PEWNE ZASTOSOWANIA TEORII DYSTRYBUCJI I RACHUNKU OPERATOROWEGO W TEORII RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

WŁADYSŁAW KIERAT

Oliver Heaviside w latach 1893-1899 opublikował trzytomową monografię: Elektromagnetic Theory, w której przedstawił algebraiczną metodę rozwiązywania problemów elektrodynamiki. Heaviside nie podał przekonującej argumentacji dla swojej metody. Wielu matematyków wyrażało zastrzeżenia dotyczące poprawności teorii Heavisidea, o czym świadczy niżej przedstawiony list.

Anonymous Fellow of the Royal Society to Sir Edmund T. Whittaker:

"There was a sort of tradition that a Fellow to the Royal Society could print almost anything in the Proceedings untroubled by referees: but then Heaviside had published two papers on his symbolic methods, we felt the line had to be drawn somewhere, so we put a stop to it."

Celem tej notatki jest przedstawienie pojęć i twierdzeń teorii równań różniczkowych, na powstanie których miały wpływ idee Heavisidea. Istnieją trzy istotnie różne sposoby uzasadniania poprawności rachunku operatorowego O. Heaviside'a:

1) Teoria transformacji Laplace'a,
2) Teoria dystrybucji Schwartza,
3) Rachunek operatorów Mikusińskiego.

1. Rachunek operatorów Mikusińskiego

W zbiorze $C_{[0,\infty)}$ wprowadzamy działania:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \tag{1.1}$$

$$(f \cdot g)(t) = (f\,g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{1.2}$$

Twierdzenie 1.1. *$C_{[0,\infty)}$ jest przemiennym pierścieniem bez jedności względem działań* (1.1) *i* (1.2).

Twierdzenie 1.2 (Titchmarsh)**.** *Jeśli $f, g \in C_{[0,\infty)}$ i $(f\,g)(t) = 0$ dla $t \in [0,T]$, $T > 0$, to istnieją liczby T_1, $T_2 \geqslant 0$, $T_1 + T_2 \geqslant T$, takie że $f(t) = 0$ dla $t \in [0,T_1]$ i $g(t) = 0$ dla $t \in [0,T_2]$.*

Wniosek 1.1. *Jeśli $(f\,g)(t) = 0$ dla $t \geqslant 0$, to $f(t) = 0$ dla $t \geqslant 0$ lub $g(t) = 0$ dla $t \geqslant 0$.*

Twierdzenie 1.3. *$C_{[0,\infty)}$ jest przemiennym pierścieniem bez jedności i bez dzielników zera.*

Niech $\mathcal{M}$ będzie ciałem ułamków dla pierścienia $C_{[0,\infty)}$.

Definicja 1.1. Elementy ciała $\mathcal{M}$ nazywamy operatorami Mikusińskiego.

Funkcje $f \in C_{[0,\infty)}$ będziemy również oznaczać symbolem $\{f(t)\}$. Symbol $f(t)$ oznacza wartość funkcji f w punkcie t.

Twierdzenie 1.4.
a) $C_{[0,\infty)} \hookrightarrow \mathcal{M}$, $\qquad f \to \frac{\{1\}f}{\{1\}}$,
b) $\mathbb{C}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{M}$, $\qquad \alpha \to \frac{\{\alpha\}}{\{1\}}$.

Przyjmijmy $l =: \{1\}$, wtedy $(lf)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$.

Operator l nazywamy operatorem całkowym.

Operator $s := \frac{1}{l}$ nazywamy operatorem różniczkowym.

Twierdzenie 1.5. *Dla* $f \in C^{(n)}_{[0,\infty)}$ *zachodzi następująca równość:*

$$f^{(n)} = s^n f - f^{(n-1)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - \cdots - s^{n-1}f(0). \tag{1.3}$$

Wniosek 1.2. *Jeśli* $f(0) = f^{(1)} = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, *to* $f^{(n)} = s^n f$.

2. Zastosowanie rachunku operatorów do liniowych równań różniczkowych o współczynnikach stałych

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x^{(1)} + a_0 x = 0, \quad a_i \in \mathbb{C}, \mathbb{R} \tag{2.1}$$

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x^{(1)} + a_0 x = f, \quad f \in C_{[0,\infty)} \tag{2.2}$$

Niech $\gamma^\xi = (\gamma^\xi_0, \ldots, \gamma^\xi_{n-1})$, $\gamma^\xi_i = x^{(i)}(\xi)$, $i = 0, \ldots, n-1$,

$$x^{(i)}(0) = \gamma^0_i, \quad i = 0, \ldots, n-1, \tag{2.3}$$

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Twierdzenie 2.1. *Rozwiązanie* $x \in C^{(n)}_{[0,\infty)}$ *równania* (2.2) *spełniające warunki* (2.3) *ma postać:*

$$x = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{p(s)} + \frac{f}{p(s)}, \tag{2.4}$$

gdzie

$$\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0 = 0 \Longleftrightarrow \gamma^0 = 0. \tag{2.5}$$

Przyjmijmy

$$x_0 = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{p(s)}, \quad x_f = \frac{f}{p(s)}. \tag{2.6}$$

Zauważmy, że x_0 jest ogólnym rozwiązaniem równania (2.1) i x_f jest szczególnym rozwiązaniem równania (2.2) spełniającym warunek $\gamma^0 = 0$.

