerowym śladem) jest podprzestrzenią G-niezmienniczą.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G-niezmienniczymi przestrzeni V.

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G-niezmienniczą przestrzeni V. Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|U$ jest automorfizmem przestrzeni U i $\rho^U : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U)$ jest również reprezentacją grupy G. Nazywamy ją **podreprezentacją** reprezentacji ρ.

Niech $V = U_1 \oplus ... \oplus U_k$ oraz niech $\rho^{U_i} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U_i)$, $i = 1, ..., k$, będą reprezentacjami grupy G. Wtedy $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$

$$\rho_s(\alpha_1 + ... + \alpha_k) = \rho_s^{U_1}(\alpha_1) + ... + \rho_s^{U_k}(\alpha_k);\ s \in G,\ \alpha_i \in U_i,\ i = 1, ..., k,$$

jest reprezentacją grupy G w przestrzeni liniowej V, a ρ^{U_i} są jej podreprezentacjami. Reprezentację ρ nazywamy **sumą prostą podreprezentacji** ρ_i i oznaczamy

$$\rho = \rho^{U_1} \oplus ... \oplus \rho^{U_k}.$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G, to dla każdej podprzestrzeni G-niezmieniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G-niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W'. Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.
Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.
Ponieważ

$$\rho_s \circ \pi^0 \circ \rho_s^{-1} = \rho_s \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1} \right) \circ \rho_s^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_{st} \circ \pi \circ \rho_{st}^{-1} = \pi^0,$$

więc $\rho_s \circ \pi^0 = \pi^0 \circ \rho_s$ dla $s \in G$.
Jeśli teraz $\alpha \in W^0$, to $\pi^0(\alpha) = \theta$ oraz $(\pi^0 \circ \rho_s)(\alpha) = (\rho_s \circ \pi^0)(\alpha) = \theta$, czyli $\rho_s(\alpha) \in W^0$.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ nazywamy **rozkładalną**, jeśli V jest sumą prostą dwóch niezerowych podprzestrzeni G-niezmienniczych.
Reprezentację nazywamy **całkowicie przywiedlną**, jeśli jest sumą prostą swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji.

Wniosek

Każda reprezentacja liniowa skończonej grupy nad ciałem, którego charakterystyka nie dzieli rzędu grupy, jest całkowicie przywiedlna tzn. jest sumą prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych.

Uwagi

- Jeżeli reprezentacja jest sumą prostą nieprzywiedlnych podreprezentacji, to odpowiadające im podprzestrzenie G-niezmiennicze nie są wyznaczone jednoznacznie (ale podreprezentacje są wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do równoważności).
- Założenia w twierdzeniu Maschkego są istotne. Odpowiednie przykłady zobaczyny w zestawach zadań.
- Jeżeli reprezentacja jest sumą prostą nieprzywiedlnych podreprezentacji, to w przypadku interpretacji macierzowej tej reprezentacji, macierze będące wartościami tej reprezentacji są klatkowe, a klatki odpowiadają odpowiednim podreprezentacjom.

Przykłady

- Reprezentacja grupy $\mathrm{GL}(n, K)$ w $M_n(K)$, $\rho_A(X) = AX$, jest sumą prostą n swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji $\rho^i : \mathrm{GL}(n, K) \longrightarrow \mathrm{Aut}(U_i)$, gdzie U_i jest podprzestrzenią przestrzeni $M_n(K)$ złożoną z macierzy, których wszystkie kolumny prócz i-tej są zerowe.
- Reprezentacja grupy $\mathrm{GL}(n, K)$ w $M_n(K)$, $\rho_A(X) = AXA^{-1}$, jest sumą prostą podreprezentacji stopnia 1 oraz podreprezentacji stopnia $n^2 - 1$, gdy $\mathrm{char}(K) \not| n$.
- Reprezentacja regularna skończonej grupy G jest sumą prostą reprezenracji stopnia 1 oraz reprezentacji stopnia $|G| - 1$, gdy $\mathrm{char}(K) \not| n$.

Ogólne założenie: $|G| < \infty, \ K = \mathbb{C}$.

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie zespoloną reprezentacją skończonej grupy G.
Charakterem reprezentacji ρ nazywamy funkcję $\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}, \ \chi_\rho(s) := \mathrm{tr}(\rho_s)$.

