

Elementy teorii reprezentacji liniowych grup skończonych

Andrzej Sładek

sladek@ux2.math.us.edu.pl

Institut Matematyki, Uniwersytet Śląski w Katowicach

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdego $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdego $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \bar{g}(x) = gx = x^g$.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdego $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \bar{g}(x) = gx = x^g$.

Odwzorowanie $\bar{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\bar{\phi} : g \longmapsto \bar{g}$ jest homomorfizmem grup.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdego $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \bar{g}(x) = gx = x^g$.

Odwzorowanie $\bar{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\bar{\phi} : g \longmapsto \bar{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdego $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \bar{g}(x) = gx = x^g$.

Odwzorowanie $\bar{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\bar{\phi} : g \longmapsto \bar{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdego $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \bar{g}(x) = gx = x^g$.

Odwzorowanie $\bar{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\bar{\phi} : g \longmapsto \bar{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdego $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \bar{g}(x) = gx = x^g$.

Odwzorowanie $\bar{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\bar{\phi} : g \longmapsto \bar{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdego $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \bar{g}(x) = gx = x^g$.

Odwzorowanie $\bar{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\bar{\phi} : g \longmapsto \bar{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gxg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdego $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \bar{g}(x) = gx = x^g$.

Odwzorowanie $\bar{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\bar{\phi} : g \longmapsto \bar{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gxg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gA$ - przesunięcie lewostronne zbioru A .

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdego $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \bar{g}(x) = gx = x^g$.

Odwzorowanie $\bar{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\bar{\phi} : g \longmapsto \bar{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gxg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gA$ - przesunięcie lewostronne zbioru A .
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := Ag^{-1}$ - przesunięcie prawostronne zbioru A .

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdego $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \bar{g}(x) = gx = x^g$.

Odwzorowanie $\bar{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\bar{\phi} : g \longmapsto \bar{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gxg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gA$ - przesunięcie lewostronne zbioru A .
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := Ag^{-1}$ - przesunięcie prawostronne zbioru A .
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gAg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdego $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \bar{g}(x) = gx = x^g$.

Odwzorowanie $\bar{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\bar{\phi} : g \longmapsto \bar{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gxg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gA$ - przesunięcie lewostronne zbioru A .
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := Ag^{-1}$ - przesunięcie prawostronne zbioru A .
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gAg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = \mathcal{G}(G)$, $\phi(g, H) := gHg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy odwzorowanie $\phi : G \times X \longrightarrow X$, spełniające dla każdych $g, h \in G$ oraz $x \in X$, następujące warunki:

$$\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \quad \phi(1, x) = x.$$

Stosuje się różne uproszczone zapisy: $\phi(g, x) = \bar{g}(x) = gx = x^g$.

Odwzorowanie $\bar{\phi} : G \longrightarrow S(X)$, $\bar{\phi} : g \longmapsto \bar{g}$ jest homomorfizmem grup.

Przykłady

- G, X dowolne, $\phi(g, x) := x$
- X dowolny zbiór, $\phi : S(X) \times X \longrightarrow X$, $\phi(\sigma, x) = \sigma(x)$
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gx$ - przesunięcie lewostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := xg^{-1}$ - przesunięcie prawostronne.
- $X = G$ dowolne, $\phi(g, x) := gxg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gA$ - przesunięcie lewostronne zbioru A .
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := Ag^{-1}$ - przesunięcie prawostronne zbioru A .
- $X = 2^G$, $\phi(g, A) := gAg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $X = \mathcal{G}(G)$, $\phi(g, H) := gHg^{-1}$ - działanie za pomocą automorfizmów wewnętrznych.
- $G = GL(n, K)$, $X = K^n$, $\phi(A, v) := Av$ - działanie za pomocą przekształceń liniowych.

Definicja

Niech grupa G działa na zbiorze X .

Orbitą elementu $x \in X$ nazywamy

$$\text{orb}(x) := \{y \in X : \exists_{g \in G} y = gx\} = \{gx \in X : g \in G\}.$$

Definicja

Niech grupa G działa na zbiorze X .

Orbitą elementu $x \in X$ nazywamy

$$\text{orb}(x) := \{y \in X : \exists_{g \in G} y = gx\} = \{gx \in X : g \in G\}.$$

Stabilizatorem elementu $x \in X$ nazywamy

$$\text{stab}(x) = \{g \in G : gx = x\}.$$

Definicja

Niech grupa G działa na zbiorze X .

Orbitą elementu $x \in X$ nazywamy

$$\text{orb}(x) := \{y \in X : \exists_{g \in G} y = gx\} = \{gx \in X : g \in G\}.$$

Stabilizatorem elementu $x \in X$ nazywamy

$$\text{stab}(x) = \{g \in G : gx = x\}.$$

Zbiór

$$\text{fix}(g) = \{x \in X : gx = x\}$$

nazywamy **zbiorem elementów stałych** elementu $g \in G$.

Definicja

Niech grupa G działa na zbiorze X .

Orbitą elementu $x \in X$ nazywamy

$$\text{orb}(x) := \{y \in X : \exists_{g \in G} y = gx\} = \{gx \in X : g \in G\}.$$

Stabilizatorem elementu $x \in X$ nazywamy

$$\text{stab}(x) = \{g \in G : gx = x\}.$$

Zbiór

$$\text{fix}(g) = \{x \in X : gx = x\}$$

nazywamy **zbiorem elementów stałych** elementu $g \in G$.

Spójrzmy na poprzednie przykłady i dla kilku z nich wyznaczmy powyższe zbiory.

Własności

- $x \in \text{orb}(x)$;

Własności

- $x \in \text{orb}(x)$;
- $y \in \text{orb}(x) \iff \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$;

Własności

- $x \in \text{orb}(x)$;
- $y \in \text{orb}(x) \iff \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$;
- $\text{orb}(x) \cap \text{orb}(y) \neq \emptyset \implies \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$.

Własności

- $x \in \text{orb}(x)$;
- $y \in \text{orb}(x) \iff \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$;
- $\text{orb}(x) \cap \text{orb}(y) \neq \emptyset \implies \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$.

Własności

- $x \in \text{orb}(x)$;
- $y \in \text{orb}(x) \iff \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$;
- $\text{orb}(x) \cap \text{orb}(y) \neq \emptyset \implies \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$.

Twierdzenie

- 1 $\text{stab}(x) < G$,

Własności

- $x \in \text{orb}(x)$;
- $y \in \text{orb}(x) \iff \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$;
- $\text{orb}(x) \cap \text{orb}(y) \neq \emptyset \implies \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$.

Twierdzenie

- 1 $\text{stab}(x) < G$,
- 2 $|\text{orb}(x)| = |G : \text{stab}(x)|$,

Własności

- $x \in \text{orb}(x)$;
- $y \in \text{orb}(x) \iff \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$;
- $\text{orb}(x) \cap \text{orb}(y) \neq \emptyset \implies \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$.

Twierdzenie

- 1 $\text{stab}(x) < G$,
- 2 $|\text{orb}(x)| = |G : \text{stab}(x)|$,
- 3 $|G| = |\text{orb}(x)| |\text{stab}(x)|$,

Własności

- $x \in \text{orb}(x)$;
- $y \in \text{orb}(x) \iff \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$;
- $\text{orb}(x) \cap \text{orb}(y) \neq \emptyset \implies \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$.

Twierdzenie

- 1 $\text{stab}(x) < G$,
- 2 $|\text{orb}(x)| = |G : \text{stab}(x)|$,
- 3 $|G| = |\text{orb}(x)| |\text{stab}(x)|$,
- 4 $y = gx \implies \text{stab}(y) = g\text{stab}(x)g^{-1}$,

Własności

- $x \in \text{orb}(x)$;
- $y \in \text{orb}(x) \iff \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$;
- $\text{orb}(x) \cap \text{orb}(y) \neq \emptyset \implies \text{orb}(x) = \text{orb}(y)$.

Twierdzenie

- 1 $\text{stab}(x) < G$,
- 2 $|\text{orb}(x)| = |G : \text{stab}(x)|$,
- 3 $|G| = |\text{orb}(x)| |\text{stab}(x)|$,
- 4 $y = gx \implies \text{stab}(y) = g\text{stab}(x)g^{-1}$,
- 5 $y \in \text{orb}(x) \implies |\text{stab}(y)| = |\text{stab}(x)|$.

Stwierdzenie

Niech $\mathcal{R} = \{x_i : i \in I\}$ będzie zbiorem reprezentantów orbit. Wtedy

$$|X| = \sum_{i \in I} |\text{orb}(x_i)| = \sum_{i \in I} |G : \text{stab}(x_i)|.$$

Stwierzenie

Niech $\mathcal{R} = \{x_i : i \in I\}$ będzie zbiorem reprezentantów orbit. Wtedy

$$|X| = \sum_{i \in I} |\text{orb}(x_i)| = \sum_{i \in I} |G : \text{stab}(x_i)|.$$

Dowód na tablicy.

Stwierdzenie

Niech $\mathcal{R} = \{x_i : i \in I\}$ będzie zbiorem reprezentantów orbit. Wtedy

$$|X| = \sum_{i \in I} |\text{orb}(x_i)| = \sum_{i \in I} |G : \text{stab}(x_i)|.$$

Dowód na tablicy.

Wniosek

- Jeśli $|G| = p^n$, $|X| = p^m$, $m, n \geq 1$ p - liczba pierwsza, to liczba orbit jednoelementowych jest podzielna przez p .

Stwierzenie

Niech $\mathcal{R} = \{x_i : i \in I\}$ będzie zbiorem reprezentantów orbit. Wtedy

$$|X| = \sum_{i \in I} |\text{orb}(x_i)| = \sum_{i \in I} |G : \text{stab}(x_i)|.$$

Dowód na tablicy.

Wniosek

- Jeśli $|G| = p^n$, $|X| = p^m$, $m, n \geq 1$ p - liczba pierwsza, to liczba orbit jednoelementowych jest podzielna przez p .
- Jeśli $|G| = p^n$, $n \geq 1$, to centrum

$$Z(G) = \{g \in G : \forall_{h \in G} gh = hg\}$$

grupy G jest nietrywialne.

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X , to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G, X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|.$$

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X , to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G, X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|.$$

Dowód.

Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X , to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G, X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|.$$

Dowód.

Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.

Liczba jedynek w g -tym wierszu = $|\{x \in X : gx = x\}| = |\text{fix}(g)|$

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X , to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G, X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|.$$

Dowód.

Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.

Liczba jedynek w g -tym wierszu = $|\{x \in X : gx = x\}| = |\text{fix}(g)|$

Liczba jedynek w x -tej kolumnie = $|\{g \in G : gx = x\}| = |\text{stab}(x)|$

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X , to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G, X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|.$$

Dowód.

Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.

Liczba jedynek w g -tym wierszu = $|\{x \in X : gx = x\}| = |\text{fix}(g)|$

Liczba jedynek w x -tej kolumnie = $|\{g \in G : gx = x\}| = |\text{stab}(x)|$

Jeśli N - liczba jedynek w całej macierzy, a \mathcal{R} - zbiór reprezentantów orbit, to

$|\mathcal{R}| = n(G, X)$.

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X , to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G, X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|.$$

Dowód.

Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.

Liczba jedynek w g -tym wierszu = $|\{x \in X : gx = x\}| = |\text{fix}(g)|$

Liczba jedynek w x -tej kolumnie = $|\{g \in G : gx = x\}| = |\text{stab}(x)|$

Jeśli N - liczba jedynek w całej macierzy, a \mathcal{R} - zbiór reprezentantów orbit, to $|\mathcal{R}| = n(G, X)$.

Wtedy z jednej strony

$$N = \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|,$$

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X , to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G, X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|.$$

Dowód.

Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.

Liczba jedynek w g -tym wierszu = $|\{x \in X : gx = x\}| = |\text{fix}(g)|$

Liczba jedynek w x -tej kolumnie = $|\{g \in G : gx = x\}| = |\text{stab}(x)|$

Jeśli N - liczba jedynek w całej macierzy, a \mathcal{R} - zbiór reprezentantów orbit, to $|\mathcal{R}| = n(G, X)$.

Wtedy z jednej strony

$$N = \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|,$$

a z drugiej

$$N = \sum_{x \in X} |\text{stab}(x)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} \sum_{y \in \text{orb}(x)} |\text{stab}(y)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} |\text{orb}(x)| |\text{stab}(x)| = |\mathcal{R}| |G| = n(G, X) |G|.$$

Lemat Burnside'a

Jeśli grupa G i zbiór X są skończone i G działa na X , to liczba orbit tego działania jest równa średniej liczności zbioru elementów stałych

$$n(G, X) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|.$$

Dowód.

Niech $A = [a_{g,x}]$, gdzie $a_{g,x} = 1 \iff gx = x$ i $a_{g,x} = 0$ w przeciwnym wypadku.

Liczba jedynek w g -tym wierszu = $|\{x \in X : gx = x\}| = |\text{fix}(g)|$

Liczba jedynek w x -tej kolumnie = $|\{g \in G : gx = x\}| = |\text{stab}(x)|$

Jeśli N - liczba jedynek w całej macierzy, a \mathcal{R} - zbiór reprezentantów orbit, to $|\mathcal{R}| = n(G, X)$.

Wtedy z jednej strony

$$N = \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|,$$

a z drugiej

$$N = \sum_{x \in X} |\text{stab}(x)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} \sum_{y \in \text{orb}(x)} |\text{stab}(y)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} |\text{orb}(x)| |\text{stab}(x)| = |\mathcal{R}| |G| = n(G, X) |G|.$$

Stąd teza. \square

Na początku dwie ważne informacje:

Na początku dwie ważne informacje:

- Zbiór $\text{Aut}(V)$ automorfizmów przestrzeni liniowej V (nad dowolnym ciałem K) z działaniem składania odwzorowań jest grupą.

Na początku dwie ważne informacje:

- Zbiór $\text{Aut}(V)$ automorfizmów przestrzeni liniowej V (nad dowolnym ciałem K) z działaniem składania odwzorowań jest grupą.
- Jeżeli $\dim_K V = n < \infty$, to grupa $\text{Aut}(V)$ jest izomorficzna z ogólną grupą liniową $\text{GL}(n, K)$.

Na początku dwie ważne informacje:

- Zbiór $\text{Aut}(V)$ automorfizmów przestrzeni liniowej V (nad dowolnym ciałem K) z działaniem składania odwzorowań jest grupą.
- Jeżeli $\dim_K V = n < \infty$, to grupa $\text{Aut}(V)$ jest izomorficzna z ogólną grupą liniową $\text{GL}(n, K)$.
Przyporządkowanie automorfizmowi jego macierzy (w dowolnie ustalonej) bazie jest izomorfizmem pomiędzy tymi grupami.

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$.

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$.

Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s .

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$.

Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s .

Stopniem reprezentacji będziemy nazywać wymiar przestrzeni V .

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$.

Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s .

Stopniem reprezentacji będziemy nazywać wymiar przestrzeni V .

Reprezentację ρ nazywamy **wierną**, jeśli ρ jest monomorfizmem.

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$.

Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s .

Stopniem reprezentacji będziemy nazywać wymiar przestrzeni V .

Reprezentację ρ nazywamy **wierną**, jeśli ρ jest monomorfizmem.

Uwzględniając informację z poprzedniego slajdu w przypadku, gdy $\dim_K V = n < \infty$, reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ możemy traktować jako homomorfizm

$\rho : G \longrightarrow \text{GL}(n, K)$.

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$.

Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s .

Stopniem reprezentacji będziemy nazywać wymiar przestrzeni V .

Reprezentację ρ nazywamy **wierną**, jeśli ρ jest monomorfizmem.

Uwzględniając informację z poprzedniego slajdu w przypadku, gdy $\dim_K V = n < \infty$, reprezentację $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ możemy traktować jako homomorfizm $\rho : G \rightarrow \text{GL}(n, K)$.

Uwaga

Jeżeli $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją, to

- $\rho_1 = \text{id}_V$,

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$.

Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s .

Stopniem reprezentacji będziemy nazywać wymiar przestrzeni V .

Reprezentację ρ nazywamy **wierną**, jeśli ρ jest monomorfizmem.

Uwzględniając informację z poprzedniego slajdu w przypadku, gdy $\dim_K V = n < \infty$, reprezentację $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ możemy traktować jako homomorfizm $\rho : G \rightarrow \text{GL}(n, K)$.

Uwaga

Jeżeli $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją, to

- $\rho_1 = \text{id}_V$,
- $\rho_{s^{-1}} = \rho_s^{-1}$ dla $s \in G$,

Definicja

Reprezentacją liniową (dowolnej) grupy G w przestrzeni liniowej V nazywamy dowolny homomorfizm $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$.

Wartość reprezentacji ρ na elemencie $s \in G$ będziemy zapisywać w postaci ρ_s .

Stopniem reprezentacji będziemy nazywać wymiar przestrzeni V .

Reprezentację ρ nazywamy **wierną**, jeśli ρ jest monomorfizmem.

Uwzględniając informację z poprzedniego slajdu w przypadku, gdy $\dim_K V = n < \infty$, reprezentację $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ możemy traktować jako homomorfizm $\rho : G \rightarrow \text{GL}(n, K)$.

Uwaga

Jeżeli $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją, to

- $\rho_1 = \text{id}_V$,
- $\rho_{s^{-1}} = \rho_s^{-1}$ dla $s \in G$,
- $\rho_{st} = \rho_s \circ \rho_t$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \text{id}_V$ dla każdego $s \in G$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \text{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \text{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X , to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \text{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X , to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \text{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X , to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujemy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \text{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X , to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujemy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X .

