Algebra i teoria liczb na Górnym Śląsku

Kazimierz Szymiczek

Wstęp

Formalnym początkiem działalności naukowej w zakresie algebry i teorii liczb na Górnym Śląsku było powstanie w roku 1960 Katedry Algebry i Teorii Liczb w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Katowicach. Kierownikiem Katedry został doc. dr Antoni Wakulicz natomiast poza nim jedynym pracownikiem na stanowisku asystenta był autor tego artykułu, wówczas świeżo upieczony magister. Zainteresowania naukowe A. Wakulicza koncentrowały się na elementarnej teorii liczb, a źródłem inspiracji były przede wszystkim liczne artykuły i książki W. Sierpińskiego i stawiane przez niego problemy. Pierwszymi pracami z zakresu teorii liczb, które powstały na Górnym Śląsku są prace A. Wakulicza [**102**], [**103**] z lat 1953 i 1954 oraz [**104**] i [**105**] opublikowane w roku 1957 w *Colloquium Mathematicum* i praca Alfreda Czarnoty [**7**] z 1956 roku.

W tym opracowaniu przedstawiamy pierwszą próbę zebrania podstawowych informacji o działalności naukowej w zakresie algebry i teorii liczb na Górnym Śląsku. Początki tej działalności są w naturalny sposób związane z powstaniem oddziału Polskiego Towarzystwa Matematycznego na Górnym Śląsku zarówno poprzez osobę pierwszego i długoletniego prezesa oddziału jak i jego zainteresowania naukowe i wkład w kształcenie kadry naukowej. W pierwszej części opracowania omawiamy zatem działalność Antoniego Wakulicza a następnie przedstawiamy zwięźle historię rozwoju ośrodka katowickiego (§2) i gliwickiego (§3). W drugiej części opracowania (§4) przedstawiamy główne kierunki i rezultaty działalności badawczej ośrodka katowickiego w zakresie algebry i teorii liczb. Niestety nie udało mi się w czasie przeznaczonym na przygotowanie tego tomu do druku (a także ze względu na brak kompetencji) przedstawić podobnego przeglądu działalności badawczej ośrodka gliwickiego. W każdym razie w §3 wykorzystałem informacje przekazane mi przez Pana Profesora E. Płonkę i Panią Profesor O. Macedońską na ten temat. Dziękuję Im za życzliwą współpracę.

Poza Katowicami i Gliwicami także w Częstochowie prowadzone były badania w zakresie teorii liczb. Prawdopodobnie jedyną osobą publikującą prace z tego zakresu był Alfred Czarnota. Cytujemy jedynie jego 3 prace recenzowane w *Mathematical Reviews* ([**7, 8, 9**]).

Sesja naukowa - Pół wieku matematyki na Górnym Śląsku, Katowice, grudzień 2003 r.

1. Antoni Wakulicz

Ponieważ Antoni Wakulicz był centralną postacią w organizacji działalności naukowej w zakresie matematyki na Górnym Śląsku, przedstawimy tutaj w skrócie jego biografię i główne kierunki jego pracy.

Antoni Wakulicz urodził się 7 kwietnia 1902 roku w miejscowości Miedzna w powiecie węgrowskim w województwie warszawskim w rodzinie rolnika. Uczęszczał do gimnazjum rosyjskiego a następnie w latach 1918–1920 do gimnazjum im. Zamojskiego w Warszawie. W latach 1920-1924 studiował na Uniwersytecie Warszawskim kończąc studia egzaminem nauczycielskim. Następnie pracował jako nauczyciel w gimnazjum im. Zamojskiego w Warszawie (1924–1927) i w gimnazjach w Pszczynie (1928–1935) i Katowicach (1935–1939). Brał udział w kampanii wrześniowej a w latach 1940–1945 był zaangażowany w tajne nauczanie w swojej rodzinnej miejscowości Miedzna. W latach 1944–1945 pracował w gimnazjum w Węgrowie, a następnie w gimnazjum w Katowicach (1946–1948). Od roku 1946 aż do przejścia na emeryturę w roku 1970 pracował na Politechnice Śląskiej. Równolegle od 1946 roku pracował w Instytucie Pedagogicznym w Katowicach, a następnie, od roku 1950, po likwidacji Instytutu w powstałej Państwowej Wyższej Szkole Pedagogicznej w Katowicach do roku 1970 (w początkowych latach w niepełnym wymiarze zatrudnienia). Doktorat uzyskał w 1949 roku za pracę z teorii mnogości (*O sumie skończonej liczby liczb porządkowych*). Promotorem był W. Sierpiński. W 1963 roku otrzymał tytuł profesora nadzwyczajnego. Za zasługi dla środowiska matematycznego wyróżniony został przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego nadaniem tytułu Członka Honorowego PTM w 1987 roku. Antoni Wakulicz zmarł 25 listopada 1988 roku.