Uwaga

Jeśli $r(s) = k$, to $\chi_\rho(s)$ jest sumą k-tego stopnia pierwiastków z 1 w ilości $\dim V$.

Twierdzenie

Jeśli χ jest charakterem reprezentacji stopnia n, to

1. $\chi(1) = n$,
2. $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$,
3. $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$

Uwaga

Reprezentacje równoważne mają te same charaktery.

Twierdzenie

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ jest sumą reprezentacji $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(U_i), \ i = 1, 2$, to charakter reprezentacji ρ jest sumą charakterów reprezentacji ρ^1 oraz ρ^2.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \qquad \underset{s \in G}{\forall} \quad \rho^2_s \circ f = f \circ \rho^1_s .$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią $G-$niezmienniczą reprezentacji ρ^1. Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho^1_s(\alpha)) = \rho^2_s(f(\alpha)) = \rho^2_s(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho^1_s(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$.
Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \mathrm{im} f$ równa jest V_2.
Zatem f jest izomorfizmem i reprezentacje sa równoważne.
Załóżmy, że $V = V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$. Rozważmy odwzorowanie $f' := f - \lambda \mathrm{id}_V$, gdzie λ jest wartością własną odwzorowania f. Zauważmy, że f' spełnia warunek (*) i ma nietrywialne jądro, więc $f' = 0$, tzn. $f = \lambda \mathrm{id}_V$. ♣

Wniosek

Niech $\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi skończonej grupy G rzędu g oraz niech $h : V_1 \longrightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho^2_s)^{-1} \circ h \circ \rho^1_s = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho^2_{s^{-1}}) \circ h \circ \rho^1_s.$$

Wtedy

1. Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $h^0 = 0$.
2. Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to h^0 jest homotetią o współczynniku $\frac{1}{n}\mathrm{tr}(h)$, gdzie $n = \dim V_1$.

Dowód. Na tablicy sprawdzić warunek (*) dla h^0 i zauważyć, że $\mathrm{tr}(h^0) = \mathrm{tr}(h)$. ♣

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ^1_t, ρ^2_t, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s))$, $(b_{ij}(s))$, (c_{jk}). Wtedy macierzą h^0 jest (c^0_{il}), gdzie

$$c^0_{il} = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\sum_{j,k} b_{ij}(s^{-1})c_{jk}a_{kl}(s) = \sum_{j,k}\left(\frac{1}{g}\sum_{s\in G} b_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s)\right)c_{jk}.$$

Wyrażenie po prawej stronie jest formą liniową względem c_{jk} i ponieważ w przypadku (1) znika dla dowolnych wartości dla każdego układu c_{jk}, więc mamy

$$\underset{i,j,k,l}{\forall}\quad \frac{1}{g}\sum_{s\in G} b_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s) = 0.$$

W przypadku (2) macierze $(a_{kl}(s))$, $(b_{ij}(s))$ są równe oraz $c^0_{il} = \frac{1}{n}\delta_{il}\sum_{j,k}\delta_{jk}c_{jk}$, więc

$$\sum_{j,k}\frac{1}{n}\delta_{il}\,\delta_{jk}c_{jk} = \sum_{j,k}\left(\frac{1}{g}\sum_{s\in G} b_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s)\right)c_{jk}.$$

i wtedy mamy

$$\underset{i,j,k,l}{\forall}\quad \frac{1}{g}\sum_{s\in G} a_{ij}(s^{-1})a_{kl}(s) = \begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{jeśli } i=l,\ j=k\\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}. \quad \clubsuit$$

Niech G będzie grupą skończoną. W zbiorze $\mathbb{C}^G$ określamy odwzorowanie

$$(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G :\longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi|\psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s)\overline{\psi(s)}.$$

Uwaga Odwzorowanie ma następujące własności:

1. Jest półtoraliniowe, tzn.

$$(a\varphi + b\psi, \sigma) = a(\varphi, \sigma) + b(\psi, \sigma)$$

$$(\sigma, a\varphi + b\psi) = \overline{a}(\sigma, \varphi) + \overline{b}(\sigma, \psi).$$

2. $(\varphi|\varphi)$ jest liczbą rzeczywistą oraz $(\varphi|\varphi) > 0$ dla $\varphi \neq 0$.
3. $(\varphi|\psi) = \overline{(\psi|\varphi)}$.
4. Jeśli φ oraz ϕ są charakterami, to $(\varphi|\psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s)\psi(s^{-1})$.