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \text{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X , to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujemy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X . Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n)$, $X = \{1, \dots, n\}$, $\sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n)$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \text{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X , to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujemy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X . Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n)$, $X = \{1, \dots, n\}$, $\sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n)$, $k \in \{1, \dots, n\}$.
Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G .

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \text{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X , to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujemy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X . Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n)$, $X = \{1, \dots, n\}$, $\sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n)$, $k \in \{1, \dots, n\}$.
Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G . Taka reprezentacja okaże się bardzo ważną.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \text{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X , to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujemy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X . Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n)$, $X = \{1, \dots, n\}$, $\sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n)$, $k \in \{1, \dots, n\}$.
Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G . Taka reprezentacja okaże się bardzo ważną. Nazywamy ją **reprezentacją regularną** grupy G .
- $G = \text{GL}(n, K)$, $V = M(n, K)$, $\rho_A(X) = AX$ dla $A \in \text{GL}(n, K)$, $X \in M(n, K)$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \text{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X , to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujemy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X . Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n)$, $X = \{1, \dots, n\}$, $\sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n)$, $k \in \{1, \dots, n\}$.
Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G . Taka reprezentacja okaże się bardzo ważną. Nazywamy ją **reprezentacją regularną** grupy G .
- $G = \text{GL}(n, K)$, $V = M(n, K)$, $\rho_A(X) = AX$ dla $A \in \text{GL}(n, K)$, $X \in M(n, K)$.
- $G = \text{GL}(n, K)$, $V = M(n, K)$, $\rho_A(X) = AXA^{-1}$ dla $A \in \text{GL}(n, K)$, $X \in M(n, K)$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \text{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X , to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujemy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X . Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n)$, $X = \{1, \dots, n\}$, $\sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n)$, $k \in \{1, \dots, n\}$.
Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G . Taka reprezentacja okaże się bardzo ważną. Nazywamy ją **reprezentacją regularną** grupy G .
- $G = \text{GL}(n, K)$, $V = M(n, K)$, $\rho_A(X) = AX$ dla $A \in \text{GL}(n, K)$, $X \in M(n, K)$.
- $G = \text{GL}(n, K)$, $V = M(n, K)$, $\rho_A(X) = AXA^{-1}$ dla $A \in \text{GL}(n, K)$, $X \in M(n, K)$.
- Niech $G = \langle a \rangle$ będzie grupą cykliczną rzędu m oraz niech $A \in \text{GL}(n, K)$ będzie macierzą taką, że $A^m = I_n$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \text{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X , to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujemy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X . Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n)$, $X = \{1, \dots, n\}$, $\sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n)$, $k \in \{1, \dots, n\}$.
Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G . Taka reprezentacja okaże się bardzo ważną. Nazywamy ją **reprezentacją regularną** grupy G .
- $G = \text{GL}(n, K)$, $V = M(n, K)$, $\rho_A(X) = AX$ dla $A \in \text{GL}(n, K)$, $X \in M(n, K)$.
- $G = \text{GL}(n, K)$, $V = M(n, K)$, $\rho_A(X) = AXA^{-1}$ dla $A \in \text{GL}(n, K)$, $X \in M(n, K)$.
- Niech $G = \langle a \rangle$ będzie grupą cykliczną rzędu m oraz niech $A \in \text{GL}(n, K)$ będzie macierzą taką, że $A^m = I_n$.

Przykłady:

- Reprezentacja **trywialna**, $\rho_s = \text{id}_V$ dla każdego $s \in G$.
- Reprezentacje stopnia 1 są postaci $G \longrightarrow K^*$. Gdy $|G| < \infty$, to $\rho_s \in \mu(K)$.
- Jeżeli G działa na zbiorze X , to rozważmy przestrzeń liniową o bazie $(e_x)_{x \in X}$. Elementowi $s \in G$ przyporządkujemy automorfizm, który na wybranej bazie działa następująco: $\rho_s(e_x) = e_{sx}$. Otrzymujemy w ten sposób reprezentację nazywaną **reprezentacją permutacyjną** stowarzyszoną z działaniem grupy G na zbiorze X . Szczególnym przypadkiem jest $G = S(n)$, $X = \{1, \dots, n\}$, $\sigma k := \sigma(k)$ dla $\sigma \in S(n)$, $k \in \{1, \dots, n\}$.
Innym szczególnym przypadkiem jest reprezentacja, gdy $G = X$ i sx jest zwykłym mnożeniem elementów s oraz x w grupie G . Taka reprezentacja okaże się bardzo ważną. Nazywamy ją **reprezentacją regularną** grupy G .
- $G = \text{GL}(n, K)$, $V = M(n, K)$, $\rho_A(X) = AX$ dla $A \in \text{GL}(n, K)$, $X \in M(n, K)$.
- $G = \text{GL}(n, K)$, $V = M(n, K)$, $\rho_A(X) = AXA^{-1}$ dla $A \in \text{GL}(n, K)$, $X \in M(n, K)$.
- Niech $G = \langle a \rangle$ będzie grupą cykliczną rzędu m oraz niech $A \in \text{GL}(n, K)$ będzie macierzą taką, że $A^m = I_n$. Wtedy

$$\rho^A : G \longrightarrow \text{Aut}(K^n), \rho_{a^k}^A \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = A^k \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

jest reprezentacją.

Definicja

Reprezentacje $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ oraz $\rho' : G \longrightarrow \text{Aut}(V')$ grupy G nazywamy **równoważnymi**, jeśli istnieje izomorfizm $\tau : V \longrightarrow V'$ taki, że

$$\forall_{s \in G} \tau \circ \rho_s = \rho'_s \circ \tau.$$

Definicja

Reprezentacje $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ oraz $\rho' : G \longrightarrow \text{Aut}(V')$ grupy G nazywamy **równoważnymi**, jeśli istnieje izomorfizm $\tau : V \longrightarrow V'$ taki, że

$$\forall_{s \in G} \tau \circ \rho_s = \rho'_s \circ \tau.$$

Uwaga

Jeśli wartości reprezentacji traktujemy macierzowo, tzn. $\rho_s = A_s$, $\rho'_s = A'_s$, to warunek równoważności tych reprezentacji przyjmuje następującą postać:

$$\exists_{C \in \text{GL}(n, K)} \forall_{s \in G} CA_s = A'_s C.$$

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G . Podprzestrzeń U przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią **G -niezmienniczą**, jeśli $\forall_{s \in G} \rho_s(U) \subseteq U$.

Definicja

Niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G . Podprzestrzeń U przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią G -**niezmienniczą**, jeśli $\forall_{s \in G} \rho_s(U) \subseteq U$.

Przykłady

- Podprzestrzeń zerowa oraz cała przestrzeń są podprzestrzeniami G -niezmienniczymi.

Definicja

Niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G . Podprzestrzeń U przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią G -niezmienniczą, jeśli $\forall_{s \in G} \rho_s(U) \subseteq U$.

Przykłady

- Podprzestrzeń zerowa oraz cała przestrzeń są podprzestrzeniami G -niezmienniczymi.
- W reprezentacji regularnej podprzestrzeń $W = \text{lin} \left(\sum_{g \in G} e_g \right)$ jest G -niezmiennicza.

Definicja

Niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G . Podprzestrzeń U przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią G -niezmienniczą, jeśli $\forall_{s \in G} \rho_s(U) \subseteq U$.

Przykłady

- Podprzestrzeń zerowa oraz cała przestrzeń są podprzestrzeniami G -niezmienniczymi.
- W reprezentacji regularnej podprzestrzeń $W = \text{lin} \left(\sum_{g \in G} e_g \right)$ jest G -niezmiennicza.
- W przykładzie reprezentacji
 $G = \text{GL}(n, K)$, $V = \text{M}(n, K)$, $\rho_A(X) = AX$ dla $A \in \text{GL}(n, K)$, $X \in \text{M}(n, K)$,
zbiór macierzy z zerową ustaloną kolumną jest podprzestrzenią G -niezmienniczą.

Definicja

Niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G . Podprzestrzeń U przestrzeni V nazywamy podprzestrzenią G -niezmienniczą, jeśli $\forall_{s \in G} \rho_s(U) \subseteq U$.

Przykłady

- Podprzestrzeń zerowa oraz cała przestrzeń są podprzestrzeniami G -niezmienniczymi.
- W reprezentacji regularnej podprzestrzeń $W = \text{lin} \left(\sum_{g \in G} e_g \right)$ jest G -niezmiennicza.
- W przykładzie reprezentacji
 $G = \text{GL}(n, K)$, $V = \text{M}(n, K)$, $\rho_A(X) = AX$ dla $A \in \text{GL}(n, K)$, $X \in \text{M}(n, K)$,
zbiór macierzy z zerową ustaloną kolumną jest podprzestrzenią G -niezmienniczą.
- W przykładzie reprezentacji
 $G = \text{GL}(n, K)$, $V = \text{M}(n, K)$, $\rho_A(X) = AXA^{-1}$ dla $A \in \text{GL}(n, K)$, $X \in \text{M}(n, K)$,
zbiór macierzy skalarnych (jak i zbiór macierzy z zerowym śladem) jest
podprzestrzenią G -niezmienniczą.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G -niezmienniczymi przestrzeni V .

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G -niezmienniczymi przestrzeni V .

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{0\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G -niezmienniczymi przestrzeni V .

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G -niezmienniczymi przestrzeni V .

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G -niezmienniczą przestrzeni V .

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G -niezmienniczymi przestrzeni V .

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G -niezmienniczą przestrzeni V . Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|_U$ jest automorfizmem przestrzeni U

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G -niezmienniczymi przestrzeni V .

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G -niezmienniczą przestrzeni V . Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|_U$ jest automorfizmem przestrzeni U i $\rho^U : G \longrightarrow \text{Aut}(U)$ jest również reprezentacją grupy G .

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G -niezmienniczymi przestrzeni V .

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G -niezmienniczą przestrzeni V . Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|_U$ jest automorfizmem przestrzeni U i $\rho^U : G \longrightarrow \text{Aut}(U)$ jest również reprezentacją grupy G . Nazywamy ją **podreprezentacją** reprezentacji ρ .

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G -niezmienniczymi przestrzeni V .

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G -niezmienniczą przestrzeni V . Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|_U$ jest automorfizmem przestrzeni U i $\rho^U : G \longrightarrow \text{Aut}(U)$ jest również reprezentacją grupy G . Nazywamy ją **podreprezentacją** reprezentacji ρ .

Niech $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ oraz niech $\rho^{U_i} : G \longrightarrow \text{Aut}(U_i)$, $i = 1, \dots, k$, będą reprezentacjami grupy G .

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G -niezmienniczymi przestrzeni V .

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G -niezmienniczą przestrzeni V . Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|_U$ jest automorfizmem przestrzeni U i $\rho^U : G \longrightarrow \text{Aut}(U)$ jest również reprezentacją grupy G . Nazywamy ją **podreprezentacją** reprezentacji ρ .

Niech $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ oraz niech $\rho^{U_i} : G \longrightarrow \text{Aut}(U_i)$, $i = 1, \dots, k$, będą reprezentacjami grupy G . Wtedy $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$

$$\rho_s(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) = \rho_s^{U_1}(\alpha_1) + \dots + \rho_s^{U_k}(\alpha_k); \quad s \in G, \alpha_i \in U_i, i = 1, \dots, k,$$

jest reprezentacją grupy G w przestrzeni liniowej V ,

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G -niezmienniczymi przestrzeni V .

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G -niezmienniczą przestrzeni V . Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|_U$ jest automorfizmem przestrzeni U i $\rho^U : G \longrightarrow \text{Aut}(U)$ jest również reprezentacją grupy G . Nazywamy ją **podreprezentacją** reprezentacji ρ .

Niech $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ oraz niech $\rho^{U_i} : G \longrightarrow \text{Aut}(U_i)$, $i = 1, \dots, k$, będą reprezentacjami grupy G . Wtedy $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$

$$\rho_s(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) = \rho_s^{U_1}(\alpha_1) + \dots + \rho_s^{U_k}(\alpha_k); \quad s \in G, \alpha_i \in U_i, i = 1, \dots, k,$$

jest reprezentacją grupy G w przestrzeni liniowej V , a ρ^{U_i} są jej podreprezentacjami.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **nieprzywiedlną**, jeśli $\{\Theta\}$ oraz V są jedynymi podprzestrzeniami G -niezmienniczymi przestrzeni V .

Zauważmy, że reprezentacje stopnia 1 są zawsze nieprzywiedlne. Inne przykłady poznamy później (np. w zadaniach).

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech U będzie podprzestrzenią G -niezmienniczą przestrzeni V . Wtedy $\rho_s^U = \rho_s|_U$ jest automorfizmem przestrzeni U i $\rho^U : G \longrightarrow \text{Aut}(U)$ jest również reprezentacją grupy G . Nazywamy ją **podreprezentacją** reprezentacji ρ .

Niech $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ oraz niech $\rho^{U_i} : G \longrightarrow \text{Aut}(U_i)$, $i = 1, \dots, k$, będą reprezentacjami grupy G . Wtedy $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$

$$\rho_s(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) = \rho_s^{U_1}(\alpha_1) + \dots + \rho_s^{U_k}(\alpha_k); \quad s \in G, \alpha_i \in U_i, i = 1, \dots, k,$$

jest reprezentacją grupy G w przestrzeni liniowej V , a ρ^{U_i} są jej podreprezentacjami. Reprezentację ρ nazywamy **sumą prostą podreprezentacji** ρ_i i oznaczamy

$$\rho = \rho^{U_1} \oplus \dots \oplus \rho^{U_k}.$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G , to dla każdej podprzestrzeni G -niezmiennej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G -niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G , to dla każdej podprzestrzeni G -niezmiennej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G -niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W' .

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G , to dla każdej podprzestrzeni G -niezmiennej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G -niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \rightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W' . Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G , to dla każdej podprzestrzeni G -niezmiennej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G -niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \rightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W' . Zdefiniujemy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$,

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G , to dla każdej podprzestrzeni G -niezmienniczej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G -niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W' . Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G , to dla każdej podprzestrzeni G -niezmiennej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G -niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W' . Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G , to dla każdej podprzestrzeni G -niezmiennej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G -niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W' . Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.

Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G , to dla każdej podprzestrzeni G -niezmiennej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G -niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W' . Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.

Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.

Ponieważ

$$\rho_s \circ \pi^0 \circ \rho_s^{-1} =$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G , to dla każdej podprzestrzeni G -niezmiennej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G -niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W' . Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.

Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.

Ponieważ

$$\rho_s \circ \pi^0 \circ \rho_s^{-1} = \rho_s \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1} \right) \circ \rho_s^{-1}$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G , to dla każdej podprzestrzeni G -niezmiennej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G -niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W' . Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.

Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.

Ponieważ

$$\rho_s \circ \pi^0 \circ \rho_s^{-1} = \rho_s \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1} \right) \circ \rho_s^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_{st} \circ \pi \circ \rho_{st}^{-1} =$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G , to dla każdej podprzestrzeni G -niezmiennej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G -niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W' . Zdefiniujemy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.

Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.

Ponieważ

$$\rho_s \circ \pi^0 \circ \rho_s^{-1} = \rho_s \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1} \right) \circ \rho_s^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_{st} \circ \pi \circ \rho_{st}^{-1} = \pi^0,$$

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G , to dla każdej podprzestrzeni G -niezmiennej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G -niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W' . Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.

Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.

Ponieważ

$$\rho_s \circ \pi^0 \circ \rho_s^{-1} = \rho_s \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1} \right) \circ \rho_s^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_{st} \circ \pi \circ \rho_{st}^{-1} = \pi^0,$$

więc $\rho_s \circ \pi^0 = \pi^0 \circ \rho_s$ dla $s \in G$.

Twierdzenie (Maschke)

Jeżeli $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ jest reprezentacją skończonej grupy G nad ciałem K oraz charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G , to dla każdej podprzestrzeni G -niezmiennej W przestrzeni V istnieje podprzestrzeń G -niezmiennicza W^0 taka, że

$$V = W \oplus W^0.$$

Dowód. Niech $V = W \oplus W'$ oraz $\pi : V \longrightarrow W$ będzie rzutem V na W wzdłuż W' . Zdefiniujmy

$$\pi^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1}.$$

Zauważmy, że π^0 odwzorowuje V w W oraz dla $\alpha \in W$ mamy $\rho_s^{-1}(\alpha) \in W$, więc $(\rho_s \circ \pi \circ \rho_s^{-1})(\alpha) = \alpha$ i $\pi^0(\alpha) = \alpha$.

Zatem π^0 jest rzutowaniem V na W wzdłuż pewnej podprzestrzeni $W^0 = \ker \pi^0$.

Ponieważ

$$\rho_s \circ \pi^0 \circ \rho_s^{-1} = \rho_s \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_t \circ \pi \circ \rho_t^{-1} \right) \circ \rho_s^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \rho_{st} \circ \pi \circ \rho_{st}^{-1} = \pi^0,$$

więc $\rho_s \circ \pi^0 = \pi^0 \circ \rho_s$ dla $s \in G$.

Jeśli teraz $\alpha \in W^0$, to $\pi^0(\alpha) = \theta$ oraz $(\pi^0 \circ \rho_s)(\alpha) = (\rho_s \circ \pi^0)(\alpha) = \theta$, czyli $\rho_s(\alpha) \in W^0$.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **rozkładalną**, jeśli V jest sumą prostą dwóch niezerowych podprzestrzeni G -niezmienniczych.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **rozkładalną**, jeśli V jest sumą prostą dwóch niezerowych podprzestrzeni G -niezmienniczych.