Prace publikowane A. Wakulicza dzielą się na następujące grupy.
Prace z zakresu teorii mnogości [**100**], [**101**]. Najważniejszym rezultatem było rozwiązanie postawionego przez W. Sierpińskiego problemu z zakresu arytmetyki liczb porządkowych. Ten rezultat A. Wakulicza wszedł do klasycznych monografii W. Sierpińskiego i P. Bachmanna o liczbach pozaskończonych.

Prace z zakresu teorii liczb [**102**] – [**110**]. Opublikowane prace dotyczyły różnych zagadnień arytmetycznych, w tym równań diofantycznych. Szczególnie cenne są rezultaty A. Wakulicza o równaniach diofantycznych stopnia trzeciego, z których uzyskuje się klasyczne twierdzenia teorii liczb, wśród nich twierdzenie o liczbach trójkątnych pochodzące od Eulera. Ponadto, W. Sierpiński w swojej *Teorii Liczb*, cz. II, (PWN Warszawa 1959) zamieszcza 4 rezultaty A. Wakulicza, w tym dwa niepublikowane wcześniej. Jeden z nich to dowód nierozwiązalności równania $3^x + 2 = 5^y$ w liczbach naturalnych $x > 1, y$ (str. 155), drugi natomiast podaje bardzo zaskakującą charakteryzację liczb pierwszych postaci $12k + 5$. Na to by liczba $12k + 5$ była liczbą pierwszą potrzeba i wystarcza by liczba k nie była postaci $5x + (12x + 1)y$, gdzie x, y są liczbami całkowitymi, $x \neq 0$ (str. 346).

Prace z zakresu dydaktyki matematyki: 6 prac opublikowanych w Zeszytach Naukowych WSP w Katowicach w latach 1958–1968. Szczególną rolę w kształceniu nauczycieli odegrał znakomity artykuł *Zarys nowej konstrukcji kursu stereometrii.* Kilka artykułów poświęcił oryginalnemu ujęciu kursu algebry liniowej. Charakterystyczną cechą pomysłów A. Wakulicza w zakresie dydaktyki matematyki jest skoncentrowanie kursu wokół centralnych idei.

Skrypty i podręczniki. W licznych skryptach A. Wakulicz realizował swoje nowatorskie koncepcje dydaktyczne. Przeciwstawiał się tendencjom do formalizowania matematyki i wielką wagę przywiązywał do znalezienia celnej motywacji prezentowanego materiału.

Nie do przecenienia jest wkład A. Wakulicza w powstanie ośrodków matematycznych w Gliwicach i Katowicach, w tym zainicjowanie rozwoju kadry matematycznej na Śląsku. Był promotorem 6 prac doktorskich z zakresu dyscyplin, które nie były wcześniej uprawiane na Śląsku, takich jak teoria liczb (K. Szymiczek, 1966), algebra klasyczna (J. Ambrosiewicz, 1970, W. Wrona, 1970), teoria grafów (J. Kaczmarski, 1971), metody numeryczne (R. Bartłomiejczyk, 1971), teoria grup (E. Kowalski, 1977). Jego pionierska praca nauczycielska w zakresie algebry i teorii liczb i kształcenie kadry naukowej odegrały znaczną rolę w powstaniu profesjonalnego środowiska matematycznego na Śląsku.
Zainicjował także publikację pierwszego specjalistycznego czasopisma naukowego z zakresu matematyki na Śląsku jakim były od roku 1958 Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Katowicach. W odstępach dwuletnich ukazało się 6 numerów tego pisma zawierających łącznie 74 prace. A. Wakulicz nalegał by prace były publikowane w języku polskim (tylko jedna 2-stronicowa notka w ostatnim numerze wyłamała się od tej zasady) tak, by mogły być czytane przez jak najszersze grono odbiorców. Ta inicjatywa wydawnicza była kontynuowana od 1969 roku przez Uniwersytet Śląski w serii wydawniczej Prace Matematyczne, w której ukazało się do roku 1982 dwanaście numerów pisma. W roku 1985 zmieniono tytuł pisma na *Annales Mathematicae Silesianae* i rozpoczęto nową numerację tomów od **1**(13) zaznaczając, że nowe czasopismo jest kontynuacją Prac Matematycznych. Od numeru 5 z 1991 roku nie ma już odwołania do Prac Matematycznych.