Twierdzenie

1. Jeśli χ jest charakterem reprezentacji grupy G, to $(\chi|\chi) = 1$, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym (pokażemy później implikację w drugą stronę).
2. Jeśli χ oraz χ' są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych nierównoważnych, to $(\chi|\chi') = 0$.

Dowód. Niech $\rho_s = (a_{ij}(s)),\ \rho'_s = (b_{ij}(s)),\ \chi(s) = \sum_i a_{ii}(s),\ \chi'(s) = \sum_j b_{jj}(s)$.

Wtedy

$$(\chi, \chi') = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \sum_{i,j} a_{ii}(s) b_{jj}(s^{-1}) = \begin{cases} 1, & \text{w pierwszym przypadku} \\ 0, & \text{w drugim przypadku} \end{cases} \qquad \clubsuit$$

Twierdzenie

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy skończonej G oraz niech χ będzie jej charakterem. Niech

$$(*) \quad \rho = \rho^1 \oplus \ldots \oplus \rho^k$$

będzie rozkładem na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych wyznaczonym przez ten rozkład przestrzeni V. Jeśli $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W)$ jest reprezentacją nieprzywiedlną grupy G o charakterze χ', to liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w powyższym rozkładzie równoważnych ρ' jest równa $(\chi|\chi')$.

Dowód. Niech χ_i będzie charakterem reprezentacji ρ_i dla $i = 1, \ldots, k$.
Wtedy $\chi = \chi_1 + \ldots + \chi_k$ oraz

$$(\chi, \chi') = (\chi_1 + \ldots + \chi_k, \chi') = (\chi_1, \chi') + \ldots + (\chi_k, \chi') = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k,$$

gdzie

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \rho^i \cong \rho' \\ 0, & \text{gdy } \rho^i \ncong \rho' \end{cases} . \quad \clubsuit$$

Wnioski

- Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w rozkładzie $(*)$ równoważnych ustalonej reprezentacji nieprzywiedlnej nie zależy od rozkładu.
- Dwie reprezentacje grupy G są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe charaktery.
- Jeśli $\rho = m_1\rho^1 \oplus \ldots \oplus m_k\rho^k$ jest rozkładem reprezentacji o charakterze χ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych, to

$$(\chi|\chi) = \sum_{i=1}^{k} m_i^2 .$$

- $(\chi|\chi) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym.

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \mathrm{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ grupy G. Wtedy liczba podreprezentacji reprezentacji regularnej równoważnych ρ jest równa

$$(r_G, \chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} r_G(s)\chi(s^{-1}) = \frac{1}{|G|} r_G(1)\chi(1) = \chi(1) = \mathrm{st}\,\rho. \quad ♣$$

Wniosek

1. Jeżeli $n_1, \ldots, n_h$ są stopniami wszystkich reprezentacji nieprzywiedlnych grupy skończonej G, to
$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|.$$
2. Jeśli $1 \neq s \in G$ oraz $\chi_1, \ldots, \chi_h$ są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G, to
$$\sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s) = 0.$$

Dowód. Z poprzedniego wniosku oraz stwierdzenia mamy

$$r_G(s) = \sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases} \qquad \clubsuit$$

Wyprowadziliśmy bardzo ważny wzór dotyczący stopni reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = |G|.$$

Uwagi

- Później pokażemy, że jeszcze dodatkowo $n_i||G|$.
- Zwróćmy uwagę na pożyteczność powyższego wzoru, gdy już znamy pewne reprezentacje nieprzywiedlne grupy G.
- Jakie możliwe są stopnie reprezentacji nieprzywiedlnych grupy 6-cio elementowej? To samo dla grupy 8-mio elementowej.

Definicja

Funkcję $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\underset{s,t\in G}{\forall} \; f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.
- Funkcje centralne na grupie G tworzą przestrzeń liniową (nad $\mathbb{C}$). Jest to podprzestrzeń przestrzeni unitarnej $\mathbb{C}^G$. Ozn. H.
  Bazą przestrzeni H jest układ funkcji charakterystycznych klas sprzężoności grupy G.
  Zatem wymiar H jest równy liczbie klas sprzężoności grupy G..