Reprezentację nazywamy **całkowicie przywiedlną**, jeśli jest sumą prostą swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **rozkładalną**, jeśli V jest sumą prostą dwóch niezerowych podprzestrzeni G -niezmienniczych.

Reprezentację nazywamy **całkowicie przywiedlną**, jeśli jest sumą prostą swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji.

Wniosek

Każda reprezentacja liniowa skończonej grupy nad ciałem, którego charakterystyka nie dzieli rzędu grupy, jest całkowicie przywiedlna tzn. jest sumą prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **rozkładalną**, jeśli V jest sumą prostą dwóch niezerowych podprzestrzeni G -niezmienniczych.

Reprezentację nazywamy **całkowicie przywiedlną**, jeśli jest sumą prostą swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji.

Wniosek

Każda reprezentacja liniowa skończonej grupy nad ciałem, którego charakterystyka nie dzieli rzędu grupy, jest całkowicie przywiedlna tzn. jest sumą prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych.

Uwagi

- Jeżeli reprezentacja jest sumą prostą nieprzywiedlnych podreprezentacji, to odpowiadające im podprzestrzenie G -niezmiennicze nie są wyznaczone jednoznacznie (ale podreprezentacje są wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do równoważności).

Definicja

Reprezentację $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **rozkładalną**, jeśli V jest sumą prostą dwóch niezerowych podprzestrzeni G -niezmienniczych.

Reprezentację nazywamy **całkowicie przywiedlną**, jeśli jest sumą prostą swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji.

Wniosek

Każda reprezentacja liniowa skończonej grupy nad ciałem, którego charakterystyka nie dzieli rzędu grupy, jest całkowicie przywiedlna tzn. jest sumą prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych.

Uwagi

- Jeżeli reprezentacja jest sumą prostą nieprzywiedlnych podreprezentacji, to odpowiadające im podprzestrzenie G -niezmiennicze nie są wyznaczone jednoznacznie (ale podreprezentacje są wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do równoważności).
- Założenia w twierdzeniu Maschkego są istotne. Odpowiednie przykłady zobaczymy w zestawach zadań.

Definicja

Reprezentację $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ nazywamy **rozkładalną**, jeśli V jest sumą prostą dwóch niezerowych podprzestrzeni G -niezmienniczych.

Reprezentację nazywamy **całkowicie przywiedlną**, jeśli jest sumą prostą swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji.

Wniosek

Każda reprezentacja liniowa skończonej grupy nad ciałem, którego charakterystyka nie dzieli rzędu grupy, jest całkowicie przywiedlna tzn. jest sumą prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych.

Uwagi

- Jeżeli reprezentacja jest sumą prostą nieprzywiedlnych podreprezentacji, to odpowiadające im podprzestrzenie G -niezmiennicze nie są wyznaczone jednoznacznie (ale podreprezentacje są wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do równoważności).
- Założenia w twierdzeniu Maschkego są istotne. Odpowiednie przykłady zobaczymy w zestawach zadań.
- Jeżeli reprezentacja jest sumą prostą nieprzywiedlnych podreprezentacji, to w przypadku interpretacji macierzowej tej reprezentacji, macierze będące wartościami tej reprezentacji są klatkowe, a klatki odpowiadają odpowiednim podreprezentacjom.

Przykłady

- Reprezentacja grupy $GL(n, K)$ w $M_n(K)$, $\rho_A(X) = AX$, jest sumą prostą n swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji $\rho^i : GL(n, K) \rightarrow \text{Aut}(U_i)$, gdzie U_i jest podprzestrzenią przestrzeni $M_n(K)$ złożoną z macierzy, których wszystkie kolumny prócz i -tej są zerowe.

Przykłady

- Reprezentacja grupy $GL(n, K)$ w $M_n(K)$, $\rho_A(X) = AX$, jest sumą prostą n swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji $\rho^i : GL(n, K) \rightarrow \text{Aut}(U_i)$, gdzie U_i jest podprzestrzenią przestrzeni $M_n(K)$ złożoną z macierzy, których wszystkie kolumny prócz i -tej są zerowe.
- Reprezentacja grupy $GL(n, K)$ w $M_n(K)$, $\rho_A(X) = AXA^{-1}$, jest sumą prostą podreprezentacji stopnia 1 oraz podreprezentacji stopnia $n^2 - 1$, gdy $\text{char}(K) \nmid n$.

Przykłady

- Reprezentacja grupy $GL(n, K)$ w $M_n(K)$, $\rho_A(X) = AX$, jest sumą prostą n swoich nieprzywiedlnych podreprezentacji $\rho^i : GL(n, K) \rightarrow \text{Aut}(U_i)$, gdzie U_i jest podprzestrzenią przestrzeni $M_n(K)$ złożoną z macierzy, których wszystkie kolumny prócz i -tej są zerowe.
- Reprezentacja grupy $GL(n, K)$ w $M_n(K)$, $\rho_A(X) = AXA^{-1}$, jest sumą prostą podreprezentacji stopnia 1 oraz podreprezentacji stopnia $n^2 - 1$, gdy $\text{char}(K) \nmid n$.
- Reprezentacja regularna skończonej grupy G jest sumą prostą reprezentacji stopnia 1 oraz reprezentacji stopnia $|G| - 1$, gdy $\text{char}(K) \nmid n$.

Ogólne założenie: $|G| < \infty$, $K = \mathbb{C}$.

Ogólne założenie: $|G| < \infty$, $K = \mathbb{C}$.

Definicja

Niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie zespoloną reprezentacją skończonej grupy G .

Charakterem reprezentacji ρ nazywamy funkcję $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$, $\chi_\rho(s) := \text{tr}(\rho_s)$.

Ogólne założenie: $|G| < \infty$, $K = \mathbb{C}$.

Definicja

Niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie zespoloną reprezentacją skończonej grupy G .

Charakterem reprezentacji ρ nazywamy funkcję $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$, $\chi_\rho(s) := \text{tr}(\rho_s)$.

Uwaga

Jeśli $r(s) = k$, to $\chi_\rho(s)$ jest sumą k -tego stopnia pierwiastków z 1 w ilości $\dim V$.

Ogólne założenie: $|G| < \infty$, $K = \mathbb{C}$.

Definicja

Niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie zespoloną reprezentacją skończonej grupy G .

Charakterem reprezentacji ρ nazywamy funkcję $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$, $\chi_\rho(s) := \text{tr}(\rho_s)$.

Uwaga

Jeśli $r(s) = k$, to $\chi_\rho(s)$ jest sumą k -tego stopnia pierwiastków z 1 w ilości $\dim V$.

Twierdzenie

Jeśli χ jest charakterem reprezentacji stopnia n , to

- 1 $\chi(1) = n$,
- 2 $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$,
- 3 $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$

Ogólne założenie: $|G| < \infty$, $K = \mathbb{C}$.

Definicja

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie zespoloną reprezentacją skończonej grupy G .

Charakterem reprezentacji ρ nazywamy funkcję $\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $\chi_\rho(s) := \text{tr}(\rho_s)$.

Uwaga

Jeśli $r(s) = k$, to $\chi_\rho(s)$ jest sumą k -tego stopnia pierwiastków z 1 w ilości $\dim V$.

Twierdzenie

Jeśli χ jest charakterem reprezentacji stopnia n , to

- 1 $\chi(1) = n$,
- 2 $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$,
- 3 $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$

Uwaga

Reprezentacje równoważne mają te same charaktery.

Ogólne założenie: $|G| < \infty$, $K = \mathbb{C}$.

Definicja

Niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie zespoloną reprezentacją skończonej grupy G .

Charakterem reprezentacji ρ nazywamy funkcję $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$, $\chi_\rho(s) := \text{tr}(\rho_s)$.

Uwaga

Jeśli $r(s) = k$, to $\chi_\rho(s)$ jest sumą k -tego stopnia pierwiastków z 1 w ilości $\dim V$.

Twierdzenie

Jeśli χ jest charakterem reprezentacji stopnia n , to

- 1 $\chi(1) = n$,
- 2 $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$,
- 3 $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$

Uwaga

Reprezentacje równoważne mają te same charaktery.

Twierdzenie

Jeżeli $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ jest sumą reprezentacji $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(U_i)$, $i = 1, 2$, to charakter reprezentacji ρ jest sumą charakterów reprezentacji ρ^1 oraz ρ^2 .

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią G -niezmienniczą reprezentacji ρ^1 .

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią G -niezmienniczą reprezentacji ρ^1 . Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho_s^1(\alpha)) = \rho_s^2(f(\alpha)) = \rho_s^2(\theta) = \theta,$$

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią G -niezmienniczą reprezentacji ρ^1 . Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho_s^1(\alpha)) = \rho_s^2(f(\alpha)) = \rho_s^2(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho_s^1(\alpha) \in \ker f$.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią G -niezmienniczą reprezentacji ρ^1 . Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho_s^1(\alpha)) = \rho_s^2(f(\alpha)) = \rho_s^2(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho_s^1(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią G -niezmienniczą reprezentacji ρ^1 . Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho_s^1(\alpha)) = \rho_s^2(f(\alpha)) = \rho_s^2(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho_s^1(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$. Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \text{im} f$ równa jest V_2 .

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią G -niezmienniczą reprezentacji ρ^1 . Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho_s^1(\alpha)) = \rho_s^2(f(\alpha)) = \rho_s^2(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho_s^1(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$. Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \text{im} f$ równa jest V_2 . Zatem f jest izomorfizmem i reprezentacje są równoważne.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią G -niezmienniczą reprezentacji ρ^1 . Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho_s^1(\alpha)) = \rho_s^2(f(\alpha)) = \rho_s^2(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho_s^1(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$.

Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \text{im} f$ równa jest V_2 .

Zatem f jest izomorfizmem i reprezentacje są równoważne.

Założmy, że $V = V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$.

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią G -niezmienniczą reprezentacji ρ^1 . Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho_s^1(\alpha)) = \rho_s^2(f(\alpha)) = \rho_s^2(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho_s^1(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$. Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \text{im} f$ równa jest V_2 .

Zatem f jest izomorfizmem i reprezentacje są równoważne.

Założmy, że $V = V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$. Rozważmy odwzorowanie $f' := f - \lambda \text{id}_V$, gdzie λ jest wartością własną odwzorowania f .

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią G -niezmienniczą reprezentacji ρ^1 . Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho_s^1(\alpha)) = \rho_s^2(f(\alpha)) = \rho_s^2(0) = 0,$$

czyli $\rho_s^1(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$. Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \text{im} f$ równa jest V_2 .

Zatem f jest izomorfizmem i reprezentacje są równoważne.

Założmy, że $V = V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$. Rozważmy odwzorowanie $f' := f - \lambda \text{id}_V$, gdzie λ jest wartością własną odwzorowania f . Zauważmy, że f' spełnia warunek (*)

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią G -niezmienniczą reprezentacji ρ^1 . Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho_s^1(\alpha)) = \rho_s^2(f(\alpha)) = \rho_s^2(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho_s^1(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$. Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \text{im} f$ równa jest V_2 .

Zatem f jest izomorfizmem i reprezentacje są równoważne.

Założmy, że $V = V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$. Rozważmy odwzorowanie $f' := f - \lambda \text{id}_V$, gdzie λ jest wartością własną odwzorowania f . Zauważmy, że f' spełnia warunek (*) i ma nietrywialne jądro,

Stwierdzenie (lemat Schura)

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy G oraz niech $f : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$(*) \quad \forall_{s \in G} \rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $f = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to f jest homotetią.

Dowód. Załóżmy, że $f \neq 0$. Zauważmy, że $W_1 = \ker f$ jest podprzestrzenią G -niezmienniczą reprezentacji ρ^1 . Faktycznie, jeżeli $\alpha \in \ker f$, to na postawie (*) mamy

$$f(\rho_s^1(\alpha)) = \rho_s^2(f(\alpha)) = \rho_s^2(\theta) = \theta,$$

czyli $\rho_s^1(\alpha) \in \ker f$. Ponieważ ρ^1 jest reprezentacją nieprzywiedlną, więc $W_1 = \{\theta\}$. Podobnie pokazuje się, że podprzestrzeń $W_2 = \text{im} f$ równa jest V_2 .

Zatem f jest izomorfizmem i reprezentacje są równoważne.

Założmy, że $V = V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$. Rozważmy odwzorowanie $f' := f - \lambda \text{id}_V$, gdzie λ jest wartością własną odwzorowania f . Zauważmy, że f' spełnia warunek (*) i ma nietrywialne jądro, więc $f' = 0$, tzn. $f = \lambda \text{id}_V$. ♣

Wniosek

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi skończonej grupy G rzędu g oraz niech $h : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym.

Wniosek

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi skończonej grupy G rzędu g oraz niech $h : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho_s^2)^{-1} \circ h \circ \rho_s^1 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho_{s^{-1}}^2) \circ h \circ \rho_s^1.$$

Wniosek

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi skończonej grupy G rzędu g oraz niech $h : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho_s^2)^{-1} \circ h \circ \rho_s^1 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho_{s^{-1}}^2) \circ h \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $h^0 = 0$.

Wniosek

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi skończonej grupy G rzędu g oraz niech $h : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho_s^2)^{-1} \circ h \circ \rho_s^1 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho_{s^{-1}}^2) \circ h \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $h^0 = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to h^0 jest homotetią o współczynniku $\frac{1}{n} \text{tr}(h)$, gdzie $n = \dim V_1$.

Wniosek

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi skończonej grupy G rzędu g oraz niech $h : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho_s^2)^{-1} \circ h \circ \rho_s^1 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho_{s^{-1}}^2) \circ h \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $h^0 = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to h^0 jest homotetią o współczynniku $\frac{1}{n} \text{tr}(h)$, gdzie $n = \dim V_1$.

Wniosek

Niech $\rho^i : G \rightarrow \text{Aut}(V_i)$, $i = 1, 2$, będą zespolonymi reprezentacjami nieprzywiedlnymi skończonej grupy G rzędu g oraz niech $h : V_1 \rightarrow V_2$ będzie przekształceniem liniowym. Niech

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho_s^2)^{-1} \circ h \circ \rho_s^1 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} (\rho_{s^{-1}}^2) \circ h \circ \rho_s^1.$$

Wtedy

- 1 Jeśli ρ^1 oraz ρ^2 nie są równoważne, to $h^0 = 0$.
- 2 Jeśli $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$, to h^0 jest homotetią o współczynniku $\frac{1}{n} \text{tr}(h)$, gdzie $n = \dim V_1$.

Dowód. Na tablicy sprawdzić warunek (*) dla h^0 i zauważyć, że $\text{tr}(h^0) = \text{tr}(h)$. ♣

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ_t^1 , ρ_t^2 , h będą odpowiednio $(a_{kl}(s))$, $(b_{ij}(s))$, (c_{jk}) .