2. Działalność ośrodka katowickiego

W początkowym okresie działalność ta była prowadzona przede wszystkim w Katedrze Algebry i Teorii Liczb w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Katowicach. Początkowo w składzie dwuosobowym (kierownik: A. Wakulicz, asystent: K. Szymiczek) zajmowano się równaniami diofantycznymi i liczbami pseudopierwszymi próbując pracować nad problemami stawianymi przez W. Sierpińskiego. Jakkolwiek W. Sierpiński stawiał wiele problemów, w pierwszej kolejności były one atakowane przez bardzo aktywną grupę uczniów Sierpińskiego (J. Browkin, A. Mąkowski, A. Rotkiewicz, A. Schinzel). Włączenie się do tej pracy było niełatwe zarówno ze względu na braki w wykształceniu, niedostępność literatury jak i brak kontaktów naukowych. Tym niemniej powstały wtedy prace, na przykład [**79**] – [**82**], które były inspirowane przez problemy Sierpińskiego (a praca [**79**] była nawet napisana przez Sierpińskiego na podstawie materiałów dostarczonych przez autora korespondencyjnie Sierpińskiemu). Moja praca doktorska [**83**] była już jednak sygnałem odejścia od inspiracji Sierpińskiego.

A. Wakulicz, wraz z grupą doktorantów spoza WSP w Katowicach (J. Ambrosiewicz, W. Wrona, E. Kowalski, A. Grytczuk), rozpoczął pracę badawczą w teorii grup i algebrze klasycznej. Ta grupa opublikowała 10 prac w Zeszytach Naukowych WSP (numery 5 i 6). Trzy doktoraty ukończono w Katowicach, czwarty został sfinalizowany w Poznaniu pod opieką nowego promotora. Należy przypomnieć, że w roku 1963 Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii WSP w Katowicach uzyskał prawa doktoryzowania w zakresie matematyki. Pierwsze obrony prac doktorskich były wielkimi wydarzeniami i największa sala jaką dysponowała uczelnia (aula na ul. Szkolnej 9) z trudem mieściła wszystkich widzów. W roku 1968 powstał Uniwersytet Śląski i Katedra została przekształcona w Zakład Algebry i Teorii Liczb.

Po odejściu prof. A. Wakulicza na emeryturę (w roku 1970), otrzymałem stypendium British Council na roczny staż naukowy na Uniwersytecie w Cambridge w Anglii. W trakcie tego stażu (w latach 1971–1972) zetknąłem się z nową wówczas problematyką algebraicznej teorii form kwadratowych i po raz pierwszy usłyszałem nazwiska Witta i Pfistera (i oczywiście poznałem w pewnym stopniu ich prace).

Po powrocie z Cambridge powierzono mi kierowanie Zakładem Algebry i Teorii Liczb. Udało mi się wówczas skoncentrować zainteresowania młodych pracowników Zakładu Algebry i Teorii Liczb na tej problematyce. W rezultacie intensywnej pracy i nawiązania kontaktu z czołowymi przedstawicielami tego kierunku badań (T. Y. Lam (Berkeley), R. Elman (Los Angeles), A. Prestel (Konstanz), W. Scharlau (Münster) i wielu innych) grupa stopniowo zaczęła uzyskiwać wyniki budzące zainteresowanie zagranicznych ekspertów. Moja habilitacja (1977) oraz trzy doktoraty moich współpracowników w 1979 roku (Andrzej Sładek, Mieczysław Kula, Lucyna Szczepanik) zamknęły pierwszy etap badań w zakresie algebraicznej teorii form kwadratowych. Badania w teorii form kwadratowych nad ciałami były jeszcze kontynuowane i w tej problematyce w 1985 roku doktorat uzyskał Krzysztof Kozioł. Ponadto prowadzono badania w teorii abstrakcyjnych pierścieni Witta i pierścieni Witta algebr nieprzemiennych. Podsumowaniem osiągnięć w tym zakresie były rozprawy habilitacyjne A. Sładka (1993) o pierścieniach Witta ciał nieprzemiennych i M. Kuli (1993) o strukturze skończenie generowanych pierścieni Witta.