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G. Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ, to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{s \in G} f(s)\chi(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t = \rho_t^{-1} \circ \left(\sum_{s \in G} f(s)\rho_s\right) \circ \rho_t = \sum_{s \in G} f(s)\rho_{t^{-1}st} = \sum_{s \in G} f(t^{-1}st)\rho_{t^{-1}st} = \rho_f.$$

Zatem spełniony jest warunek z wniosku po lemacie Schura i ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\rho_f = \frac{1}{n}\sum_{s \in G} f(s)\chi(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi}). \quad \clubsuit$$

Twierdzenie

Jeśli $\chi_1, ..., \chi_k$ są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji $\rho^1, ..., \rho^k$ grupy G, to $\chi_1, ..., \chi_k$ tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G.

Dowód. Niech $f \in \mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^\perp = \mathrm{lin}(\overline{\chi_1}, ..., \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, ..., k$. Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, ..., k$ endomorfizm ρ_f^i jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s)\chi_i(s) = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i wtedy jej charakter $\chi = m_1\chi_1 + ... + m_k\chi_k$.
Stąd

$$(f|\chi) = (f|m_1\chi_1 + ... + m_k\chi_k) = m_1(f|\chi_1) + ... + (f|\chi_k) = 0$$

i $\rho_f = 0$ dla dowolnej reprezentacji grupy G. W szczególności gdy ρ jest reprezentacją regularną mamy

$$0 = \rho_f(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s)\rho_s(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s)\varepsilon_s.$$

Ponieważ układ $(\varepsilon_s)_{s \in G}$ jest bazą, więc $f = 0$.
Pokazaliśmy, że $\mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k)^\perp = \{0\}$, tzn. $\mathrm{lin}(\chi_1, ..., \chi_k) = H$. ♣

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Stąd funkcja centralna $f \neq 0$ jest charakterem pewnej reprezentacji wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją charakterów nieprzywiedlnych o nieujemnych współczynnikach.

Wnioski

- Liczba nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G (z dokładnością do równoważności) jest równa liczbie klas sprzężoności grupy G.
- Skończona grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej reprezentacje są stopnia 1.

Stwierdzenie

Niech $c(s)$ dla $s \in G$ oznacza liczbę elementów w klasie sprzężoności elementu s. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_i}(s)\chi_i(t) = \begin{cases} \frac{|G|}{c(s)}, & \text{gdy } t \text{ jest sprzężony z } s \\ 0, & \text{gdy } t \text{ nie jest sprzężony z } s \end{cases}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję charakterysyczną f_s klasy sprzężoności elementu s. Wtedy

$$f_s = \sum_{i=1}^{k} (f_s|\chi_i)\chi_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{c(s)}{|G|}\overline{\chi_i}(s)\chi_i.$$

$$f_s(t) = \frac{c(s)}{|G|}\sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_i}(s)\chi_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } t \text{ jest sprzężony z } s \\ 0, & \text{gdy } t \text{ nie jest sprzężony z } s \end{cases}.$$

Zatem

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_i}(s)\chi_i(t) = \begin{cases} \dfrac{|G|}{c(s)}, & \text{gdy } t \text{ jest sprzężony z } s \\ 0, & \text{gdy } t \text{ nie jest sprzężony z } s \end{cases}. \quad \clubsuit$$

Definicja

Niech $1 = s_1, \ldots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech $\chi_1, \ldots, \chi_k$ będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G. Macierz $T = (a_{ij}),\ a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

$$\begin{array}{c||c|c|c} & s_1 & \ldots & s_k \\ \hline \chi_1 & \chi_1(s_1) & \ldots & \chi_1(s_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi_k & \chi_k(s_1) & \ldots & \chi_k(s_k) \end{array}.$$

Uwagi Niech $c(s)$ będzie liczbą elementów w klasie sprzężoności elementu s.