Funkcja $\frac{1}{p(s)} = \{w^*(t)\}$ jest szczególnym rozwiązaniem równania (2.1) spełniającym warunki początkowe:

$$w^*(0) = 0, \ \ldots, \ (w^*)^{(n-2)}(0) = 0, \ (w^*)^{(n-1)}(0) = 1. \tag{2.7}$$

3. Funkcja impulsu dla liniowego równania różniczkowego

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x^{(1)}(t) + a_0(t)x(t) = 0, \tag{3.1}$$

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x^{(1)}(t) + a_0(t)x(t) = f(t) \tag{3.2}$$

Definicja 3.1.

$$K : (a,b) \times (a,b) \to \mathbb{R}$$

a) Funkcje $K(\cdot, \xi)$ są rozwiązaniami równania (3.1) dla $\xi \in (a,b)$ spełniającymi warunki początkowe:

$$K(\xi,\xi) = 0,\ \partial^{(1,0)}K(\xi,\xi) = 0,\ \ldots,\ \partial^{(n-2,0)}K(\xi,\xi) = 0,\ \partial^{(n-1,0)}K(\xi,\xi) = 1.$$

b) Funkcje K, $\partial^{(1,0)}K, \ldots, \partial^{(n,0)}K \in C_{(a,b)\times(a,b)}$. Funkcję K nazywamy funkcją impulsu dla równania (3.1).

Niech $v = [v_1, \ldots, v_n]$ będzie fundamentalnym układem rozwiązań dla równania (3.1) i niech W będzie macierzą Wrońskiego.

Twierdzenie 3.1.

$$K(t,\xi) = [v_1(t), \ldots, v_n(t)] \cdot [W^{-1}_{1n}(\xi), \ldots, W^{-1}_{nn}(\xi)]^T, \tag{3.3}$$

gdzie $[W^{-1}_{1n}(\xi), \ldots, W^{-1}_{nn}(\xi)]^T$ *jest ostatnią kolumną macierzy* $W^{-1}(\xi)$ *odwrotnej do macierzy Wrońskiego* $W(\xi)$*. Wtedy*

$$x(t) = v(t)W^{-1}(\xi)\gamma^{\xi} + \int_{\xi}^{t} K(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{3.4}$$

gdzie $x(\xi) = \gamma^{\xi}_0$, $x^{(1)}(\xi) = \gamma^{\xi}_1$, ... $x^{(n-1)}(\xi) = \gamma^{\xi}_{n-1}$.

Zauważmy, że $x_0(t) = v(t)W^{-1}(\xi)\gamma^{\xi}$ jest rozwiązaniem równania (3.1) spełniającym warunki początkowe:

$$x_0(\xi) = \gamma^{\xi}_0,\ x^{(1)}_0(\xi) = \gamma^{\xi}_1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}_0(\xi) = \gamma^{\xi}_{n-1},$$

natomiast $x_f(\xi) = \int_{\xi}^{t} K(t,\tau)f(\tau)d\tau$ jest rozwiązaniem równania (3.2) spełniającym warunki początkowe:

$$x_f(\xi) = x^{(1)}_f(\xi) = \cdots = x^{(n-1)}_f(\xi) = 0.$$

Załóżmy, że współczynniki równań (3.1) nie zależą od zmiennej t.

Twierdzenie 3.2.

$$K(t,\tau) = W^*(t-\tau) \quad dla \quad (t,\tau) \in D = \{(t,\tau) :\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\},$$

$$x(t) = v(t)W^{-1}(\xi)\gamma^{\xi} + \int_{\xi}^{t} W^*(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad dla \quad t \geqslant \xi \geqslant 0,$$

gdzie W^{-1} *jest macierzą odwrotną do macierzy Wrońskiego wyznaczoną przez układ fundamentalny* v.