Od początku lat osiemdziesiątych zainteresowania badawcze w zakładzie poszły także w kierunku teorii form kwadratowych nad ciałami globalnymi (ciałami liczb algebraicznych i funkcji algebraicznych nad ciałami skończonymi). Przede wszystkim zauważyliśmy, że znane rezultaty o strukturze addytywnej grupy pierścienia Witta ciała globalnego nie wystarczają do rozstrzygnięcia najprostszych pytań związanych ze strukturą multyplikatywną tego pierścienia. A więc, na przykład, nie była znana odpowiedź na pytanie, czy istnieją dwa ciała liczb algebraicznych o izomorficznych pierścieniach Witta. Okazało się, że jest to istotna luka w najbardziej klasycznej części teorii form kwadratowych (nad ciałami globalnymi). Pierwsze ważne rezultaty przyniosła rozprawa doktorska Alfreda Czogały w 1988 roku, w której uzyskano kompletną klasyfikację ciał kwadratowych ze względu na łagodną równoważność Witta (istnienie tak zwanych łagodnych izomorfizmów pierścieni Witta). W następstwie międzynarodowej współpracy udało się rozwiązać główny problem polegający na podaniu efektywnego kryterium na to, by pierścienie Witta dwóch ciał globalnych były izomorficzne. Do tego samego nurtu, ale z rezultatami znacznie ogólniejszymi dotyczącymi nie tyle pierścieni Witta i kwadratowych symboli Hilberta co symboli Hilberta dowolnego stopnia, należy habilitacja A. Czogały w 2001 roku.

Trzy dalsze doktoraty nie mieszczą się już w wymienionych kierunkach badań.
M. Szyjewski wyjechał w 1986 roku na studia doktoranckie do Leningradu, gdzie pracował nad hipotezą Milnora. Uzyskał doktorat pod kierunkiem A. A. Suslina w 1990 roku.
A. Wesołowski zajmował się teorią form wyższych stopni, w szczególności formami śladu algebr etalnych, i ich automorfizmami. Uzyskał doktorat pod kierunkiem A. Sładka w 1999 roku.

P. Koprowski rozstrzygnął kompletnie problem równoważności Witta ciał funkcji algebraicznych nad ciałami rzeczywiście domkniętymi poprzez warunki geometryczne na odpowiadające ciałom krzywe algebraiczne. Uzyskał doktorat w 2001 roku.

W rezultacie systematycznej i długoletniej współpracy z matematykami czeskimi i słowackimi zainicjowano w 1996 roku Czesko-Polskie Konferencje z Teorii Liczb. Organizują je naprzemiennie Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego i Uniwersytet w Ostrawie (1996 - Ostrawa, 1998 - Cieszyn, 2000 - Ostravice, 2002 - Cieszyn).

Dokładniejsze informacje o uzyskanych rezultatach matematycznych przedstawione są w §4.