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ_t^1, ρ_t^2, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s)), (c_{jk})$. Wtedy macierzą h^0 jest (c_{il}^0) , gdzie

$$c_{il}^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \sum_{j, k} b_{ij}(s^{-1}) c_{jk} a_{kl}(s) = \sum_{j, k} \left(\frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) \right) c_{jk}.$$

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ_t^1, ρ_t^2, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s)), (c_{jk})$. Wtedy macierzą h^0 jest (c_{il}^0) , gdzie

$$c_{il}^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \sum_{j,k} b_{ij}(s^{-1}) c_{jk} a_{kl}(s) = \sum_{j,k} \left(\frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) \right) c_{jk}.$$

Wyrażenie po prawej stronie jest formą liniową względem c_{jk}

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ_t^1, ρ_t^2, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s)), (c_{jk})$. Wtedy macierzą h^0 jest (c_{il}^0) , gdzie

$$c_{il}^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \sum_{j,k} b_{ij}(s^{-1}) c_{jk} a_{kl}(s) = \sum_{j,k} \left(\frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) \right) c_{jk}.$$

Wyrażenie po prawej stronie jest formą liniową względem c_{jk} i ponieważ w przypadku (1) znika dla dowolnych wartości dla każdego układu c_{jk} ,

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ_t^1, ρ_t^2, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s)), (c_{jk})$. Wtedy macierzą h^0 jest (c_{il}^0) , gdzie

$$c_{il}^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \sum_{j, k} b_{ij}(s^{-1}) c_{jk} a_{kl}(s) = \sum_{j, k} \left(\frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) \right) c_{jk}.$$

Wyrażenie po prawej stronie jest formą liniową względem c_{jk} i ponieważ w przypadku (1) znika dla dowolnych wartości dla każdego układu c_{jk} , więc mamy

$$\forall_{i, j, k, l} \frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) = 0.$$

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ_t^1, ρ_t^2, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s)), (c_{jk})$. Wtedy macierzą h^0 jest (c_{il}^0) , gdzie

$$c_{il}^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \sum_{j,k} b_{ij}(s^{-1}) c_{jk} a_{kl}(s) = \sum_{j,k} \left(\frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) \right) c_{jk}.$$

Wyrażenie po prawej stronie jest formą liniową względem c_{jk} i ponieważ w przypadku (1) znika dla dowolnych wartości dla każdego układu c_{jk} , więc mamy

$$\forall_{i,j,k,l} \frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) = 0.$$

W przypadku (2) macierze $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s))$ są równe oraz $c_{il}^0 = \frac{1}{n} \delta_{il} \sum_{j,k} \delta_{jk} c_{jk}$,

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ_t^1, ρ_t^2, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s)), (c_{jk})$. Wtedy macierzą h^0 jest (c_{il}^0) , gdzie

$$c_{il}^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \sum_{j, k} b_{ij}(s^{-1}) c_{jk} a_{kl}(s) = \sum_{j, k} \left(\frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) \right) c_{jk}.$$

Wyrażenie po prawej stronie jest formą liniową względem c_{jk} i ponieważ w przypadku (1) znika dla dowolnych wartości dla każdego układu c_{jk} , więc mamy

$$\forall_{i, j, k, l} \frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) = 0.$$

W przypadku (2) macierze $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s))$ są równe oraz $c_{il}^0 = \frac{1}{n} \delta_{il} \sum_{j, k} \delta_{jk} c_{jk}$, więc

$$\sum_{j, k} \frac{1}{n} \delta_{il} \delta_{jk} c_{jk} = \sum_{j, k} \left(\frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) \right) c_{jk}.$$

Wersja macierzowa wniosku Niech macierzami ρ_t^1, ρ_t^2, h będą odpowiednio $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s)), (c_{jk})$. Wtedy macierzą h^0 jest (c_{il}^0) , gdzie

$$c_{il}^0 = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \sum_{j, k} b_{ij}(s^{-1}) c_{jk} a_{kl}(s) = \sum_{j, k} \left(\frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) \right) c_{jk}.$$

Wyrażenie po prawej stronie jest formą liniową względem c_{jk} i ponieważ w przypadku (1) znika dla dowolnych wartości dla każdego układu c_{jk} , więc mamy

$$\forall_{i, j, k, l} \frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) = 0.$$

W przypadku (2) macierze $(a_{kl}(s)), (b_{ij}(s))$ są równe oraz $c_{il}^0 = \frac{1}{n} \delta_{il} \sum_{j, k} \delta_{jk} c_{jk}$, więc

$$\sum_{j, k} \frac{1}{n} \delta_{il} \delta_{jk} c_{jk} = \sum_{j, k} \left(\frac{1}{g} \sum_{s \in G} b_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) \right) c_{jk}.$$

i wtedy mamy

$$\forall_{i, j, k, l} \frac{1}{g} \sum_{s \in G} a_{ij}(s^{-1}) a_{kl}(s) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{jeśli } i = l, j = k \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad \clubsuit$$

Niech G będzie grupą skończoną. W zbiorze \mathbb{C}^G określamy odwzorowanie

$$(\cdot | \cdot) : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi | \psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s) \overline{\psi(s)}.$$

Niech G będzie grupą skończoną. W zbiorze \mathbb{C}^G określamy odwzorowanie

$$(\cdot | \cdot) : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi | \psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s) \overline{\psi(s)}.$$

Uwaga Odwzorowanie ma następujące własności:

❶ Jest półtoraliniowe, tzn.

$$(a\varphi + b\psi, \sigma) = a(\varphi, \sigma) + b(\psi, \sigma)$$

$$(\sigma, a\varphi + b\psi) = \bar{a}(\sigma, \varphi) + \bar{b}(\sigma, \psi).$$

Niech G będzie grupą skończoną. W zbiorze \mathbb{C}^G określamy odwzorowanie

$$(\cdot | \cdot) : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi | \psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s) \overline{\psi(s)}.$$

Uwaga Odwzorowanie ma następujące własności:

- 1 Jest półtoraliniowe, tzn.

$$(a\varphi + b\psi, \sigma) = a(\varphi, \sigma) + b(\psi, \sigma)$$

$$(\sigma, a\varphi + b\psi) = \bar{a}(\sigma, \varphi) + \bar{b}(\sigma, \psi).$$

- 2 $(\varphi | \varphi)$ jest liczbą rzeczywistą oraz $(\varphi | \varphi) > 0$ dla $\varphi \neq 0$.

Niech G będzie grupą skończoną. W zbiorze \mathbb{C}^G określamy odwzorowanie

$$(\cdot | \cdot) : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi | \psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s) \overline{\psi(s)}.$$

Uwaga Odwzorowanie ma następujące własności:

- 1 Jest półtoraliniowe, tzn.

$$(a\varphi + b\psi, \sigma) = a(\varphi, \sigma) + b(\psi, \sigma)$$

$$(\sigma, a\varphi + b\psi) = \bar{a}(\sigma, \varphi) + \bar{b}(\sigma, \psi).$$

- 2 $(\varphi | \varphi)$ jest liczbą rzeczywistą oraz $(\varphi | \varphi) > 0$ dla $\varphi \neq 0$.
- 3 $(\varphi | \psi) = \overline{(\psi | \varphi)}$.

Niech G będzie grupą skończoną. W zbiorze \mathbb{C}^G określamy odwzorowanie

$$(\cdot | \cdot) : \mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi | \psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s) \overline{\psi(s)}.$$

Uwaga Odwzorowanie ma następujące własności:

- 1 Jest półtoraliniowe, tzn.

$$(a\varphi + b\psi, \sigma) = a(\varphi, \sigma) + b(\psi, \sigma)$$

$$(\sigma, a\varphi + b\psi) = \bar{a}(\sigma, \varphi) + \bar{b}(\sigma, \psi).$$

- 2 $(\varphi | \varphi)$ jest liczbą rzeczywistą oraz $(\varphi | \varphi) > 0$ dla $\varphi \neq 0$.

- 3 $(\varphi | \psi) = \overline{(\psi | \varphi)}$.

- 4 Jeśli φ oraz ψ są charakterami, to $(\varphi | \psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi(s) \psi(s^{-1})$.

Twierdzenie

- 1 Jeśli χ jest charakterem reprezentacji grupy G , to $(\chi|\chi) = 1$, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym (pokażemy później implikację w drugą stronę).

Twierdzenie

- 1 Jeśli χ jest charakterem reprezentacji grupy G , to $(\chi|\chi) = 1$, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym (pokażemy później implikację w drugą stronę).
- 2 Jeśli χ oraz χ' są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych nierównoważnych, to $(\chi|\chi') = 0$.

Twierdzenie

- 1 Jeśli χ jest charakterem reprezentacji grupy G , to $(\chi|\chi) = 1$, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym (pokażemy później implikację w drugą stronę).
- 2 Jeśli χ oraz χ' są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych nierównoważnych, to $(\chi|\chi') = 0$.

Twierdzenie

- 1 Jeśli χ jest charakterem reprezentacji grupy G , to $(\chi|\chi) = 1$, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym (pokażemy później implikację w drugą stronę).
- 2 Jeśli χ oraz χ' są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych nierównoważnych, to $(\chi|\chi') = 0$.

Dowód. Niech $\rho_s = (a_{ij}(s))$, $\rho'_s = (b_{ij}(s))$, $\chi(s) = \sum_i a_{ii}(s)$, $\chi'(s) = \sum_j b_{jj}(s)$.

Twierdzenie

- 1 Jeśli χ jest charakterem reprezentacji grupy G , to $(\chi|\chi) = 1$, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym (pokażemy później implikację w drugą stronę).
- 2 Jeśli χ oraz χ' są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych nierównoważnych, to $(\chi|\chi') = 0$.

Dowód. Niech $\rho_s = (a_{ij}(s))$, $\rho'_s = (b_{ij}(s))$, $\chi(s) = \sum_i a_{ii}(s)$, $\chi'(s) = \sum_j b_{jj}(s)$.

Wtedy

$$(\chi, \chi') = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \sum_{i,j} a_{ii}(s) b_{jj}(s^{-1}) =$$

Twierdzenie

- 1 Jeśli χ jest charakterem reprezentacji grupy G , to $(\chi|\chi) = 1$, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym (pokażemy później implikację w drugą stronę).
- 2 Jeśli χ oraz χ' są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych nierównoważnych, to $(\chi|\chi') = 0$.

Dowód. Niech $\rho_s = (a_{ij}(s))$, $\rho'_s = (b_{ij}(s))$, $\chi(s) = \sum_i a_{ii}(s)$, $\chi'(s) = \sum_j b_{jj}(s)$.

Wtedy

$$(\chi, \chi') = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \sum_{i,j} a_{ii}(s) b_{jj}(s^{-1}) = \begin{cases} 1, & \text{w pierwszym przypadku} \\ 0, & \text{w drugim przypadku} \end{cases}$$

Twierdzenie

- 1 Jeśli χ jest charakterem reprezentacji grupy G , to $(\chi|\chi) = 1$, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym (pokażemy później implikację w drugą stronę).
- 2 Jeśli χ oraz χ' są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych nierównoważnych, to $(\chi|\chi') = 0$.

Dowód. Niech $\rho_s = (a_{ij}(s))$, $\rho'_s = (b_{ij}(s))$, $\chi(s) = \sum_i a_{ii}(s)$, $\chi'(s) = \sum_j b_{jj}(s)$.

Wtedy

$$(\chi, \chi') = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \sum_{i,j} a_{ii}(s) b_{jj}(s^{-1}) = \begin{cases} 1, & \text{w pierwszym przypadku} \\ 0, & \text{w drugim przypadku} \end{cases} \clubsuit$$

Twierdzenie

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy skończonej G oraz niech χ będzie jej charakterem.

Twierdzenie

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy skończonej G oraz niech χ będzie jej charakterem. Niech

$$(*) \quad \rho = \rho^1 \oplus \dots \oplus \rho^k$$

będzie rozkładem na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych wyznaczonym przez ten rozkład przestrzeni V .

Twierdzenie

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy skończonej G oraz niech χ będzie jej charakterem. Niech

$$(*) \quad \rho = \rho^1 \oplus \dots \oplus \rho^k$$

będzie rozkładem na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych wyznaczonym przez ten rozkład przestrzeni V . Jeśli $\rho' : G \longrightarrow \text{Aut}(W)$ jest reprezentacją nieprzywiedlną grupy G o charakterze χ' , to liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w powyższym rozkładzie równoważnych ρ' jest równa $(\chi|\chi')$.

Twierdzenie

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy skończonej G oraz niech χ będzie jej charakterem. Niech

$$(*) \quad \rho = \rho^1 \oplus \dots \oplus \rho^k$$

będzie rozkładem na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych wyznaczonym przez ten rozkład przestrzeni V . Jeśli $\rho' : G \longrightarrow \text{Aut}(W)$ jest reprezentacją nieprzywiedlną grupy G o charakterze χ' , to liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w powyższym rozkładzie równoważnych ρ' jest równa $(\chi|\chi')$.

Dowód. Niech χ_i będzie charakterem reprezentacji ρ_i dla $i = 1, \dots, k$.

Twierdzenie

Niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy skończonej G oraz niech χ będzie jej charakterem. Niech

$$(*) \quad \rho = \rho^1 \oplus \dots \oplus \rho^k$$

będzie rozkładem na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych wyznaczonym przez ten rozkład przestrzeni V . Jeśli $\rho' : G \rightarrow \text{Aut}(W)$ jest reprezentacją nieprzywiedlną grupy G o charakterze χ' , to liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w powyższym rozkładzie równoważnych ρ' jest równa $(\chi|\chi')$.

Dowód. Niech χ_i będzie charakterem reprezentacji ρ_i dla $i = 1, \dots, k$.

Wtedy $\chi = \chi_1 + \dots + \chi_k$ oraz

$$(\chi, \chi') = (\chi_1 + \dots + \chi_k, \chi') = (\chi_1, \chi') + \dots + (\chi_k, \chi') = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k,$$

gdzie

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \rho^i \cong \rho' \\ 0, & \text{gdy } \rho^i \not\cong \rho' \end{cases} \cdot \clubsuit$$

Wnioski

- Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w rozkładzie (*) równoważnych ustalonej reprezentacji nieprzywiedlnej nie zależy od rozkładu.

Wnioski

- Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w rozkładzie (*) równoważnych ustalonej reprezentacji nieprzywiedlnej nie zależy od rozkładu.
- Dwie reprezentacje grupy G są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe charaktery.

Wnioski

- Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w rozkładzie (*) równoważnych ustalonej reprezentacji nieprzywiedlnej nie zależy od rozkładu.
- Dwie reprezentacje grupy G są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe charaktery.
- Jeśli $\rho = m_1\rho^1 \oplus \dots \oplus m_k\rho^k$ jest rozkładem reprezentacji o charakterze χ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych, to

$$(\chi|\chi) = \sum_{i=1}^k m_i^2.$$

Wnioski

- Liczba reprezentacji nieprzywiedlnych występujących w rozkładzie (*) równoważnych ustalonej reprezentacji nieprzywiedlnej nie zależy od rozkładu.
- Dwie reprezentacje grupy G są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe charaktery.
- Jeśli $\rho = m_1\rho^1 \oplus \dots \oplus m_k\rho^k$ jest rozkładem reprezentacji o charakterze χ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych, to

$$(\chi|\chi) = \sum_{i=1}^k m_i^2.$$

- $(\chi|\chi) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy χ jest charakterem nieprzywiedlnym.

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases} .$$

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases} .$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \text{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \text{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \text{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \text{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \text{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ grupy G .

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \text{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ grupy G . Wtedy liczba podreprezentacji reprezentacji regularnej równoważnych ρ jest równa

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \text{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ grupy G . Wtedy liczba podreprezentacji reprezentacji regularnej równoważnych ρ jest równa

$$(r_G, \chi) =$$

Stwierzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \text{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ grupy G . Wtedy liczba podreprezentacji reprezentacji regularnej równoważnych ρ jest równa

$$(r_G, \chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} r_G(s) \chi(s^{-1}) =$$

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \text{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ grupy G . Wtedy liczba podreprezentacji reprezentacji regularnej równoważnych ρ jest równa

$$(r_G, \chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} r_G(s) \chi(s^{-1}) = \frac{1}{|G|} r_G(1) \chi(1) =$$

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \text{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ grupy G . Wtedy liczba podreprezentacji reprezentacji regularnej równoważnych ρ jest równa

$$(r_G, \chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} r_G(s) \chi(s^{-1}) = \frac{1}{|G|} r_G(1) \chi(1) = \chi(1) =$$

Stwierdzenie

Charakter r_G reprezentacji regularnej grupy G wyraża się wzorem

$$r_G(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases}.$$

Dowód. Przypomnijmy definicję reprezentacji regularnej:

$$V = \text{lin}(\{e_g : g \in G\}), \quad \rho_s(e_g) = e_{sg}.$$

Zatem macierz automorfizmu ρ_s w bazie $(e_g)_{g \in G}$ jest macierzą jednostkową, gdy $s = 1$ i ma na przekątnej same zera, gdy $s \neq 1$. ♣

Wniosek

Każda reprezentacja nieprzywiedlna grupy G jest równoważna podreprezentacji reprezentacji regularnej tej grupy z krotnością równą swojemu stopniowi.

Dowód. Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ grupy G . Wtedy liczba podreprezentacji reprezentacji regularnej równoważnych ρ jest równa

$$(r_G, \chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} r_G(s) \chi(s^{-1}) = \frac{1}{|G|} r_G(1) \chi(1) = \chi(1) = \text{st } \rho. \quad \clubsuit$$

Wniosek

- 1 Jeżeli n_1, \dots, n_h są stopniami wszystkich reprezentacji nieprzywiedlnych grupy skończonej G , to

$$\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|.$$

Wniosek

- ❶ Jeżeli n_1, \dots, n_h są stopniami wszystkich reprezentacji nieprzywiedlnych grupy skończonej G , to

$$\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|.$$

- ❷ Jeśli $1 \neq s \in G$ oraz χ_1, \dots, χ_h są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G , to

$$\sum_{i=1}^h n_i \chi_i(s) = 0.$$

Wniosek

- ❶ Jeżeli n_1, \dots, n_h są stopniami wszystkich reprezentacji nieprzywiedlnych grupy skończonej G , to

$$\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|.$$

- ❷ Jeśli $1 \neq s \in G$ oraz χ_1, \dots, χ_h są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G , to

$$\sum_{i=1}^h n_i \chi_i(s) = 0.$$

Wniosek

- ❶ Jeżeli n_1, \dots, n_h są stopniami wszystkich reprezentacji nieprzywiedlnych grupy skończonej G , to

$$\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|.$$

- ❷ Jeśli $1 \neq s \in G$ oraz χ_1, \dots, χ_h są charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G , to

$$\sum_{i=1}^h n_i \chi_i(s) = 0.$$

Dowód. Z poprzedniego wniosku oraz stwierdzenia mamy

$$r_G(s) = \sum_{i=1}^h n_i \chi_i(s) = \begin{cases} |G|, & \text{gdy } s = 1 \\ 0, & \text{gdy } s \neq 1 \end{cases} \quad \clubsuit$$

Wyprowadziliśmy bardzo ważny wzór dotyczący stopni reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|.$$

Wyprowadziliśmy bardzo ważny wzór dotyczący stopni reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|.$$

Uwagi

- Później pokażemy, że jeszcze dodatkowo $n_i \mid |G|$.

Wyprowadziliśmy bardzo ważny wzór dotyczący stopni reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|.$$

Uwagi

- Później pokażemy, że jeszcze dodatkowo $n_i \mid |G|$.
- Zwróćmy uwagę na użyteczność powyższego wzoru, gdy już znamy pewne reprezentacje nieprzywiedlne grupy G .

