Równania i nierówności funkcyjne

Roman Ger

Streszczenie Rozważana jest kwestia zobiektywizowania syntezy opinii $n \geq 2$ ekspertów powołanych w celu roztrzygnięcia konkursu, w którym projekty zgłosiło $m \geq 3$ kandydatów. Zakłada się jedynie, że funkcje decyzyjne są nieujemne i sumują się do pewnej ustalonej dodatniej liczby s oraz respektowany jest tzw. consensus odmowy: jeśli wszyscy eksperci zaproponowali zero środków dla danego kandydata, to taka jest też synteza ich opinii. Dowodzi się, że te ustalenia determinują kształt funkcji decyzyjnych oraz ich niezależność od wyboru kandydata.

Tytuł tego wystąpienia wskazuje jedynie, że tych spośród Państwa, którzy byliby zainteresowani dokonaniami matematyków śląskich w tej dyscyplinie, chciałbym gorąco zachęcić do lektury mojego artykułu pod tymże właśnie tytułem we wręczonej dziś Wszystkim Państwu książce *Pół wieku matematyki na Górnym Śląsku* [5], "ochrzczonej" tu dziś wcześniej mianem "żółtej księgi". To, o czym tu chcę powiedzieć, ma natomiast stanowić próbkę skuteczności metod równań funkcyjnych pozwalających zadziwiająco elementarnymi środkami uzyskiwać rozstrzygnięcia nietrywialnych problemów o czysto praktycznym charakterze. Jeśli w deklaracji takiej ktoś dosłucha się reklamiarskiej nutki, to liczę na wyrozumiałość i łaskawą zgodę na to, że celebrowanie jubileuszu w jakiejś mierze intencje takie być może usprawiedliwia.

Rozważać będziemy kwestię zobiektywizowania **syntezy opinii**; jej matematyczne aspekty badane były m.in. w pracach J. Aczéla i C. Wagnera [4] J. Aczéla [1], J. Aczéla, C.T. Ng i C. Wagnera [3] oraz J. Aczéla i C. Alsiny [2]. Wyobraźmy sobie, że jesteśmy dysponentami kwoty $s > 0$ ze środków budżetowych (dotacji unijnych, grantów, donacji sponsorów, etc.) i w celu rozstrzygnięcia ogłoszonego konkursu musimy rozdysponować kwotę s pomiędzy $m \geq 3$ kandydatów biorących w nim udział. Nie będąc sami w stanie podjąć się merytorycznej oceny projektów zgłoszonych przez poszczególnych kandydatów, powierzamy to zadanie $n \geq 2$ ekspertom, żądając jedynie by każdy z nich zaproponował sposób rozdysponowania **całej** kwoty s. W ten sam schemat wpisuje się np. problem arbitralnego przypisania prawdopodobieństw ciągowi m rozłącznych i wyczerpujących wszystkie możliwości zdarzeń (wtedy $s = 1$); możemy np. myśleć o rozkładzie prawdopodobieństwa w prognozie demograficznej dla Polaków w roku 2010.

Otrzymując wyniki takiej ekspertyzy, stajemy przed problemem wypłaty kwoty $f_i(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \ldots, x_{in})$ i-temu kandydatowi, $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$, która byłaby optymalnym uśrednieniem opinii propozycji $(x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \ldots, x_{in}) \in [0, s]^n$ wszystkich n ekspertów, gdzie x_{ij} oznacza kwotę zaproponowaną i-temu kandydatowi przez j-tego eksperta, $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Potencjalnie dopuszczamy zatem zróżnicowanie naszego uśrednienia (syntezy opinii) w zależności od kandydata! Przyjmujemy wszakże, że my także chcemy rozdysponować **całą** kwotę s. Mamy więc przed sobą następujące dane, ujęte schematycznie w formie poniższej tabeli:

kandydat\ ekspert	1	2	3		n	decyzja
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{1n}	$f_1(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1n})$
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}		x_{2n}	$f_2(x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots, x_{2n})$
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}		x_{3n}	$f_3(x_{31}, x_{32}, x_{33}, \ldots, x_{3n})$
m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}		x_{mn}	$f_m(x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, \ldots, x_{mn})$
suma	s	s	s		s	s

Zapewne trudno w to uwierzyć, ale okazuje się, że przyjąwszy jedynie następujące dwa "zdroworozsądkowe" założenia:

- nie będziemy karać mandatami za udział w konkursie, tzn. zakładamy, że $f_i \geq 0$ dla $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$;
- honorujemy **consensus odmowy**, tzn. jeśli wszyscy spośród n ekspertów uważają, że i-temu kandydatowi nie należy przyznawać żadnych środków, to nasza synteza $f_i(0, 0, 0, \ldots, 0) = 0$ dla $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$;

determinują kształt funkcji f_i, $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$! Consensus odmowy i brak mandatów wystarczają przeto by zobiektywizować syntezę opinii. Udowodnimy za chwilę ten szokujący rezultat posłużywszy się następującym lematem dotyczącym nieujemnych rozwiązań równania Cauchy'ego na przedziale.