3. Działalność ośrodka gliwickiego

Początki działalności naukowej w zakresie algebry w Gliwicach wiążą się z przyjściem do Politechniki Śląskiej w Gliwicach w roku 1971 dr Olgi Macedońskiej-Nosalskiej, absolwentki Uniwersytetu Moskiewskiego. Doktorat uzyskała w 1971 roku w Uniwersytecie Moskiewskim (MGU) za pracę o iloczynach poliwerbalnych grup przygotowaną pod kierunkiem O. N. Gołovina. Pierwszym artykułem naukowym opublikowanym w czasie jej pracy w Gliwicach była zapewne praca [**44**] z 1974 roku. Habilitację otrzymała w 1986 roku w Uniwersytecie Wrocławskim za pracę o nieskończonych przekształceniach Nielsena. W 1974 roku uruchomiła ona seminarium szkoleniowe z teorii grup, w którym uczestniczyli studenci pierwszych lat studiów. Niektórzy z nich po ukończeniu studiów podjęli studia doktoranckie na Uniwersytetach: Leningradzkim (P. Gawron, W. Hołubowski) i Moskiewskim (K. Herman). Pierwszy z nich, Piotr Gawron, uzyskał w roku 1982 doktorat za pracę o położeniu podgrup w grupie symetrycznej (promotor Z. Borewicz). Waldemar Hołubowski otrzymał doktorat za pracę o strukturze izotropowych grup ortogonalnych w 1991 roku (promotor N. Vaviłov). Kolejnym wychowankiem seminarium z teorii grup jest Witold Tomaszewski, który uzyskał w 1999 roku doktorat na Uniwersytecie Śląskim za pracę o automorfizmach permutujących w grupach i ich punktach stałych (promotor O. Macedońska).

Nowym impulsem w rozwoju pracy naukowej w zakresie algebry było w roku 1980 przyjście doc. dra hab. Ernesta Płonki. Uzyskał on doktorat w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego w 1969 r. i habilitację w Instytucie Matematycznym PAN w Warszawie w 1979 r. Tytuł profesora uzyskał w 1992 roku. Pod jego kierunkiem wypromowano 3 doktorów: Jerzy Kogut (1985), Zbigniew Marszałek (1986), Marek Żabka (1997). Czwarty doktorant Krzysztof Herman zmarł w 1987 r. tuż przed obroną pracy doktorskiej.

W 1984 roku w Instytucie Matematyki Politechniki Śląskiej powstał Zakład Metod Algebraicznych, którym do dziś kieruje prof. E. Płonka. W ramach tego Zakładu funkcjonowało seminarium z algebry wspólne z seminarium z teorii grup O. Macedońskiej. W 1988 roku utworzony został Zakład Teorii Grup (od 1995 roku - Zakład Algebry), którym kieruje dr hab. Olga Macedońska. We wspólnym seminarium z algebry uczestniczą obecnie pracownicy Zakładu Algebry, Zakładu Metod Algebraicznych i Zakładu Matematyki Dyskretnej.

Ośrodek gliwicki zainicjował serię międzynarodowych konferencji specjalistycznych *Groups and Group Rings*. Pierwsza krajowa konferencja pod nazwą *Grupy i inne Struktury Algebraiczne* odbyła się w Gliwicach w 1992 roku. Następne były już międzynarodowe a w 2003 odbyła się już dziesiąta konferencja z tej serii.

W roku 1995 do algebraicznej grupy badawczej Instytutu Matematyki Politechniki Śląskiej dołączył profesor W. Suszczański, specjalista z teorii grup.

Obok teorii grup prowadzi się w Gliwicach także badania w następujących kierunkach: metody numeryczne rozwiązywania równań algebraicznych, zbiory rozmyte i logika wielowartościowa, stabilność i symetria grafów, słabe automorfizmy algebr. Następująca lista przykładowych publikacji oddaje w pewnym stopniu zainteresowania badawcze i aktywność naukową grupy gliwickiej: O. Macedońska [**2, 45, 46, 47**], E. Płonka [**56, 57**], W. Suszczański [**21, 33**], P. Gawron, W. Hołubowski, W. Tomaszewski, M. Żabka [**20, 22, 23, 24, 48**].

Powstały także podręczniki akademickie autorstwa E. Płonki, *Wykłady z Algebry Wyższej* I, II (algebra liniowa), Gliwice, 2001, 2002.