Wyprowadziliśmy bardzo ważny wzór dotyczący stopni reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|.$$

Uwagi

- Później pokażemy, że jeszcze dodatkowo $n_i \mid |G|$.
- Zwróćmy uwagę na użyteczność powyższego wzoru, gdy już znamy pewne reprezentacje nieprzywiedlne grupy G .
- Jakie możliwe są stopnie reprezentacji nieprzywiedlnych grupy 6-cio elementowej?

Wyprowadziliśmy bardzo ważny wzór dotyczący stopni reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|.$$

Uwagi

- Później pokażemy, że jeszcze dodatkowo $n_i \mid |G|$.
- Zwróćmy uwagę na użyteczność powyższego wzoru, gdy już znamy pewne reprezentacje nieprzywiedlne grupy G .
- Jakie możliwe są stopnie reprezentacji nieprzywiedlnych grupy 6-cio elementowej?

Wyprowadziliśmy bardzo ważny wzór dotyczący stopni reprezentacji nieprzywiedlnych:

$$\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|.$$

Uwagi

- Później pokażemy, że jeszcze dodatkowo $n_i \mid |G|$.
- Zwróćmy uwagę na użyteczność powyższego wzoru, gdy już znamy pewne reprezentacje nieprzywiedlne grupy G .
- Jakie możliwe są stopnie reprezentacji nieprzywiedlnych grupy 6-cio elementowej?
To samo dla grupy 8-mio elementowej.

Definicja

Funkcję $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\forall_{s,t \in G} f(sts^{-1}) = f(t).$$

Definicja

Funkcję $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\forall_{s,t \in G} f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.

Definicja

Funkcję $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\forall_{s,t \in G} f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.
- Funkcje centralne na grupie G tworzą przestrzeń liniową (nad \mathbb{C}).

Definicja

Funkcję $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\forall_{s,t \in G} f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.
- Funkcje centralne na grupie G tworzą przestrzeń liniową (nad \mathbb{C}).

Definicja

Funkcję $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\forall_{s,t \in G} f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.
- Funkcje centralne na grupie G tworzą przestrzeń liniową (nad \mathbb{C}). Jest to podprzestrzeń przestrzeni unitarnej \mathbb{C}^G .

Definicja

Funkcję $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\forall_{s,t \in G} f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.
- Funkcje centralne na grupie G tworzą przestrzeń liniową (nad \mathbb{C}). Jest to podprzestrzeń przestrzeni unitarnej \mathbb{C}^G . Ozn. H .

Definicja

Funkcję $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\forall_{s,t \in G} f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.
- Funkcje centralne na grupie G tworzą przestrzeń liniową (nad \mathbb{C}). Jest to podprzestrzeń przestrzeni unitarnej \mathbb{C}^G . Ozn. H .
Bazą przestrzeni H jest układ funkcji charakterystycznych klas sprzężoności grupy G .

Definicja

Funkcję $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy **funkcją centralną**, jeśli

$$\forall_{s,t \in G} f(sts^{-1}) = f(t).$$

Uwagi

- Charakter reprezentacji jest funkcją centralną.
- Funkcje centralne na grupie G tworzą przestrzeń liniową (nad \mathbb{C}). Jest to podprzestrzeń przestrzeni unitarnej \mathbb{C}^G . Ozn. H .
Bazą przestrzeni H jest układ funkcji charakterystycznych klas sprzężoności grupy G .
Zatem wymiar H jest równy liczbie klas sprzężoności grupy G .

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G .

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G . Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s.$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G . Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ , to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi(s) = \frac{|G|}{n} (f | \bar{\chi}).$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G . Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ , to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi(s) = \frac{|G|}{n} (f|\bar{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t =$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G . Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ , to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi(s) = \frac{|G|}{n} (f|\bar{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t = \rho_t^{-1} \circ \left(\sum_{s \in G} f(s) \rho_s \right) \circ \rho_t$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G . Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ , to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi(s) = \frac{|G|}{n} (f|\bar{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t = \rho_t^{-1} \circ \left(\sum_{s \in G} f(s) \rho_s \right) \circ \rho_t = \sum_{s \in G} f(s) \rho_{t^{-1}st}$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G . Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ , to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi(s) = \frac{|G|}{n} (f|\bar{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t = \rho_t^{-1} \circ \left(\sum_{s \in G} f(s) \rho_s \right) \circ \rho_t = \sum_{s \in G} f(s) \rho_{t^{-1}st} = \sum_{s \in G} f(t^{-1}st) \rho_{t^{-1}st}$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G . Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ , to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi(s) = \frac{|G|}{n} (f|\bar{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t = \rho_t^{-1} \circ \left(\sum_{s \in G} f(s) \rho_s \right) \circ \rho_t = \sum_{s \in G} f(s) \rho_{t^{-1}st} = \sum_{s \in G} f(t^{-1}st) \rho_{t^{-1}st} = \rho_f.$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G . Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ , to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi(s) = \frac{|G|}{n} (f | \bar{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t = \rho_t^{-1} \circ \left(\sum_{s \in G} f(s) \rho_s \right) \circ \rho_t = \sum_{s \in G} f(s) \rho_{t^{-1}st} = \sum_{s \in G} f(t^{-1}st) \rho_{t^{-1}st} = \rho_f.$$

Zatem spełniony jest warunek z wniosku po lemacie Schura i ρ_f jest homotetią

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G . Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ , to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi(s) = \frac{|G|}{n} (f | \bar{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t = \rho_t^{-1} \circ \left(\sum_{s \in G} f(s) \rho_s \right) \circ \rho_t = \sum_{s \in G} f(s) \rho_{t^{-1}st} = \sum_{s \in G} f(t^{-1}st) \rho_{t^{-1}st} = \rho_f.$$

Zatem spełniony jest warunek z wniosku po lemacie Schura i ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \text{tr} \rho_f =$$

Stwierdzenie

Niech f będzie funkcją centralną na grupie G i niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją liniową grupy G . Niech ρ_f będzie endomorfizmem przestrzeni V określonym następująco:

$$\rho_f = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s.$$

Jeśli ρ jest reprezentacją nieprzywiedlną stopnia n o charakterze χ , to ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi(s) = \frac{|G|}{n} (f|\bar{\chi}).$$

Dowód. Mamy

$$\rho_t^{-1} \circ \rho_f \circ \rho_t = \rho_t^{-1} \circ \left(\sum_{s \in G} f(s) \rho_s \right) \circ \rho_t = \sum_{s \in G} f(s) \rho_{t^{-1}st} = \sum_{s \in G} f(t^{-1}st) \rho_{t^{-1}st} = \rho_f.$$

Zatem spełniony jest warunek z wniosku po lemacie Schura i ρ_f jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \text{tr} \rho_f = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi(s) = \frac{|G|}{n} (f|\bar{\chi}). \spadesuit$$

Twierdzenie

Jeśli χ_1, \dots, χ_k są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji ρ^1, \dots, ρ^k grupy G , to χ_1, \dots, χ_k tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G .

Twierdzenie

Jeśli χ_1, \dots, χ_k są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji ρ^1, \dots, ρ^k grupy G , to χ_1, \dots, χ_k tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G .

Dowód. Niech $f \in \text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp =$

Twierdzenie

Jeśli χ_1, \dots, χ_k są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji ρ^1, \dots, ρ^k grupy G , to χ_1, \dots, χ_k tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G .

Dowód. Niech $f \in \text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp = \text{lin}(\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_k})^\perp$,

Twierdzenie

Jeśli χ_1, \dots, χ_k są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji ρ^1, \dots, ρ^k grupy G , to χ_1, \dots, χ_k tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G .

Dowód. Niech $f \in \text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp = \text{lin}(\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$.

Twierdzenie

Jeśli χ_1, \dots, χ_k są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji ρ^1, \dots, ρ^k grupy G , to χ_1, \dots, χ_k tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G .

Dowód. Niech $f \in \text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp = \text{lin}(\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$. Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, \dots, k$ endomorfizm ρ_f^i jest homotetią

Twierdzenie

Jeśli χ_1, \dots, χ_k są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji ρ^1, \dots, ρ^k grupy G , to χ_1, \dots, χ_k tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G .

Dowód. Niech $f \in \text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp = \text{lin}(\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$. Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, \dots, k$ endomorfizm ρ_f^i jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi_i(s) = \frac{|G|}{n} (f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Twierdzenie

Jeśli χ_1, \dots, χ_k są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji ρ^1, \dots, ρ^k grupy G , to χ_1, \dots, χ_k tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G .

Dowód. Niech $f \in \text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp = \text{lin}(\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$. Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, \dots, k$ endomorfizm ρ_f^i jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi_i(s) = \frac{|G|}{n} (f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i wtedy jej charakter $\chi = m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k$.

Twierdzenie

Jeśli χ_1, \dots, χ_k są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji ρ^1, \dots, ρ^k grupy G , to χ_1, \dots, χ_k tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G .

Dowód. Niech $f \in \text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp = \text{lin}(\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$. Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, \dots, k$ endomorfizm ρ_f^i jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi_i(s) = \frac{|G|}{n} (f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i wtedy jej charakter $\chi = m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k$.

Stąd

$$(f|\chi) = (f|m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k) = m_1 (f|\chi_1) + \dots + (f|\chi_k) = 0$$

Twierdzenie

Jeśli χ_1, \dots, χ_k są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji ρ^1, \dots, ρ^k grupy G , to χ_1, \dots, χ_k tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G .

Dowód. Niech $f \in \text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp = \text{lin}(\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$. Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, \dots, k$ endomorfizm ρ_f^i jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi_i(s) = \frac{|G|}{n} (f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i wtedy jej charakter $\chi = m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k$.

Stąd

$$(f|\chi) = (f|m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k) = m_1 (f|\chi_1) + \dots + m_k (f|\chi_k) = 0$$

i $\rho_f = 0$ dla dowolnej reprezentacji grupy G .

Twierdzenie

Jeśli χ_1, \dots, χ_k są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji ρ^1, \dots, ρ^k grupy G , to χ_1, \dots, χ_k tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G .

Dowód. Niech $f \in \text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp = \text{lin}(\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$. Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, \dots, k$ endomorfizm ρ_f^i jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi_i(s) = \frac{|G|}{n} (f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i wtedy jej charakter $\chi = m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k$.

Stąd

$$(f|\chi) = (f|m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k) = m_1 (f|\chi_1) + \dots + (f|\chi_k) = 0$$

i $\rho_f = 0$ dla dowolnej reprezentacji grupy G . W szczególności gdy ρ jest reprezentacją regularną mamy

Twierdzenie

Jeśli χ_1, \dots, χ_k są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji ρ^1, \dots, ρ^k grupy G , to χ_1, \dots, χ_k tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G .

Dowód. Niech $f \in \text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp = \text{lin}(\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$. Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, \dots, k$ endomorfizm ρ_f^i jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi_i(s) = \frac{|G|}{n} (f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i wtedy jej charakter $\chi = m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k$.

Stąd

$$(f|\chi) = (f|m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k) = m_1 (f|\chi_1) + \dots + m_k (f|\chi_k) = 0$$

i $\rho_f = 0$ dla dowolnej reprezentacji grupy G . W szczególności gdy ρ jest reprezentacją regularną mamy

$$0 = \rho_f(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s) \varepsilon_s.$$

Twierdzenie

Jeśli χ_1, \dots, χ_k są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji ρ^1, \dots, ρ^k grupy G , to χ_1, \dots, χ_k tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G .

Dowód. Niech $f \in \text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp = \text{lin}(\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$. Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, \dots, k$ endomorfizm ρ_f^i jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi_i(s) = \frac{|G|}{n} (f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i wtedy jej charakter $\chi = m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k$.

Stąd

$$(f|\chi) = (f|m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k) = m_1 (f|\chi_1) + \dots + m_k (f|\chi_k) = 0$$

i $\rho_f = 0$ dla dowolnej reprezentacji grupy G . W szczególności gdy ρ jest reprezentacją regularną mamy

$$0 = \rho_f(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s) \varepsilon_s.$$

Ponieważ układ $(\varepsilon_s)_{s \in G}$ jest bazą, więc $f = 0$.

Twierdzenie

Jeśli χ_1, \dots, χ_k są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji ρ^1, \dots, ρ^k grupy G , to χ_1, \dots, χ_k tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G .

Dowód. Niech $f \in \text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp = \text{lin}(\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$. Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, \dots, k$ endomorfizm ρ_f^i jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi_i(s) = \frac{|G|}{n} (f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i wtedy jej charakter $\chi = m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k$.

Stąd

$$(f|\chi) = (f|m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k) = m_1 (f|\chi_1) + \dots + (f|\chi_k) = 0$$

i $\rho_f = 0$ dla dowolnej reprezentacji grupy G . W szczególności gdy ρ jest reprezentacją regularną mamy

$$0 = \rho_f(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s) \varepsilon_s.$$

Ponieważ układ $(\varepsilon_s)_{s \in G}$ jest bazą, więc $f = 0$. Pokazaliśmy, że $\text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp = \{0\}$,

Twierdzenie

Jeśli χ_1, \dots, χ_k są charakterami wszystkich nieprzywiedlnych parami nierównoważnych reprezentacji ρ^1, \dots, ρ^k grupy G , to χ_1, \dots, χ_k tworzą bazę ortonormalną przestrzeni H funkcji centralnych określonych na G .

Dowód. Niech $f \in \text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp = \text{lin}(\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_k})^\perp$, tzn. $(f|\overline{\chi_i}) = 0$ dla $i = 1, \dots, k$. Z poprzedniego twierdzenia dla dowolnego $i = 1, \dots, k$ endomorfizm ρ_f^i jest homotetią o współczynniku

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{s \in G} f(s) \chi_i(s) = \frac{|G|}{n} (f|\overline{\chi_i}) = 0.$$

Z wcześniejszych wykładów wiemy, że dowolna reprezentacja jest sumą prostą swoich reprezentacji nieprzywiedlnych i wtedy jej charakter $\chi = m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k$.

Stąd

$$(f|\chi) = (f|m_1 \chi_1 + \dots + m_k \chi_k) = m_1 (f|\chi_1) + \dots + m_k (f|\chi_k) = 0$$

i $\rho_f = 0$ dla dowolnej reprezentacji grupy G . W szczególności gdy ρ jest reprezentacją regularną mamy

$$0 = \rho_f(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s(\varepsilon_1) = \sum_{s \in G} f(s) \varepsilon_s.$$

Ponieważ układ $(\varepsilon_s)_{s \in G}$ jest bazą, więc $f = 0$. Pokazaliśmy, że $\text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k)^\perp = \{0\}$, tzn. $\text{lin}(\chi_1, \dots, \chi_k) = H$. ♣

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Stąd funkcja centralna $f \neq 0$ jest charakterem pewnej reprezentacji wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją charakterów nieprzywiedlnych o nieujemnych współczynnikach.

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Stąd funkcja centralna $f \neq 0$ jest charakterem pewnej reprezentacji wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją charakterów nieprzywiedlnych o nieujemnych współczynnikach.

Wnioski

- Liczba nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G (z dokładnością do równoważności) jest równa liczbie klas sprzężoności grupy G .

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Stąd funkcja centralna $f \neq 0$ jest charakterem pewnej reprezentacji wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją charakterów nieprzywiedlnych o nieujemnych współczynnikach.

Wnioski

- Liczba nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G (z dokładnością do równoważności) jest równa liczbie klas sprzężoności grupy G .
- Skończona grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej reprezentacje są stopnia 1.

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Stąd funkcja centralna $f \neq 0$ jest charakterem pewnej reprezentacji wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją charakterów nieprzywiedlnych o nieujemnych współczynnikach.

Wnioski

- Liczba nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G (z dokładnością do równoważności) jest równa liczbie klas sprzężoności grupy G .
- Skończona grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej reprezentacje są stopnia 1.

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Stąd funkcja centralna $f \neq 0$ jest charakterem pewnej reprezentacji wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją charakterów nieprzywiedlnych o nieujemnych współczynnikach.

Wnioski

- Liczba nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G (z dokładnością do równoważności) jest równa liczbie klas sprzężoności grupy G .
- Skończona grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej reprezentacje są stopnia 1.

Stwierdzenie

Niech $c(s)$ dla $s \in G$ oznacza liczbę elementów w klasie sprzężoności elementu s . Wtedy

$$\sum_{i=1}^k \overline{\chi_i}(s) \chi_i(t) = \begin{cases} \frac{|G|}{c(s)}, & \text{gdy } t \text{ jest sprzężony z } s \\ 0, & \text{gdy } t \text{ nie jest sprzężony z } s \end{cases}.$$

Uwaga Jeśli f jest funkcją centralną i $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_i$, to $\lambda_i = (f|\chi_i)$.

Stąd funkcja centralna $f \neq 0$ jest charakterem pewnej reprezentacji wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją charakterów nieprzywiedlnych o nieujemnych współczynnikach.

Wnioski

- Liczba nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G (z dokładnością do równoważności) jest równa liczbie klas sprzężoności grupy G .
- Skończona grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej reprezentacje są stopnia 1.

Stwierdzenie

Niech $c(s)$ dla $s \in G$ oznacza liczbę elementów w klasie sprzężoności elementu s . Wtedy

$$\sum_{i=1}^k \overline{\chi_i}(s) \chi_i(t) = \begin{cases} \frac{|G|}{c(s)}, & \text{gdy } t \text{ jest sprzężony z } s \\ 0, & \text{gdy } t \text{ nie jest sprzężony z } s \end{cases}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję charakterystyczną f_s klasy sprzężoności elementu s .