4. Zastosowanie rachunku operatorów do układów równań o stałych współczynnikach

Rozważmy układ:

$$x' = Ax + f, \tag{4.1}$$

$$A = [a_{ij}]_{n\times n}, \qquad x = [x_1, \dots, x_n]^T,$$
$$x' = [x_1', \dots, x_n']^T, \qquad f = [f_1, \dots, f_n]^T,$$

$$(A - sI)x = -x(0) - f. \tag{4.2}$$

Wtedy mamy

$$x = -(A - sI)^{-1}x(0) - (A - sI)^{-1}f, \tag{4.3}$$

$$R(s, A) := (A - sI)^{-1} = [W_{ij}(t)]_{n\times n}. \tag{4.4}$$

Twierdzenie 4.1.
a)$R(s, A) = \{W(t)\}$ jest macierzą Wrońskiego, $W(0) = -I$.
b) Funkcja

$$x(t) = -W(t)x(0) - \int_0^t W(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

jest rozwiązaniem równania (4.1).

5. Funkcja impulsu dla układu równań różniczkowych

$$x' = Ax, \qquad A(t) = [a_{ij}(t)]_{n\times n} \tag{5.1}$$

$$x' = Ax + f \tag{5.2}$$

Definicja 5.1.

$$K(\cdot,\cdot) : (a, b) \times (a, b) \to \mathbb{R}^{n^2}$$

a) Dla ustalonego $\xi \in (a, b)$ każda kolumna macierzy $K(\cdot, \xi)$ jest rozwiązaniem układu (5.1) i $K(\xi, \xi) = I$.

b) Funkcje K, i $\partial^{(1,0)}K, \in C_{(a,b)\times(a,b)}$. Funkcję K nazywamy funkcją impulsu dla układu (5.1).

Twierdzenie 5.1.
a) $K(t, \xi) = W(t)W^{-1}(\xi)$, gdzie W jest macierzą Wrońskiego dla równania (5.1).
b) Funkcja

$$x(t) = K(t, \xi)x(\xi) + \int_\xi^t K(t, \tau)f(\tau)d\tau$$

jest rozwiązaniem równania (5.2).
c) Jeśli współczynniki a_{ij} nie zależą od zmiennej t, wtedy

$$x(t) = -W(t-\xi)x(\xi) - \int_\xi^t W(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad dla \quad 0 \leqslant \xi \leqslant t,$$

gdzie $\{W(t)\} = R(s, A)$.

Zauważmy, że

$$R(s,A) = (A - sI)^{-1} = -l(I - lA)^{-1},$$
$$-R(s,A) = l + l^2A + l^3A^2 + \cdots + l^{n+1}A^n + \ldots,$$
$$-R(s,A) = \{I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \ldots\} = \{e^{At}\},$$

więc

$$x(t) = e^{A(t-\xi)}x(\xi) + \int_\xi^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau \quad \text{(postać wykładnicza).}$$

6. Funkcje impulsu i rozwiązania podstawowe

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x^{(1)}(t) + a_0(t)x(t) = 0, \tag{6.1}$$

$a_i \in C^{(\infty)}(a,b)$, $i = 0, \ldots, n-1$,

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad A(t) = [a_{ij}]_{n\times n} \tag{6.2}$$

$a_{ij} \in C^{(\infty)}(a,b)$

$$E(t,\tau) := \begin{cases} K(t,\tau) & \text{dla} \quad a < \tau \leqslant t < b \\ 0 & \text{dla} \quad a < t < \tau < b \end{cases}$$

$E(\cdot,\cdot)$ - rozwiązanie podstawowe

Twierdzenie 6.1.

a) Jeśli $K(\cdot,\cdot)$ jest funkcją impulsu dla równania (6.1), *to*

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0)E(\cdot,\xi) = \delta_\xi.$$

b) Jeśli $K(\cdot,\cdot)$ jest funkcją impulsu dla równania (6.2), *to*

$$(DI - A)E(\cdot,\xi) = \delta_\xi I.$$

c) Jeśli współczynniki a_i równań (6.1) *i* (6.2) *nie zależą od zmiennej t, wtedy*

$$E(t,0) = \begin{cases} W^*(t) & \textit{dla} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \textit{dla} \quad t < 0 \end{cases}$$

dla równania (6.1) *oraz*

$$E(t,0) = \begin{cases} -W(t) & \textit{dla} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \textit{dla} \quad t < 0 \end{cases}$$

dla równania (6.2). *(Symbol D oznacza różniczkowanie w sensie teorii dystrybucji, a δ_ξ oznacza miarę Diraca skupioną w punkcie ξ.)*

J. L. B. Cooper: Heaviside and the operational calculus, Math. Gaz. 36 (1952) p. 5-19

L. Schwartz: Theorie des Distributions - Introduction, Herman, Paris (1966)

J. Mikusiński: Operational calculus, PWN-Pergamon Press, London Warszawa New York (1966)