Lemat. *Niech s będzie daną liczbą dodatnią. Jeżeli funkcja $\varphi : [0, s] \longrightarrow [0, \infty)$ spełnia równanie*

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

dla wszelkich $u, v \in [0, s]$, dla których $u + v \in [0, s]$, to istnieje taka liczba $\alpha \geq 0$, że $\varphi(u) = \alpha u$ dla $u \in [0, s]$.

Dowód. Dla dowolnej liczby naturalnej k i dowolnego $u \in [0, \frac{1}{k}s]$ mamy (indukcja):

$$\varphi(ku) = k\varphi(u)\,.$$

Ustalmy dowolnie liczby naturalne q oraz $p \in \{1, ..., q\}$. Wówczas $\varphi(u) = \varphi\left(q\left(\frac{1}{q}u\right)\right) = q\varphi\left(\frac{1}{q}u\right)$, tzn. $\varphi\left(\frac{1}{q}u\right) = \frac{1}{q}\varphi(u)$ dla wszelkich $u \in [0, s]$. W konsekwencji,

$$\varphi\left(\frac{p}{q}u\right) = \varphi\left(p\left(\frac{1}{q}u\right)\right) = p\varphi\left(\frac{1}{q}u\right) = \frac{p}{q}\varphi(u)\,, \quad u \in [0, s]\,.$$

Wykazaliśmy zatem, że dla dowolnego $u \in [0, s]$ i dowolnej liczby wymiernej $r \in (0, 1]$ zachodzi równość

$$\varphi(ru) = r\varphi(u)\,.$$

Ustalmy dowolnie element $z \in (0, s]$; wówczas $\lambda := z/s \in (0, 1]$. Niech $w_1, w_2 \in (0, 1]$ będą takim liczbami wymiernymi, że $w_1 \leq \lambda \leq w_2$; wówczas

$$w_1 s \leq z \leq w_2 s\,.$$

Ponieważ funkcja φ jest rosnąca (dla liczb $u, v \in [0, s], u < v$, mamy $\varphi(v) = \varphi(u + (v - u)) = \varphi(u) + \varphi(v - u) \geq \varphi(u)$), więc

$$w_1\varphi(s) = \varphi(w_1 s) \leq \varphi(z) \leq \varphi(w_2 s) = w_2\varphi(s)\,.$$

Wobec dowolności wyboru stosownych liczb w_1, w_2, pociąga to równość

$$\varphi(z) = \lambda\varphi(s) = \frac{\varphi(s)}{s}z\,.$$

W rezultacie,

$$\varphi(z) = \alpha z\,, \quad z \in (0, 1]\,,$$

gdzie $\alpha := \varphi(s)/s$. Kończy to dowód lematu, gdyż oczywisty związek $\varphi(0) = 2\varphi(0)$ implikuje równość $\varphi(0) = 0 = \alpha\varphi(0)$.

Powróćmy do naszej tabeli. W zapisie wektorowym:

$$x_i := (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in}),\ i \in \{1, ..., m\}, \qquad \mathbf{s} := (s, s, ...s)\,,$$

znajdujemy w niej stwierdzenie, że niewiadome funkcje $f_i : [0, s]^n \longrightarrow [0, \infty)$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, spełniają warunkowe równanie funkcyjne

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = \mathbf{s} \Longrightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_m(x_m) = s\,, \tag{1}$$

dla wszelkich wektorów $x_1, x_2, ..., x_m \in [0, s]^n$. Warunkowego charakteru równania (1) możemy się łatwo pozbyć eliminując wektor $x_m = \mathbf{s} - (x_1 + \cdots x_{m-1})$. Równanie (1) przyjmuje wówczas postać

$$f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_m\left(\mathbf{s} - (x_1 + \cdots x_{m-1})\right) = s\,, \tag{2}$$