1. Macierz T jest nieosobliwa.
2. W pierwszej kolumnie stoją stopnie reprezentacji.
3. ortogonalność kolumn: $\frac{c(s_r)}{|G|} \sum_{i=1}^{k} \chi_i(s_p)\overline{\chi_i}(s_r) = \delta_{pr}$
4. ortogonalność wierszy: $(\chi_i|\chi_j) = \frac{1}{|G|} \sum_{l=1}^{k} c(s_l)\chi_i(s_l)\overline{\chi_j}(s_l) = \delta_{ij}$
5. $$\sum_{i=1}^{k} n_i\chi_i(s) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } s \neq 1 \\ |G|, & \text{gdy } s = 1 \end{cases}.$$

Przykład Tablica charakterów grupy $S(3)$.

kl. sprzęż.	id	(1 2)	(1 2 3)
$\frac{\lvert G \rvert}{c(s)}$	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Uwaga Faktycznie reprezentacja ρ^3 ma postać

$$\rho^3((1\ 2)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^3((1\ 2\ 3)) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

i jej charakter jest taki jak to wyliczyliśmy.

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G.
Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad $\mathbb{R}$).
- Reprezentacja ρ nie jest rzeczywista i żadna jej równoważna nie jest rzeczywista, ale jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste.
- Charakter reprezentacji ρ nie jest rzeczywisty (wtedy ρ nie jest równoważna żadnej reprezentacji rzeczywistej).

Definicja

Element g grupy G nazywamy **elementem rzeczywistym**, jeśli jest sprzężony z g^{-1}. Jeżeli g jest elementem rzeczywistym, to klasę elementów sprzężonych $g^G := \{x^{-1}gx : x \in G\}$ nazywamy rzeczywistą.

Uwaga Jeśli klasa jest rzeczywista, to każdy element tej klasy jest rzeczywisty (*Spróbuj to pokazać - to nie jest trudne*). Ponadto klasa ta zawiera odwrotność każdego swojego elementu.

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech $s_1, \ldots, s_k$ oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G, a $\chi_1, \ldots, \chi_k$ wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G.
Niech

$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\ldots,k}$$

będzie tablicą charakterów grupy G. Jeśli

$$\overline{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,\ldots,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,\ldots,k},$$

to $\overline{X}$ też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X, tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.
Na tym samych miejscu pozostają wiersze odpowiadające charakterom rzeczywistym.
Niech

$$P_\sigma = (a_{ij}), \;\; a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq \sigma(i) \\ 1, & \text{gdy } j = \sigma(i) \end{cases} .$$

Wtedy

$$P_\sigma X = (c_{il}), \;\; c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \chi_l(s(_j) = \chi_{\sigma(i)}(s_j) = \overline{\chi_i(s_j)}, \text{ tzn. } P_\sigma X = \overline{X}$$

oraz liczba permutacji rzeczywistych grupy G równa się $\mathrm{tr}(P_\sigma)$.

Dla każdej klasy elementów sprzężonych s_i odpowiadająca jej kolumna macierzy X jest równa kolumnie macierzy $\overline{X}$ odpowiadającej klasie $\overline{s_i}$. Zatem macierze $\overline{X}$ oraz X różnią się też kolejnością kolumn, a na tym samym miejscu pozostają kolumny odpowiadające klasom rzeczywistym. Zatem istnieje macierz permutacji Q_τ taka, że

$$\overline{X} = XQ_\tau$$

i liczba rzeczywistych klas elementów sprzężonych równa się $\mathrm{tr}(Q_\tau)$.
Ponieważ

$$Q_\tau = X^{-1}\overline{X} = X^{-1}P_\sigma X,$$

więc

$$\text{liczba rzeczywistych klas} = \mathrm{tr}(Q_\tau) = \mathrm{tr}(P_\sigma) = \text{ liczba charakterów rzeczywistych.} \quad \clubsuit$$

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.
Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n+1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych. Wtedy $x^{-1}gx = g^{-1}$ dla pewnego $x \in G$. Stąd $x^{-2}gx^2 = g$ tzn. x^2, a więc również x^{2k} dla każdego k, jest przemienny z elementem g. Z tw. Lagrange'a wynika, że $x = x^{2(n+1)}$, a to oznacza, że x jest przemienny z g tzn. $g = x^{-1}gx = g^{-1}$, czyli $g^2 = 1$. Skoro rząd grupy G jest nieparzysty, więc $g = e$ i nasza klasa jest trywialna. ♣

Twierdzenie

Niech χ będzie charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ grupy G. Wtedy NWSR:

1. charakter χ może być realizowany nad $\mathbb{R}$,
2. istnieje nieosobliwa symetryczna forma dwuliniowa $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ taka, że

$$\bigwedge_{\alpha,\beta \in V} \bigwedge_{s \in G} \varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\rho_s(\alpha), \rho_s(\beta)).$$

Uwaga Gdyby w pierwszym punkcie powyższego twierdzenia żądać jedynie, aby charakter przyjmował wartości rzeczywiste, to w punkcie drugim trzeba zrezygnować z symetryczności wzmiankowanego funkcjonału dwuliniowego.