Dowód. Rozważmy funkcję charakterystyczną f_s klasy sprzężoności elementu s . Wtedy

$$f_s = \sum_{i=1}^k (f_s | \chi_i) \chi_i =$$

Dowód. Rozważmy funkcję charakterystyczną f_s klasy sprzężoności elementu s . Wtedy

$$f_s = \sum_{i=1}^k (f_s | \chi_i) \chi_i = \sum_{i=1}^k \frac{c(s)}{|G|} \bar{\chi}_i(s) \chi_i.$$

$$f_s(t) = \frac{c(s)}{|G|} \sum_{i=1}^k \bar{\chi}_i(s) \chi_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } t \text{ jest sprzężony z } s \\ 0, & \text{gdy } t \text{ nie jest sprzężony z } s \end{cases} .$$

Dowód. Rozważmy funkcję charakterystyczną f_s klasy sprzężoności elementu s . Wtedy

$$f_s = \sum_{i=1}^k (f_s | \chi_i) \chi_i = \sum_{i=1}^k \frac{c(s)}{|G|} \overline{\chi_i}(s) \chi_i.$$

$$f_s(t) = \frac{c(s)}{|G|} \sum_{i=1}^k \overline{\chi_i}(s) \chi_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } t \text{ jest sprzężony z } s \\ 0, & \text{gdy } t \text{ nie jest sprzężony z } s \end{cases} .$$

Zatem

$$\sum_{i=1}^k \overline{\chi_i}(s) \chi_i(t) = \begin{cases} \frac{|G|}{c(s)}, & \text{gdy } t \text{ jest sprzężony z } s \\ 0, & \text{gdy } t \text{ nie jest sprzężony z } s \end{cases} . \clubsuit$$

Definicja

Niech $1 = s_1, \dots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G

Definicja

Niech $1 = s_1, \dots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G .

Definicja

Niech $1 = s_1, \dots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G . Macierz $T = (a_{ij})$, $a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

Definicja

Niech $1 = s_1, \dots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G . Macierz $T = (a_{ij})$, $a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

	s_1	...	s_k
χ_1	$\chi_1(s_1)$...	$\chi_1(s_k)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
χ_k	$\chi_k(s_1)$...	$\chi_k(s_k)$

Definicja

Niech $1 = s_1, \dots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G . Macierz $T = (a_{ij})$, $a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

	s_1	...	s_k
χ_1	$\chi_1(s_1)$...	$\chi_1(s_k)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
χ_k	$\chi_k(s_1)$...	$\chi_k(s_k)$

Uwagi Niech $c(s)$ będzie liczbą elementów w klasie sprzężoności elementu s .

- 1 Macierz T jest nieosobliwa.

Definicja

Niech $1 = s_1, \dots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G . Macierz $T = (a_{ij})$, $a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

	s_1	...	s_k
χ_1	$\chi_1(s_1)$...	$\chi_1(s_k)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
χ_k	$\chi_k(s_1)$...	$\chi_k(s_k)$

Uwagi Niech $c(s)$ będzie liczbą elementów w klasie sprzężoności elementu s .

- 1 Macierz T jest nieosobliwa.
- 2 W pierwszej kolumnie stoją stopnie reprezentacji.

Definicja

Niech $1 = s_1, \dots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G . Macierz $T = (a_{ij})$, $a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

	s_1	...	s_k
χ_1	$\chi_1(s_1)$...	$\chi_1(s_k)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
χ_k	$\chi_k(s_1)$...	$\chi_k(s_k)$

Uwagi Niech $c(s)$ będzie liczbą elementów w klasie sprzężoności elementu s .

- 1 Macierz T jest nieosobliwa.
- 2 W pierwszej kolumnie stoją stopnie reprezentacji.
- 3 ortogonalność kolumn: $\frac{c(s_r)}{|G|} \sum_{i=1}^k \chi_i(s_p) \overline{\chi_i(s_r)} = \delta_{pr}$

Definicja

Niech $1 = s_1, \dots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G . Macierz $T = (a_{ij})$, $a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

	s_1	...	s_k
χ_1	$\chi_1(s_1)$...	$\chi_1(s_k)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
χ_k	$\chi_k(s_1)$...	$\chi_k(s_k)$

Uwagi Niech $c(s)$ będzie liczbą elementów w klasie sprzężoności elementu s .

- 1 Macierz T jest nieosobliwa.
- 2 W pierwszej kolumnie stoją stopnie reprezentacji.
- 3 ortogonalność kolumn: $\frac{c(s_r)}{|G|} \sum_{i=1}^k \chi_i(s_p) \overline{\chi_i(s_r)} = \delta_{pr}$
- 4 ortogonalność wierszy: $(\chi_i | \chi_j) = \frac{1}{|G|} \sum_{l=1}^k c(s_l) \chi_i(s_l) \overline{\chi_j(s_l)} = \delta_{ij}$

Definicja

Niech $1 = s_1, \dots, s_k$ będą reprezentantami klas sprzężoności skończonej grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G . Macierz $T = (a_{ij})$, $a_{ij} = \chi_i(s_j)$ nazywamy **tablicą charakterów** grupy G

	s_1	...	s_k
χ_1	$\chi_1(s_1)$...	$\chi_1(s_k)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
χ_k	$\chi_k(s_1)$...	$\chi_k(s_k)$

Uwagi Niech $c(s)$ będzie liczbą elementów w klasie sprzężoności elementu s .

❶ Macierz T jest nieosobliwa.

❷ W pierwszej kolumnie stoją stopnie reprezentacji.

❸ ortogonalność kolumn: $\frac{c(s_r)}{|G|} \sum_{i=1}^k \chi_i(s_p) \overline{\chi_i(s_r)} = \delta_{pr}$

❹ ortogonalność wierszy: $(\chi_i | \chi_j) = \frac{1}{|G|} \sum_{l=1}^k c(s_l) \chi_i(s_l) \overline{\chi_j(s_l)} = \delta_{ij}$

❺

$$\sum_{i=1}^k n_i \chi_i(s) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } s \neq 1 \\ |G|, & \text{gdy } s = 1 \end{cases} .$$

Przykład Tablica charakterów grupy $S(3)$.

kl. sprzęż.	id	(1 2)	(1 2 3)
$\frac{ G }{c(s)}$	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2		

Przykład Tablica charakterów grupy $S(3)$.

kl. sprzęż.	id	(1 2)	(1 2 3)
$\frac{ G }{c(s)}$	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	0

Przykład Tablica charakterów grupy $S(3)$.

kl. sprzęż.	id	(1 2)	(1 2 3)
$\frac{ G }{c(s)}$	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Przykład Tablica charakterów grupy $S(3)$.

kl. sprzęż.	id	(1 2)	(1 2 3)
$\frac{ G }{c(s)}$	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Uwaga Faktycznie reprezentacja ρ^3 ma postać

$$\rho^3((1\ 2)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^3((1\ 2\ 3)) = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Przykład Tablica charakterów grupy $S(3)$.

kl. sprzęż.	id	(1 2)	(1 2 3)
$\frac{ G }{c(s)}$	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Uwaga Faktycznie reprezentacja ρ^3 ma postać

$$\rho^3((1\ 2)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^3((1\ 2\ 3)) = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

i jej charakter jest taki jak to wyliczyliśmy.

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G .

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G .
Możliwe są następujące sytuacje:

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G .

Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad \mathbb{R}).

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G .

Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad \mathbb{R}).
- Reprezentacja ρ nie jest rzeczywista i żadna jej równoważna nie jest rzeczywista, ale jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste.

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G .

Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad \mathbb{R}).
- Reprezentacja ρ nie jest rzeczywista i żadna jej równoważna nie jest rzeczywista, ale jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste.
- Charakter reprezentacji ρ nie jest rzeczywisty (wtedy ρ nie jest równoważna żadnej reprezentacji rzeczywistej).

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G .

Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad \mathbb{R}).
- Reprezentacja ρ nie jest rzeczywista i żadna jej równoważna nie jest rzeczywista, ale jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste.
- Charakter reprezentacji ρ nie jest rzeczywisty (wtedy ρ nie jest równoważna żadnej reprezentacji rzeczywistej).

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G .

Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad \mathbb{R}).
- Reprezentacja ρ nie jest rzeczywista i żadna jej równoważna nie jest rzeczywista, ale jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste.
- Charakter reprezentacji ρ nie jest rzeczywisty (wtedy ρ nie jest równoważna żadnej reprezentacji rzeczywistej).

Definicja

Element g grupy G nazywamy **elementem rzeczywistym**, jeśli jest sprzężony z g^{-1} . Jeżeli g jest elementem rzeczywistym, to klasę elementów sprzężonych $g^G := \{x^{-1}gx : x \in G\}$ nazywamy rzeczywistą.

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G .

Możliwe są następujące sytuacje:

- Reprezentacja ρ jest równoważna z reprezentacją rzeczywistą σ tzn. taką, której macierze wszystkich σ_g dla $g \in G$ mają współczynniki rzeczywiste. Wtedy jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste (o takim charakterze mówimy, że może być realizowany nad \mathbb{R}).
- Reprezentacja ρ nie jest rzeczywista i żadna jej równoważna nie jest rzeczywista, ale jej charakter przyjmuje wartości rzeczywiste.
- Charakter reprezentacji ρ nie jest rzeczywisty (wtedy ρ nie jest równoważna żadnej reprezentacji rzeczywistej).

Definicja

Element g grupy G nazywamy **elementem rzeczywistym**, jeśli jest sprzężony z g^{-1} . Jeżeli g jest elementem rzeczywistym, to klasę elementów sprzężonych $g^G := \{x^{-1}gx : x \in G\}$ nazywamy rzeczywistą.

Uwaga Jeśli klasa jest rzeczywista, to każdy element tej klasy jest rzeczywisty (*Spróbuj to pokazać - to nie jest trudne*). Ponadto klasa ta zawiera odwrotność każdego swojego elementu.

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech s_1, \dots, s_k oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G , a χ_1, \dots, χ_k wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G .

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech s_1, \dots, s_k oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G , a χ_1, \dots, χ_k wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G .

Niech

$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\dots,k}$$

będzie tablicą charakterów grupy G .

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech s_1, \dots, s_k oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G , a χ_1, \dots, χ_k wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G .

Niech

$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\dots,k}$$

będzie tablicą charakterów grupy G . Jeśli

$$\overline{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,\dots,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,\dots,k},$$

to \overline{X} też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X , tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech s_1, \dots, s_k oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G , a χ_1, \dots, χ_k wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G .

Niech

$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\dots,k}$$

będzie tablicą charakterów grupy G . Jeśli

$$\overline{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,\dots,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,\dots,k},$$

to \overline{X} też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X , tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.

Na tym samym miejscu pozostają wiersze odpowiadające charakterom rzeczywistym.

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech s_1, \dots, s_k oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G , a χ_1, \dots, χ_k wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G .

Niech

$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\dots,k}$$

będzie tablicą charakterów grupy G . Jeśli

$$\overline{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,\dots,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,\dots,k},$$

to \overline{X} też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X , tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.

Na tym samym miejscu pozostają wiersze odpowiadające charakterom rzeczywistym.

Niech

$$P_\sigma = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq \sigma(i) \\ 1, & \text{gdy } j = \sigma(i) \end{cases}.$$

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech s_1, \dots, s_k oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G , a χ_1, \dots, χ_k wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G .

Niech

$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\dots,k}$$

będzie tablicą charakterów grupy G . Jeśli

$$\bar{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,\dots,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,\dots,k},$$

to \bar{X} też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X , tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.

Na tym samym miejscu pozostają wiersze odpowiadające charakterom rzeczywistym.

Niech

$$P_\sigma = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq \sigma(i) \\ 1, & \text{gdy } j = \sigma(i) \end{cases}.$$

Wtedy

$$P_\sigma X = (c_{il}), \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \chi_l(s_j)$$

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech s_1, \dots, s_k oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G , a χ_1, \dots, χ_k wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G .

Niech

$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\dots,k}$$

będzie tablicą charakterów grupy G . Jeśli

$$\bar{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,\dots,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,\dots,k},$$

to \bar{X} też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X , tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.

Na tym samym miejscu pozostają wiersze odpowiadające charakterom rzeczywistym.

Niech

$$P_\sigma = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq \sigma(i) \\ 1, & \text{gdy } j = \sigma(i) \end{cases}.$$

Wtedy

$$P_\sigma X = (c_{il}), \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \chi_l(s_j) = \chi_{\sigma(i)}(s_j) = \overline{\chi_i(s_j)},$$

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech s_1, \dots, s_k oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G , a χ_1, \dots, χ_k wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G .

Niech

$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\dots,k}$$

będzie tablicą charakterów grupy G . Jeśli

$$\bar{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,\dots,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,\dots,k},$$

to \bar{X} też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X , tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.

Na tym samym miejscu pozostają wiersze odpowiadające charakterom rzeczywistym.

Niech

$$P_\sigma = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq \sigma(i) \\ 1, & \text{gdy } j = \sigma(i) \end{cases}.$$

Wtedy

$$P_\sigma X = (c_{il}), \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \chi_l(s_j) = \chi_{\sigma(i)}(s_j) = \overline{\chi_i(s_j)}, \quad \text{tzn. } P_\sigma X = \bar{X}$$

Twierdzenie

Liczba rzeczywistych charakterów nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie rzeczywistych klas elementów sprzężonych tej grupy.

Dowód. Niech s_1, \dots, s_k oznaczają klasy elementów sprzężonych grupy G , a χ_1, \dots, χ_k wszystkie charaktery nieprzywiedlne grupy G .

Niech

$$X = (\chi_i(s_j))_{i,j=1,\dots,k}$$

będzie tablicą charakterów grupy G . Jeśli

$$\bar{X} = (\overline{\chi_i(s_j)})_{i,j=1,\dots,k} = (\chi_i(s_j^{-1}))_{i,j=1,\dots,k},$$

to \bar{X} też jest tablicą charakterów grupy G i jej wiersze są pewną permutacją σ wierszy macierzy X , tzn. $\overline{\chi_i(s_j)} = \chi_{\sigma(i)}(s_j)$.

Na tym samym miejscu pozostają wiersze odpowiadające charakterom rzeczywistym.

Niech

$$P_\sigma = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq \sigma(i) \\ 1, & \text{gdy } j = \sigma(i) \end{cases}.$$

Wtedy

$$P_\sigma X = (c_{il}), \quad c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \chi_l(s_j) = \chi_{\sigma(i)}(s_j) = \overline{\chi_i(s_j)}, \quad \text{tzn. } P_\sigma X = \bar{X}$$

oraz liczba permutacji rzeczywistych grupy G równa się $\text{tr}(P_\sigma)$.

Dla każdej klasy elementów sprzężonych s_i odpowiadająca jej kolumna macierzy X jest równa kolumnie macierzy \overline{X} odpowiadającej klasie \overline{s}_i . Zatem macierze \overline{X} oraz X różnią się też kolejnością kolumn, a na tym samym miejscu pozostają kolumny odpowiadające klasom rzeczywistym.

Dla każdej klasy elementów sprzężonych s_i odpowiadająca jej kolumna macierzy X jest równa kolumnie macierzy \bar{X} odpowiadającej klasie \bar{s}_i . Zatem macierze \bar{X} oraz X różnią się też kolejnością kolumn, a na tym samym miejscu pozostają kolumny odpowiadające klasom rzeczywistym. Zatem istnieje macierz permutacji Q_τ taka, że

$$\bar{X} = XQ_\tau$$

i liczba rzeczywistych klas elementów sprzężonych równa się $\text{tr}(Q_\tau)$.

Dla każdej klasy elementów sprzężonych s_i odpowiadająca jej kolumna macierzy X jest równa kolumnie macierzy \bar{X} odpowiadającej klasie \bar{s}_i . Zatem macierze \bar{X} oraz X różnią się też kolejnością kolumn, a na tym samym miejscu pozostają kolumny odpowiadające klasom rzeczywistym. Zatem istnieje macierz permutacji Q_τ taka, że

$$\bar{X} = XQ_\tau$$

i liczba rzeczywistych klas elementów sprzężonych równa się $\text{tr}(Q_\tau)$.

Ponieważ

$$Q_\tau = X^{-1}\bar{X} = X^{-1}P_\sigma X,$$

więc

liczba rzeczywistych klas = $\text{tr}(Q_\tau) = \text{tr}(P_\sigma) =$ liczba charakterów rzeczywistych. ♣

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.

Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n + 1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.

Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n + 1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych. Wtedy $x^{-1}gx = g^{-1}$ dla pewnego $x \in G$.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.

Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n + 1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych. Wtedy $x^{-1}gx = g^{-1}$ dla pewnego $x \in G$. Stąd $x^{-2}gx^2 = g$ tzn. x^2 , a więc również x^{2k} dla każdego k , jest przemienny z elementem g .

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.

Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n + 1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych. Wtedy $x^{-1}gx = g^{-1}$ dla pewnego $x \in G$. Stąd $x^{-2}gx^2 = g$ tzn. x^2 , a więc również x^{2k} dla każdego k , jest przemienny z elementem g . Z tw. Lagrange'a wynika, że $x = x^{2(n+1)}$, a to oznacza, że x jest przemienny z g

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.

Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n + 1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych. Wtedy $x^{-1}gx = g^{-1}$ dla pewnego $x \in G$. Stąd $x^{-2}gx^2 = g$ tzn. x^2 , a więc również x^{2k} dla każdego k , jest przemienny z elementem g . Z tw. Lagrange'a wynika, że $x = x^{2(n+1)}$, a to oznacza, że x jest przemienny z g tzn. $g = x^{-1}gx = g^{-1}$,

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.

Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n + 1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych. Wtedy $x^{-1}gx = g^{-1}$ dla pewnego $x \in G$. Stąd $x^{-2}gx^2 = g$ tzn. x^2 , a więc również x^{2k} dla każdego k , jest przemienny z elementem g . Z tw. Lagrange'a wynika, że $x = x^{2(n+1)}$, a to oznacza, że x jest przemienny z g tzn. $g = x^{-1}gx = g^{-1}$, czyli $g^2 = 1$.

Wniosek

Grupa G ma nietrywialny rzeczywisty charakter nieprzywiedlny wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest liczbą parzystą.

Dowód. Przypuśćmy, że rząd grupy G jest parzysty. Wtedy grupa G zawiera element rzędu 2 tzn. element $g \in G, g \neq e$ taki, że $g = g^{-1}$. Zatem klasa sprzężoności g^G elementu g jest nietrywialną rzeczywistą klasą elementów sprzężonych.

Przypuśćmy teraz, że rząd G równy jest $2n + 1$ oraz g^G jest rzeczywistą klasą elementów sprzężonych. Wtedy $x^{-1}gx = g^{-1}$ dla pewnego $x \in G$. Stąd $x^{-2}gx^2 = g$ tzn. x^2 , a więc również x^{2k} dla każdego k , jest przemienny z elementem g . Z tw. Lagrange'a wynika, że $x = x^{2(n+1)}$, a to oznacza, że x jest przemienny z g tzn. $g = x^{-1}gx = g^{-1}$, czyli $g^2 = 1$. Skoro rząd grupy G jest nieparzysty, więc $g = e$ i nasza klasa jest trywialna. ♣

Twierdzenie

Niech χ będzie charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ grupy G .
Wtedy NWSR:

- 1 charakter χ może być realizowany nad \mathbb{R} ,
- 2 istnieje nieosobliwa symetryczna forma dwuliniowa $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ taka, że

$$\bigwedge_{\alpha, \beta \in V} \bigwedge_{s \in G} \varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\rho_s(\alpha), \rho_s(\beta)).$$

Twierdzenie

Niech χ będzie charakterem reprezentacji nieprzywiedlnej $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ grupy G .
Wtedy NWSR:

- 1 charakter χ może być realizowany nad \mathbb{R} ,
- 2 istnieje nieosobliwa symetryczna forma dwuliniowa $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ taka, że

$$\bigwedge_{\alpha, \beta \in V} \bigwedge_{s \in G} \varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\rho_s(\alpha), \rho_s(\beta)).$$

Uwaga Gdyby w pierwszym punkcie powyższego twierdzenia żądać jedynie, aby charakter przyjmował wartości rzeczywiste, to w punkcie drugim trzeba zrezygnować z symetryczności wzmiankowanego funkcjonatu dwuliniowego.

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \rightarrow \text{Aut}(W_1), \dots, \rho^k : G \rightarrow \text{Aut}(W_k)$$

grupy G

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \longrightarrow \text{Aut}(W_1), \dots, \rho^k : G \longrightarrow \text{Aut}(W_k)$$

grupy G oraz niech n_1, \dots, n_k będą stopniami tych reprezentacji.

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \longrightarrow \text{Aut}(W_1), \dots, \rho^k : G \longrightarrow \text{Aut}(W_k)$$

grupy G oraz niech n_1, \dots, n_k będą stopniami tych reprezentacji. Ponadto niech

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$$

będzie rozkładem przestrzeni V na sumę prostą podprzestrzeni odpowiadającym podreprezentacjom nieprzywiedlnym.

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \longrightarrow \text{Aut}(W_1), \dots, \rho^k : G \longrightarrow \text{Aut}(W_k)$$

grupy G oraz niech n_1, \dots, n_k będą stopniami tych reprezentacji. Ponadto niech

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$$

będzie rozkładem przestrzeni V na sumę prostą podprzestrzeni odpowiadającym podreprezentacjom nieprzywiedlnym. Dla $i = 1, \dots, k$ niech V_i oznacza sumę prostą tych spośród reprezentacji U_1, \dots, U_m , które są równoważne z ρ^i .

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \rightarrow \text{Aut}(W_1), \dots, \rho^k : G \rightarrow \text{Aut}(W_k)$$

grupy G oraz niech n_1, \dots, n_k będą stopniami tych reprezentacji. Ponadto niech

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$$

będzie rozkładem przestrzeni V na sumę prostą podprzestrzeni odpowiadającym podreprezentacjom nieprzywiedlnym. Dla $i = 1, \dots, k$ niech V_i oznacza sumę prostą tych spośród reprezentacji U_1, \dots, U_m , które są równoważne z ρ^i . Mamy

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k, \quad \chi = l_1\chi_1 + \dots + l_k\chi_k,$$

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \rightarrow \text{Aut}(W_1), \dots, \rho^k : G \rightarrow \text{Aut}(W_k)$$

grupy G oraz niech n_1, \dots, n_k będą stopniami tych reprezentacji. Ponadto niech

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$$

będzie rozkładem przestrzeni V na sumę prostą podprzestrzeni odpowiadającym podreprezentacjom nieprzywiedlnym. Dla $i = 1, \dots, k$ niech V_i oznacza sumę prostą tych spośród reprezentacji U_1, \dots, U_m , które są równoważne z ρ^i . Mamy

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k, \quad \chi = l_1\chi_1 + \dots + l_k\chi_k,$$

(pewne V_i mogą być podprzestrzeniami zerowymi; wtedy $l_i = 0$).

Pytanie Jak rozłożyć reprezentację na sumę prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych?

Niech $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy G oraz niech χ_1, \dots, χ_k będą charakterami wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji

$$\rho^1 : G \rightarrow \text{Aut}(W_1), \dots, \rho^k : G \rightarrow \text{Aut}(W_k)$$

grupy G oraz niech n_1, \dots, n_k będą stopniami tych reprezentacji. Ponadto niech

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$$

będzie rozkładem przestrzeni V na sumę prostą podprzestrzeni odpowiadającym podreprezentacjom nieprzywiedlnym. Dla $i = 1, \dots, k$ niech V_i oznacza sumę prostą tych spośród reprezentacji U_1, \dots, U_m , które są równoważne z ρ^i . Mamy

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k, \quad \chi = l_1\chi_1 + \dots + l_k\chi_k,$$

(pewne V_i mogą być podprzestrzeniami zerowymi; wtedy $l_i = 0$).

Podprzestrzeń V_i nazywamy **składową jednorodną**.

Twierdzenie

- 1 Rozkład $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.

Twierdzenie

- 1 Rozkład $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
- 2 Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i(s)} \rho_s.$$

Twierdzenie

- 1 Rozkład $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
- 2 Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i(s)} \rho_s.$$

Twierdzenie

- 1 Rozkład $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
- 2 Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i(s)} \rho_s.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić część drugą.

Twierdzenie

- 1 Rozkład $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
- 2 Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i}(s) \rho_s.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić część drugą.

Niech

$$f = \frac{n_i}{|G|} \overline{\chi_i}(t).$$

Twierdzenie

- 1 Rozkład $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
- 2 Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i}(s) \rho_s.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić część drugą.

Niech

$$f = \frac{n_i}{|G|} \overline{\chi_i}(t).$$

Wtedy na podstawie stwierdzenia z wcześniejszego wykładu ograniczenie odwzorowania $p_i = \rho_f$ do podreprezentacji nieprzywiedlnej o charakterze χ , mającej stopień n jest homotetią

Twierdzenie

- 1 Rozkład $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
- 2 Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i(s)} \rho_s.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić część drugą.

Niech

$$f = \frac{n_i}{|G|} \overline{\chi_i}(t).$$

Wtedy na podstawie stwierdzenia z wcześniejszego wykładu ograniczenie odwzorowania $p_i = \rho_f$ do podreprezentacji nieprzywiedlnej o charakterze χ , mającej stopień n jest homotetią o współczynniku

$$\lambda_i = \frac{|G|}{n} (f | \overline{\chi}) = \frac{|G|}{n} \sum_{s \in G} \frac{n_i}{|G|^2} \overline{\chi_i(s)} \chi(s) = \frac{n_i}{n} (\chi_i | \chi) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \chi \neq \chi_i \\ 1, & \text{gdy } \chi = \chi_i \end{cases}.$$

Twierdzenie

- 1 Rozkład $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ nie zależy od początkowo wybranego rozkładu ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.
- 2 Rzutowanie p_i przestrzeni V na podprzestrzeń V_i odpowiadające temu rozkładowi jest dane wzorem

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i(s)} \rho_s.$$

Dowód. Wystarczy udowodnić część drugą.

Niech

$$f = \frac{n_i}{|G|} \overline{\chi_i}(t).$$

Wtedy na podstawie stwierdzenia z wcześniejszego wykładu ograniczenie odwzorowania $p_i = \rho_f$ do podreprezentacji nieprzywiedlnej o charakterze χ , mającej stopień n jest homotetią o współczynniku

$$\lambda_i = \frac{|G|}{n} (f | \overline{\chi}) = \frac{|G|}{n} \sum_{s \in G} \frac{n_i}{|G|^2} \overline{\chi_i(s)} \chi(s) = \frac{n_i}{n} (\chi_i | \chi) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \chi \neq \chi_i \\ 1, & \text{gdy } \chi = \chi_i \end{cases}.$$

Zatem p_i jest tożsamością na V_i i odwzorowaniem zerowym na V_j dla $j \neq i$ ♣.

Przykład Niech $H < S(n)$ oraz niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą przestrzeni liniowej V .

Przykład Niech $H < S(n)$ oraz niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą przestrzeni liniowej V .
Zdefiniujmy reprezentację

$$\rho : H \longrightarrow \text{Aut}(V), \quad \rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

Przykład Niech $H < S(n)$ oraz niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą przestrzeni liniowej V .
Zdefiniujmy reprezentację

$$\rho : H \longrightarrow \text{Aut}(V), \quad \rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

Jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(\sigma) = \text{Fix}(\sigma)$.

Przykład Niech $H < S(n)$ oraz niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą przestrzeni liniowej V . Zdefiniujmy reprezentację

$$\rho : H \longrightarrow \text{Aut}(V), \quad \rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

Jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(\sigma) = \text{Fix}(\sigma)$.

Rozważmy grupę $D_4 < S(4)$. Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.

Przykład Niech $H < S(n)$ oraz niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą przestrzeni liniowej V . Zdefiniujmy reprezentację

$$\rho : H \longrightarrow \text{Aut}(V), \quad \rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

Jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(\sigma) = \text{Fix}(\sigma)$.

Rozważmy grupę $D_4 < S(4)$. Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.

Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2b\}$, $\{ab, a^3b\}$,

Przykład Niech $H < S(n)$ oraz niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą przestrzeni liniowej V . Zdefiniujmy reprezentację

$$\rho : H \longrightarrow \text{Aut}(V), \quad \rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

Jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(\sigma) = \text{Fix}(\sigma)$.

Rozważmy grupę $D_4 < S(4)$. Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.

Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2b\}$, $\{ab, a^3b\}$,

a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

D_4	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
	id	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4\ 3\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 3)$	$(1\ 4)(2\ 3)$	$(2\ 4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

$\chi =$

Przykład Niech $H < S(n)$ oraz niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą przestrzeni liniowej V . Zdefiniujmy reprezentację

$$\rho : H \longrightarrow \text{Aut}(V), \quad \rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

Jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(\sigma) = \text{Fix}(\sigma)$.

Rozważmy grupę $D_4 < S(4)$. Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.

Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2b\}$, $\{ab, a^3b\}$,

a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

D_4	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
	id	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4\ 3\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 3)$	$(1\ 4)(2\ 3)$	$(2\ 4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

$$\chi = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5,$$

Przykład Niech $H < S(n)$ oraz niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą przestrzeni liniowej V . Zdefiniujmy reprezentację

$$\rho : H \longrightarrow \text{Aut}(V), \quad \rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

Jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(\sigma) = \text{Fix}(\sigma)$.

Rozważmy grupę $D_4 < S(4)$. Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.

Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2b\}$, $\{ab, a^3b\}$,

a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

D_4	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
	id	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4\ 3\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 3)$	$(1\ 4)(2\ 3)$	$(2\ 4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

$$\chi = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5, \quad \rho_1(e_1) =$$

Przykład Niech $H < S(n)$ oraz niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą przestrzeni liniowej V . Zdefiniujmy reprezentację

$$\rho : H \longrightarrow \text{Aut}(V), \quad \rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

Jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(\sigma) = \text{Fix}(\sigma)$.

Rozważmy grupę $D_4 < S(4)$. Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.

Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2b\}$, $\{ab, a^3b\}$,

a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

D_4	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
	id	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4\ 3\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 3)$	$(1\ 4)(2\ 3)$	$(2\ 4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

$$\chi = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5, \quad \rho_1(e_1) = \frac{1}{8}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_2 + e_3 + e_4 + e_1)$$

$V =$

Przykład Niech $H < S(n)$ oraz niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą przestrzeni liniowej V . Zdefiniujmy reprezentację

$$\rho : H \longrightarrow \text{Aut}(V), \quad \rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

Jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(\sigma) = \text{Fix}(\sigma)$.

Rozważmy grupę $D_4 < S(4)$. Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.

Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2b\}$, $\{ab, a^3b\}$,

a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

D_4	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
	id	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4\ 3\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 3)$	$(1\ 4)(2\ 3)$	$(2\ 4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

$$\chi = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5, \quad \rho_1(e_1) = \frac{1}{8}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_2 + e_3 + e_4 + e_1)$$

$$V = \text{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \oplus$$

Przykład Niech $H < S(n)$ oraz niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą przestrzeni liniowej V . Zdefiniujmy reprezentację

$$\rho : H \longrightarrow \text{Aut}(V), \quad \rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

Jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(\sigma) = \text{Fix}(\sigma)$.

Rozważmy grupę $D_4 < S(4)$. Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.

Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2b\}$, $\{ab, a^3b\}$,

a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

D_4	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
	id	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4\ 3\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 3)$	$(1\ 4)(2\ 3)$	$(2\ 4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

$$\chi = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5, \quad \rho_1(e_1) = \frac{1}{8}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_2 + e_3 + e_4 + e_1)$$

$$V = \text{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \oplus \text{lin}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4) \oplus$$

Przykład Niech $H < S(n)$ oraz niech (e_1, \dots, e_n) będzie bazą przestrzeni liniowej V . Zdefiniujmy reprezentację

$$\rho : H \longrightarrow \text{Aut}(V), \quad \rho_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

Jeśli χ jest charakterem tej reprezentacji, to $\chi(\sigma) = \text{Fix}(\sigma)$.

Rozważmy grupę $D_4 < S(4)$. Jej generatorami są $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)(3, 4)$.

Klasy sprzężoności grupy $D(4)$, to $\{id\}$, $\{a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{b, a^2b\}$, $\{ab, a^3b\}$,

a charaktery nieprzywiedlne tej grupy oraz charakter naszej reprezentacji przyjmują następujące wartości:

D_4	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
	id	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4\ 3\ 2)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 3)$	$(1\ 4)(2\ 3)$	$(2\ 4)$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ	4	0	0	0	0	2	0	2

$$\chi = \chi_1 + \chi_4 + \chi_5, \quad \rho_1(e_1) = \frac{1}{8}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_2 + e_3 + e_4 + e_1)$$

$$V = \text{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \oplus \text{lin}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4) \oplus \text{lin}(e_1 - e_3, e_2 - e_4)$$

Pytanie Jak dokonać rozkładu składowej jednorodnej na sumę prostą podprzestrzeni G -niezmienniczych?

Pytanie Jak dokonać rozkładu składowej jednorodnej na sumę prostą podprzestrzeni G -niezmienniczych?

Chcemy dokonać rozkładu

$$V_i = W_i \oplus \dots \oplus W_i$$

na sumę podprzestrzeni G -niezmienniczych związanych z podreprezentacjami równoważnymi z

$$\rho^i : G \longrightarrow \text{Aut}(W_i).$$

Pytanie Jak dokonać rozkładu składowej jednorodnej na sumę prostą podprzestrzeni G -niezmienniczych?

Chcemy dokonać rozkładu

$$V_i = W_i \oplus \dots \oplus W_i$$

na sumę podprzestrzeni G -niezmienniczych związanych z podreprezentacjami równoważnymi z

$$\rho^i : G \longrightarrow \text{Aut}(W_i).$$

Niech reprezentacja ρ^i w postaci macierzowej jest równa $(a_{kl}(s))$ względem bazy e_1, \dots, e_n przestrzeni W_i , $n = n_i = \dim W_i$.

Pytanie Jak dokonać rozkładu składowej jednorodnej na sumę prostą podprzestrzeni G -niezmienniczych?

Chcemy dokonać rozkładu

$$V_i = W_i \oplus \dots \oplus W_i$$

na sumę podprzestrzeni G -niezmienniczych związanych z podreprezentacjami równoważnymi z

$$\rho^i : G \longrightarrow \text{Aut}(W_i).$$

Niech reprezentacja ρ^i w postaci macierzowej jest równa $(a_{kl}(s))$ względem bazy e_1, \dots, e_n przestrzeni W_i , $n = n_i = \dim W_i$.

Wtedy

$$\chi_i(s) = \sum_{k=1}^n a_{kk}(s).$$

Pytanie Jak dokonać rozkładu składowej jednorodnej na sumę prostą podprzestrzeni G -niezmienniczych?