Przyjąwszy w (2) $x := x_1$, $f := f_1$ oraz $x_2 = \cdots = x_{m-1} = \mathbf{0}$ (przypomnijmy o założeniu, że $m \geq 3$), korzystając z consensusu odmowy, otrzymujemy związek

$$f(x) + f_m(\mathbf{s} - x) = s \quad \text{dla } x \in [0, s]^n\,. \tag{3}$$

W konsekwencji, równanie (2) przyjmuje postać

$$f(x)+f_2(x_2)+\cdots+f_{m-1}(x_{m-1}) = s-f_m\left(\mathbf{s} - (x + x_2 + \cdots + x_{m-1})\right) = f(x+x_2+\cdots+x_{m-1})\,,$$

dla dowolnych takich wektorów $x, x_2, ...x_{m-1} \in [0, s]^n$, że ich suma także należy do $[0, s]^n$. Kładąc tutaj $x_2 = y$ oraz $x = x_3 = \cdots = x_{m-1} = \mathbf{0}$ i korzystając ponownie z consensusu odmowy stwierdzamy, że

$$f_2(y) = f(y) \quad \text{dla wszelkich } y \in [0, s]^n\,,$$

tzn., że $f_2 = f$. Analogicznie uzyskujemy równości $f_3 = \cdots = f_{m-1} = f$, otrzymując z (2) równanie funkcyjne wiążące jedynie funkcję f:

$$f(x) + f(y) + f(x_3) + \cdots + f(x_{m-1}) = f(x + y + x_3 + \cdots + x_{m-1})\,,$$

dla wszelkich takich wektorów $x, y, x_3, ..., x_{m-1} \in [0, s]^n$, że ich suma także należy do $[0, s]^n$. Wyzerowując tu wektory $x_3, ..., x_{m-1}$ wnosimy stąd, że

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{o ile tylko} \quad x, y, x + y \in [0, s]^n\,. \tag{4}$$

Dla wszelkich $j \in \{1, 2, ..., n\}$ funkcje $\varphi_j : [0, s] \longrightarrow [0, \infty)$ dane wzorami

$$\varphi_j(t) := f(0, ...0, t, 0, ..., 0) \quad (t \text{ na } j - \text{tym miejscu}), \quad t \in [0, s],$$

spełniają przeto założenia lematu. Istnieją więc takie nieujemne liczby α_j, że

$$\varphi_j(t) = \alpha_j t, \quad t \in [0, s], \quad j \in \{1, 2, ..., n\} .$$

Równanie (4) implikuje oczywiście, że dla każdego wektora $x = (t_1, t_2, ...t_n) \in [0, s]^n$ mamy

$$f(x) = f(t_1, t_2, ..., t_n) = \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2) + \cdots \varphi_n(t_n) = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \cdots \alpha_n t_n ,$$

a ponieważ związek (3) zastosowany dla $x = \mathbf{s}$ implikuje równość

$$f(\mathbf{s}) = s ,$$

więc

$$s = f(s, s, ..., s) = \alpha_1 s + \alpha_s + \cdots \alpha_n s = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n)s ,$$

skąd

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n = 1 .$$

Tak więc f i, tym samym, wszystkie funkcje decyzyjne $f_1, f_2, ..., f_{m-1}$ okazują się być tą samą **średnią wagową**! A co z funkcją f_m? Otóż na mocy (3), dla dowolnego wektora $(t_1, t_2, ..., t_n) \in [0, s]^n$ mamy

$$\begin{aligned} f_m(t_1, t_2, ..., t_n)) &= s - f(s - t_1, s - t_2, ..., s - t_n) \\ &= s - \Big[\alpha_1(s - t_1) + \alpha_(s - t_2) + \cdots \alpha_n(s - t_n)\Big] = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \cdots \alpha_n t_n \\ &= f(t_1, t_2, ..., t_n)) . \end{aligned}$$

Konkludując, consensus odmowy, nieujemność funkcji decyzyjnych i warunek, że cała kwota musi być rozdysponowana, wymuszają, że synteza opinii musi być niezależna od kandydata i być tą samą średnią wagową. Jedynym polem manewru jakie nam pozostało jest więc ustalenie tych wag. Najczęściej i ta rzecz naturalnie się narzuca; np. w przypadku, gdy to sponsorzy delegują swoich managerów jako ekspertów, waga α_j przypisana j-temu ekspertowi winna zapewne być proporcjonalna do wielkości donacji j-tego sponsora, $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Bibliografia

[1] J. Aczél, *On weighted synthesis of judgements*, Aequationes Math. **27** (1984), 288-307.

[2] J. Aczél, & C. Alsina, *Synthesizing judgements: a functional equations approach*, Math. Modelling **9**, No. 3-5 (1987), 311-320.

[3] J. Aczél, C.T. Ng & C. Wagner, *Aggregation theorems for allocation problems*, SIAM J. Alg. Disc. Meth. **5** (1984), 1-8.

[4] J. Aczél & C. Wagner, *A characterization of weighted arithmetic means*, SIAM J. Alg. Disc. Meth. **1** (1980), 259-260.

[5] K. Skórnik (redaktor), *Pół wieku matematyki na Górnym Śląsku*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2003.

Adres autora:
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego
ul. Bankowa 14
40-007 Katowice
e-mail: romanger@us.edu.pl