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech $\chi_1, ..., \chi_k$ będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W_1), ..., \rho^k : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W_k)$$

grupy G oraz niech $n_1, ..., n_k$ będą stopniami tych reprezentacji. Ponadto niech

$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_m$$

będzie rozkładem przestrzeni V na sumę prostą podprzestrzeni odpowiadającym podreprezentacjom nieprzywiedlnym. Dla $i = 1, ..., k$ niech V_i oznacza sumę prostą tych sposród reprezentacji $U_1, ..., U_m$, które są równoważne z ρ^i. Mamy

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_k, \quad \chi = l_1\chi_1 + ... + l_k\chi_k,$$

(pewne V_i mogą być podprzestrzeniami zerowymi; wtedy $l_i = 0$).
Podprzestrzeń V_i nazywamy **składową jednorodną**.

Twierdzenie

1. Rozkład $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
2. Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem
$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i}(s) \rho_s.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić część drugą.
Niech
$$f = \frac{n_i}{|G|} \overline{\chi_i}(t).$$

Wtedy na podstawie stwierdzenia z wcześniejszego wykładu ograniczenie odwzorowania $p_i = \rho_f$ do podreprezentacji nieprzywiedlnej o charakterze χ, majacej stopień n jest homotetią o współczynniku

$$\lambda_i = \frac{|G|}{n}(f|\overline{\chi}) = \frac{|G|}{n} \sum_{s \in G} \frac{n_i}{|G|^2} \overline{\chi_i}(s) \chi(s) = \frac{n_i}{n}(\chi_i|\chi) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \chi \neq \chi_i \\ 1, & \text{gdy } \chi = \chi_i \end{cases} .$$

Zatem p_i jest tożsamością na V_i i odwzorowaniem zerowym na V_j dla $j \neq i$ ♣.

Przykład Niech $H < S(n)$ oraz niech $(e_1, ..., e_n)$ będzie bazą przestrzeni liniowej V. Zdefiniujmy reprezentację

$$\rho : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(V),\ \rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

Jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(\sigma) = \mathrm{Fix}(\sigma)$.
Rozważmy grupę $D_4 < S(4)$. Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4),\ b = (1, 2)(3, 4)$.
Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2 b\}$, $\{ab, a^3 b\}$,
a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

D_4	1	a	a^2	a^3	b	ab	$a^2 b$	$a^3 b$
	id	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)$	$(1\,4)(2\,3)$	$(2\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

$$\chi = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5, \quad p_1(e_1) = \tfrac{1}{8}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_2 + e_3 + e_4 + e_1)$$

$$V = \mathrm{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \oplus \mathrm{lin}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4) \oplus \mathrm{lin}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$$

Pytanie Jak dokonać rozkładu składowej jednorodnej na sumę prostą podprzestrzeni G-niezmienniczych?

Chcemy dokonać rozkładu

$$V_i = W_i \oplus \ldots \oplus W_i$$

na sumę podprzestrzeni G-niezmienniczych związanych z podreprezentacjami równoważnymi z

$$\rho^i : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(W_i).$$

Niech reprezentacja ρ^i w postaci macierzowej jest równa $(a_{kl}(s))$ względem bazy $e_1, \ldots, e_n$ przestrzeni W_i, $n = n_i = \dim W_i$.
Wtedy