Chcemy dokonać rozkładu

$$V_i = W_i \oplus \dots \oplus W_i$$

na sumę podprzestrzeni G -niezmienniczych związanych z podreprezentacjami równoważnymi z

$$\rho^i : G \longrightarrow \text{Aut}(W_i).$$

Niech reprezentacja ρ^i w postaci macierzowej jest równa $(a_{kl}(s))$ względem bazy e_1, \dots, e_n przestrzeni W_i , $n = n_i = \dim W_i$.

Wtedy

$$\chi_i(s) = \sum_{k=1}^n a_{kk}(s).$$

Dla każdego $k, l = 1, \dots, n$ określmy odwzorowanie

$$p_{kl} = \frac{n}{|G|} \sum_{s \in G} a_{lk}(s^{-1}) \rho_s.$$

Twierdzenie

- 1 Przekształcenie ρ_{kk} jest rzutowaniem,

Twierdzenie

- 1 Przekształcenie ρ_{kk} jest rzutowaniem,

Twierdzenie

- 1 Przekształcenie ρ_{kk} jest rzutowaniem, $\rho_{kk}(V_j) = \{0\}$ dla $j \neq i$,

Twierdzenie

- 1 Przekształcenie ρ_{kk} jest rzutowaniem, $\rho_{kk}(V_j) = \{0\}$ dla $j \neq i$, $\rho_{kk}(V_{ik}) \subset V_i$

Twierdzenie

- 1 Przekształcenie p_{kk} jest rzutowaniem, $p_{kk}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, $p_{kk}(V_{ik}) \subset V_i$ i

$$V_i = V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{in},$$

Twierdzenie

- 1 Przekształcenie ρ_{kk} jest rzutowaniem, $\rho_{kk}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, $\rho_{kk}(V_{ik}) \subset V_i$ i

$$V_i = V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{in}, \quad \rho_i = \sum_{k=1}^n \rho_{kk}.$$

Twierdzenie

- 1 Przekształcenie p_{kk} jest rzutowaniem, $p_{kk}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, $p_{kk}(V_{ik}) \subset V_i$ i

$$V_i = V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{in}, \quad p_i = \sum_{k=1}^n p_{kk}.$$

- 2 $p_{kl}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, oraz $p_{kl}(V_{ir}) = \{\theta\}$ dla $r \neq l$.

Twierdzenie

- 1 Przekształcenie p_{kk} jest rzutowaniem, $p_{kk}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, $p_{kk}(V_{ik}) \subset V_i$ i

$$V_i = V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{in}, \quad p_i = \sum_{k=1}^n p_{kk}.$$

- 2 $p_{kl}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, oraz $p_{kl}(V_{ir}) = \{\theta\}$ dla $r \neq l$.

Twierdzenie

- 1 Przekształcenie ρ_{kk} jest rzutowaniem, $\rho_{kk}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, $\rho_{kk}(V_{ik}) \subset V_i$ i

$$V_i = V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{in}, \quad \rho_i = \sum_{k=1}^n \rho_{kk}.$$

- 2 $\rho_{kl}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, oraz $\rho_{kl}(V_{ir}) = \{\theta\}$ dla $r \neq l$.
Ponadto $\rho_{kl} : V_{il} \rightarrow V_{ik}$ jest izomorfizmem.

Twierdzenie

- ❶ Przekształcenie p_{kk} jest rzutowaniem, $p_{kk}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, $p_{kk}(V_{ik}) \subset V_i$ i

$$V_i = V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{in}, \quad p_i = \sum_{k=1}^n p_{kk}.$$

- ❷ $p_{kl}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, oraz $p_{kl}(V_{ir}) = \{\theta\}$ dla $r \neq l$.
Ponadto $p_{kl} : V_{il} \rightarrow V_{ik}$ jest izomorfizmem.
- ❸ Niech α_1 będzie niezerowym wektorem przestrzeni V_{i1}

Twierdzenie

- ❶ Przekształcenie p_{kk} jest rzutowaniem, $p_{kk}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, $p_{kk}(V_{ik}) \subset V_i$ i

$$V_i = V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{in}, \quad p_i = \sum_{k=1}^n p_{kk}.$$

- ❷ $p_{kl}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, oraz $p_{kl}(V_{ir}) = \{\theta\}$ dla $r \neq l$.
Ponadto $p_{kl} : V_{il} \rightarrow V_{ik}$ jest izomorfizmem.
- ❸ Niech α_1 będzie niezerowym wektorem przestrzeni V_{i1}

Twierdzenie

- ❶ Przekształcenie p_{kk} jest rzutowaniem, $p_{kk}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, $p_{kk}(V_{ik}) \subset V_i$ i

$$V_i = V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{in}, \quad p_i = \sum_{k=1}^n p_{kk}.$$

- ❷ $p_{kl}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, oraz $p_{kl}(V_{ir}) = \{\theta\}$ dla $r \neq l$.

Ponadto $p_{kl} : V_{il} \rightarrow V_{ik}$ jest izomorfizmem.

- ❸ Niech α_1 będzie niezerowym wektorem przestrzeni V_{i1} i niech $\alpha_k = p_{k1}(\alpha_1) \in V_{ik}$.

Twierdzenie

- ❶ Przekształcenie p_{kk} jest rzutowaniem, $p_{kk}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, $p_{kk}(V_{ik}) \subset V_i$ i

$$V_i = V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{in}, \quad p_i = \sum_{k=1}^n p_{kk}.$$

- ❷ $p_{kl}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, oraz $p_{kl}(V_{ir}) = \{\theta\}$ dla $r \neq l$.

Ponadto $p_{kl} : V_{il} \rightarrow V_{ik}$ jest izomorfizmem.

- ❸ Niech α_1 będzie niezerowym wektorem przestrzeni V_{i1} i niech $\alpha_k = p_{k1}(\alpha_1) \in V_{ik}$. Wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne i generują n -wymiarową podprzestrzeń G -niezmienniczą $W(\alpha_1)$.

Twierdzenie

- ❶ Przekształcenie ρ_{kk} jest rzutowaniem, $\rho_{kk}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, $\rho_{kk}(V_{ik}) \subset V_i$ i

$$V_i = V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{in}, \quad \rho_i = \sum_{k=1}^n \rho_{kk}.$$

- ❷ $\rho_{kl}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, oraz $\rho_{kl}(V_{ir}) = \{\theta\}$ dla $r \neq l$.

Ponadto $\rho_{kl} : V_{il} \rightarrow V_{ik}$ jest izomorfizmem.

- ❸ Niech α_1 będzie niezerowym wektorem przestrzeni V_{i1} i niech $\alpha_k = \rho_{k1}(\alpha_1) \in V_{ik}$. Wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne i generują n -wymiarową podprzestrzeń G -niezmienniczą $W(\alpha_1)$. Dla $s \in G$ mamy

$$\rho_s(\alpha_k) = \sum_{l=1}^n a_{lk}(s) \alpha_l.$$

Twierdzenie

- ❶ Przekształcenie ρ_{kk} jest rzutowaniem, $\rho_{kk}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, $\rho_{kk}(V_{ik}) \subset V_i$ i

$$V_i = V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{in}, \quad \rho_i = \sum_{k=1}^n \rho_{kk}.$$

- ❷ $\rho_{kl}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, oraz $\rho_{kl}(V_{ir}) = \{\theta\}$ dla $r \neq l$.

Ponadto $\rho_{kl} : V_{il} \rightarrow V_{ik}$ jest izomorfizmem.

- ❸ Niech α_1 będzie niezerowym wektorem przestrzeni V_{i1} i niech $\alpha_k = \rho_{k1}(\alpha_1) \in V_{ik}$. Wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne i generują n -wymiarową podprzestrzeń G -niezmienniczą $W(\alpha_1)$. Dla $s \in G$ mamy

$$\rho_s(\alpha_k) = \sum_{l=1}^n a_{lk}(s) \alpha_l.$$

W szczególności $W(\alpha_1)$ jest „izomorficzna” z W_i .

Twierdzenie

- ❶ Przekształcenie ρ_{kk} jest rzutowaniem, $\rho_{kk}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, $\rho_{kk}(V_{ik}) \subset V_i$ i

$$V_i = V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{in}, \quad \rho_i = \sum_{k=1}^n \rho_{kk}.$$

- ❷ $\rho_{kl}(V_j) = \{\theta\}$ dla $j \neq i$, oraz $\rho_{kl}(V_{ir}) = \{\theta\}$ dla $r \neq l$.

Ponadto $\rho_{kl} : V_{il} \rightarrow V_{ik}$ jest izomorfizmem.

- ❸ Niech α_1 będzie niezerowym wektorem przestrzeni V_{i1} i niech $\alpha_k = \rho_{k1}(\alpha_1) \in V_{ik}$. Wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne i generują n -wymiarową podprzestrzeń G -niezmienniczą $W(\alpha_1)$. Dla $s \in G$ mamy

$$\rho_s(\alpha_k) = \sum_{l=1}^n a_{lk}(s) \alpha_l.$$

W szczególności $W(\alpha_1)$ jest „izomorficzna” z W_i .

- ❹ Jeśli $(\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_1^{(m)})$ jest bazą przestrzeni V_{i1} , to reprezentacja V_i jest sumą prostą nieprzywiedlnych podreprezentacji wyznaczonych przez podprzestrzenie $W(\alpha_1^{(1)}), \dots, W(\alpha_1^{(m)})$.

Dowód. Mamy

$$\rho_{kl}(e_r) = \frac{n}{|G|} \sum_{s \in G} a_{lk}(s^{-1}) \rho_s(e_r) = \frac{n}{|G|} \sum_{u=1}^n \sum_{s \in G} a_{lk}(s^{-1}) a_{ur}(s) e_u = \begin{cases} e_k, & \text{jeśli } r = l \\ \theta, & \text{jeśli } r \neq l \end{cases}.$$

Stąd wynika, że $\sum_{k=1}^n \rho_{kk}$ jest przekształceniem tożsamościowym przestrzeni W_i oraz

$$\rho_{kl} \circ \rho_{ru} = \begin{cases} \rho_{ku}, & \text{jeśli } l = r \\ 0, & \text{jeśli } l \neq r \end{cases}$$

oraz

$$\rho_s \circ \rho_{kr} = \sum_{l=1}^n a_{lk}(s) \rho_{lr}.$$

Podobnie pokazuje się, że ρ_{kl} zeruje się na W_j dla $j \neq i$. Teraz rozkładamy V na sumę podreprezentacji izomorficznych z W_j i stosujemy uzyskane wyniki dla każdej z tych reprezentacji. W ten sposób mamy (1) oraz (2). Przy założeniu części (3) mamy

$$\rho_s(\alpha_k) = \rho_s \circ \rho_{k1}(\alpha_1) = \sum_{l=1}^n a_{lk}(s) \rho_{l1}(\alpha_1) = \sum_{l=1}^n a_{lk}(s) \alpha_l$$

co dowodzi (3). Część (4) wynika z poprzednich.

Przykład Niech (e_1, \dots, e_6) będzie bazą przestrzeni liniowej V oraz niech $\rho : D(3) \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy $D(3) \cong S(3)$ zdefiniowaną następująco:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ zdefiniowanej ogólnie wyżej. Niech a będzie obrotem o kąt $\pi/3$, a b symetrią względem "górnego" wierzchołka. Wtedy

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ						

Przykład Niech (e_1, \dots, e_6) będzie bazą przestrzeni liniowej V oraz niech $\rho : D(3) \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy $D(3) \cong S(3)$ zdefiniowaną następująco:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ zdefiniowanej ogólnie wyżej. Niech a będzie obrotem o kąt $\pi/3$, a b symetrią względem "górnego" wierzchołka. Wtedy

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

Stąd $\chi =$

Przykład Niech (e_1, \dots, e_6) będzie bazą przestrzeni liniowej V oraz niech $\rho : D(3) \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy $D(3) \cong S(3)$ zdefiniowaną następująco:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ zdefiniowanej ogólnie wyżej. Niech a będzie obrotem o kąt $\pi/3$, a b symetrią względem "górnego" wierzchołka. Wtedy

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

Stąd $\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3$.

Przykład Niech (e_1, \dots, e_6) będzie bazą przestrzeni liniowej V oraz niech $\rho : D(3) \rightarrow \text{Aut}(V)$ będzie reprezentacją grupy $D(3) \cong S(3)$ zdefiniowaną następująco:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ zdefiniowanej ogólnie wyżej. Niech a będzie obrotem o kąt $\pi/3$, a b symetrią względem "górnego" wierzchołka. Wtedy

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

Stąd $\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3$.

Obliczmy obrazy rzutowań p_1, p_2, p_3 .

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Stąd

$$\rho_1 =$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Stąd

$$\rho_1 = \frac{1}{6}(\rho_1 + \rho_a + \rho_{a^2} + \rho_b + \rho_{ab} + \rho_{a^2b}),$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Stąd

$$\rho_1 = \frac{1}{6}(\rho_1 + \rho_a + \rho_{a^2} + \rho_b + \rho_{ab} + \rho_{a^2b}), \quad \rho_1(V) = \text{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6)$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Stąd

$$\rho_1 = \frac{1}{6}(\rho_1 + \rho_a + \rho_{a^2} + \rho_b + \rho_{ab} + \rho_{a^2b}), \quad \rho_1(V) = \text{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6)$$

$$\rho_2 =$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Stąd

$$\rho_1 = \frac{1}{6}(\rho_1 + \rho_a + \rho_{a^2} + \rho_b + \rho_{ab} + \rho_{a^2b}), \quad \rho_1(V) = \text{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{6}(\rho_1 + \rho_a + \rho_{a^2} - \rho_b - \rho_{ab} - \rho_{a^2b}),$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Stąd

$$\rho_1 = \frac{1}{6}(\rho_1 + \rho_a + \rho_{a^2} + \rho_b + \rho_{ab} + \rho_{a^2b}), \quad \rho_1(V) = \text{lin}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{6}(\rho_1 + \rho_a + \rho_{a^2} - \rho_b - \rho_{ab} - \rho_{a^2b}), \quad \rho_2(V) = \text{lin}(e_1 + e_5 + e_3 - e_2 - e_4 - e_6).$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Z rzutowaniem $\rho_3 = \frac{2}{6}(2\rho_1 - \rho_a - \rho_{a^2})$ jest więcej kłopotu, bo jego obraz jest podprzestrzenią 4-wymiarową i jest sumą prostą dwóch 2-wymiarowych podprzestrzeni G -niezmienniczych.

$$\rho_3(V) = \text{lin}(2e_1 - e_5 - e_3,$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Z rzutowaniem $p_3 = \frac{2}{6}(2\rho_1 - \rho_a - \rho_{a^2})$ jest więcej kłopotu, bo jego obraz jest podprzestrzenią 4-wymiarową i jest sumą prostą dwóch 2-wymiarowych podprzestrzeni G -niezmienniczych.

$$p_3(V) = \text{lin}(2e_1 - e_5 - e_3, 2e_2 - e_6 - e_4),$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Z rzutowaniem $p_3 = \frac{2}{6}(2\rho_1 - \rho_a - \rho_{a^2})$ jest więcej kłopotu, bo jego obraz jest podprzestrzenią 4-wymiarową i jest sumą prostą dwóch 2-wymiarowych podprzestrzeni G -niezmienniczych.

$$p_3(V) = \text{lin}(2e_1 - e_5 - e_3, 2e_2 - e_6 - e_4, 2e_3 - e_1 - e_5,$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Z rzutowaniem $p_3 = \frac{2}{6}(2\rho_1 - \rho_a - \rho_{a^2})$ jest więcej kłopotu, bo jego obraz jest podprzestrzenią 4-wymiarową i jest sumą prostą dwóch 2-wymiarowych podprzestrzeni G -niezmienniczych.

$$p_3(V) = \text{lin}(2e_1 - e_5 - e_3, 2e_2 - e_6 - e_4, 2e_3 - e_1 - e_5, 2e_4 - e_2 - e_6,$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Z rzutowaniem $p_3 = \frac{2}{6}(2\rho_1 - \rho_a - \rho_{a^2})$ jest więcej kłopotu, bo jego obraz jest podprzestrzenią 4-wymiarową i jest sumą prostą dwóch 2-wymiarowych podprzestrzeni G -niezmienniczych.

$$p_3(V) = \text{lin}(2e_1 - e_5 - e_3, 2e_2 - e_6 - e_4, 2e_3 - e_1 - e_5, 2e_4 - e_2 - e_6, 2e_5 - e_3 - e_1,$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
ρ_a	e_5	e_6	e_1	e_2	e_3	e_4
ρ_{a^2}	e_3	e_4	e_5	e_6	e_1	e_2
ρ_b	e_2	e_1	e_6	e_5	e_4	e_3
ρ_{ab}	e_4	e_3	e_2	e_1	e_6	e_5
ρ_{a^2b}	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
	id	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	2	-1	-1	0	0	0
χ	6	0	0	0	0	0

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3.$$

Z rzutowaniem $p_3 = \frac{2}{6}(2\rho_1 - \rho_a - \rho_{a^2})$ jest więcej kłopotu, bo jego obraz jest podprzestrzenią 4-wymiarową i jest sumą prostą dwóch 2-wymiarowych podprzestrzeni G -niezmienniczych.

$$p_3(V) = \text{lin}(2e_1 - e_5 - e_3, 2e_2 - e_6 - e_4, 2e_3 - e_1 - e_5, 2e_4 - e_2 - e_6, 2e_5 - e_3 - e_1, 2e_6 - e_4 - e_2)$$