$$\chi_i(s) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(s).$$

Dla każdych $k, l = 1, \ldots, n$ określmy odwzorowanie

$$p_{kl} = \frac{n}{|G|} \sum_{s \in G} a_{lk}(s^{-1}) \rho_s.$$

Twierdzenie

1. Przekształcenie p_{kk} jest rzutowaniem, $p_{kk}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, $p_{kk}(V_{ik}) \subset V_i$ i
$$V_i = V_{i1} \oplus \ldots \oplus V_{in}, \quad p_i = \sum_{k=1}^{n} p_{kk}.$$
2. $p_{kl}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, oraz $p_{kl}(V_{ir}) = \{\theta\}$ dla $r \neq l$.
Ponadto $p_{kl} : V_{il} \longrightarrow V_{ik}$ jest izomorfizmem.
3. Niech α_1 będzie niezerowym wektorem przestrzeni V_{i1} i niech $\alpha_k = p_{k1}(\alpha_1) \in V_{ik}$. Wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależne i generują n-wymiarową podprzestrzeń G-niezmienniczą $W(\alpha_1)$. Dla $s \in G$ mamy
$$\rho_s(\alpha_k) = \sum_{l=1}^{n} a_{lk}(s)\alpha_l.$$
W szczególności $W(\alpha_1)$ jest „izomorficzna" z W_i.
4. Jeśli $(\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{(m)})$ jest bazą przestrzeni V_{i1}, to reprezentacja V_i jest sumą prostą nieprzywiedlnych podreprezentacji wyznaczonych przez podprzestrzenie $W(\alpha_1^{(1)}), \ldots, W(\alpha_1^{(m)})$.

Dowód. Mamy

$$p_{kl}(e_r) = \frac{n}{|G|}\sum_{s\in G} a_{lk}(s^{-1})\rho_s(e_r) = \frac{n}{|G|}\sum_{u=1}^{n}\sum_{s\in G} a_{lk}(s^{-1})a_{ur}(s)e_u = \begin{cases} e_k, & \text{jeśli } r = l \\ \theta, & \text{jeśli } r \neq l \end{cases}.$$

Stąd wynika, że $\sum_{k=1}^{n} p_{kk}$ jest przekształceniem tożsamościowym przestrzeni W_i oraz

$$p_{kl} \circ p_{ru} = \begin{cases} p_{ku}, & \text{jeśli } l = r \\ 0, & \text{jeśli } l \neq r \end{cases}$$

oraz

$$\rho_s \circ p_{kr} = \sum_{l=1}^{n} a_{lk}(s)p_{lr}.$$

Podobnie pokazuje się, że p_{kl} zeruje się na W_j dla $j \neq i$. Teraz rozkładamy V na sumę podreprezentacji izomorficznych z W_j i stosujemy uzyskane wyniki dla kazdej z tych reprezentacji. W ten sposób mamy (1) oraz (2). Przy założeniu części (3) mamy

$$\rho_s(\alpha_k) = \rho_s \circ p_{k1}(\alpha_1) = \sum_{l=1}^{n} a_{lk}(s)p_{l1}(\alpha_1) = \sum_{l=1}^{n} a_{lk}(s)\alpha_l$$

co dowodzi (3). Część (4) wynika z poprzednich.

Przykład Niech $(e_1, ..., e_6)$ będzie bazą przestrzeni liniowej V oraz niech $\rho : D(3) \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy $D(3) \cong S(3)$ zdefiniowaną następująco:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ zdefinowanej ogólnie wyżej. Niech a będzie obrotem o kąt $\pi/3$, a b symetrią względem "górnego" wierzchołka. Wtedy

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

Stąd $\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3$.

Obliczmy obrazy rzutowań p_1, p_2, p_3.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Stąd

$$p_1 = \frac{1}{6}(\rho_1 + \rho_a + \rho_{a^2} + \rho_b + \rho_{ab} + \rho_{ab^2}), \quad p_1(V) = \mathrm{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6)$$

$$p_2 = \frac{1}{6}(\rho_1 + \rho_a + \rho_{a^2} - \rho_b - \rho_{ab} - \rho_{ab^2}), \quad p_2(V) = \mathrm{lin}(e_1 + e_5 + e_3 - e_2 - e_4 - e_6).$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Z rzutowaniem $p_3 = \frac{2}{6}(2\rho_1 - \rho_a - \rho_{a^2})$ jest więcej kłopotu, bo jego obraz jest podprzestrzenią 4-wymiarową i jest sumą prostą dwóch 2-wymiarowych podprzestrzeni G-niezmienniczych.

$$p_3(V) = \mathrm{lin}(2e_1 - e_5 - e_3, 2e_2 - e_6 - e_4, 2e_3 - e_1 - e_5, 2e_4 - e_2 - e_6, 2e_5 - e_3 - e_1, 2e_6 - e_4 - e_2)$$