4. Kierunki działalności naukowej ośrodka katowickiego

Podstawowym pojęciem algebraicznej teorii form kwadratowych jest pierścień Witta $W(K)$ dowolnego ciała K. Konstrukcję $W(K)$ zaproponował E. Witt [**112**] w 1937 roku natomiast pierwsze istotne rezultaty o strukturze pierścieni Witta ciał uzyskał 30 lat później A. Pfister [**54**]. Od strony pojęciowej prace Witta i Pfistera mogły być traktowane jako należące do algebry liniowej. Istotnym punktem widzenia było traktowanie wszelkich zagadnień dotyczących form kwadratowych z taką samą ogólnością z jaką traktuje się równania i przekształcenia liniowe, a więc nad dowolnym ciałem (w przeciwieństwie do klasycznej teorii uprawianej głównie nad ciałami liczb rzeczywistych, zespolonych, nad ciałami liczb algebraicznych i ich uzupełnieniami i ciałami reszt). Naturalnym dopełnieniem były tu konstrukcje dobrze znane z teorii algebr, w tym przede wszystkim grupa Brauera ciała. Ta teoria jest dostępna dla *advanced undergraduates and beginning graduate students* i została wyłożona, na przykład, w [**95**]. Dla bardziej zaawansowanego czytelnika nieodzowne okazują się nadal książki Lama [**43**], Milnora-Husemollera [**51**], Marshalla [**49**] i Scharlaua [**58**].

4.1. Klasyfikacja ciał ze względu na formy kwadratowe. Wobec kluczowego znaczenia pierścienia Witta $W(K)$ ciała K, w którego strukturze są jakoś zakodowane fundamentalne własności form kwadratowych nad ciałem K, bardzo naturalnym zagadnieniem jest próba klasyfikacji ciał ze względu na typ izomorficzny pierścienia Witta. A więc dwa ciała K i L nazwiemy równoważnymi w sensie Witta, jeśli ich pierścienie Witta są izomorficzne: $W(K) \cong W(L)$. Intuicyjnie rzecz biorąc, ciała równoważne w sensie Witta powinny mieć identyczne teorie form kwadratowych (cokolwiek miałoby to oznaczać). Rzeczywiście, okazuje się, że dwa ciała K i L (charakterystyki $\neq 2$) są równoważne w sensie Witta wtedy i tylko wtedy gdy istnieje izomorfizm grup klas kwadratów

$$t : K^*/K^{*2} \to L^*/L^{*2}$$

indukujący bijekcję T pomiędzy klasami równoważnych form kwadratowych,

$$T(a_1, \ldots, a_n) = (ta_1, \ldots, ta_n), \quad a_i \in K^*/K^{*2}$$

taką, że dla zbiorów $D_K(f)$ i $D_L(Tf)$ elementów przedstawialnych przez formę f i jej obraz Tf mamy

$$D_L(Tf) = t(D_K(f)).$$

Jest to więc bardzo ścisły związek pomiędzy formami kwadratowymi nad ciałami K i L. Z jednej strony, istnieje bijekcja pomiędzy formami kwadratowymi respektująca

równoważność form kwadratowych, z drugiej strony odpowiadające sobie formy kwadratowe przedstawiają odpowiadające sobie za pośrednictwem izomorfizmu t zbiory elementów ciał K i L. Ta interpretacja równoważności Witta ciał w języku zbiorów wartości form kwadratowych nosi nazwę twierdzenia Harrisona. Faktycznie twierdzenie Harrisona orzeka, że powyższe warunki mają być spełnione tylko dla form binarnych ($n = 2$).
Pierwsze prace na temat klasyfikacji ciał ze względu na równoważność Witta ograniczały się do ciał F ze skończoną liczbą $q = q(F) = |F^*/F^{*2}|$ klas kwadratów (zob. [**84, 85**] i cytowaną tam literaturę). Taktyka klasyfikacji polegała na tym by przewidzieć jaką strukturę mogą mieć addytywne grupy pierścieni Witta ciał z daną liczbą klas kwadratów q, a następnie dla każdej z wyselekcjonowanych już grup należało wskazać ciało, którego grupa Witta jest równa danej grupie. Ten drugi problem nazywamy problemem realizacji grupy Witta przez ciało. To podejście okazało się skuteczne jedynie dla ciał z liczbą klas kwadratów $q \leqslant 4$. Dla $q = 8$ nie udało się przy wykorzystaniu wszystkich istniejących konstrukcji ciał ze skończoną liczbą klas kwadratów znaleźć ciał odpowiadających wszystkim potencjalnym grupom Witta. Oczywiście operowanie addytywnymi grupami pierścieni Witta zamiast samymi pierścieniami było już uproszczeniem, które mogło prowadzić do większej liczby typów, ale przyczyny tych trudności tkwiły gdzie indziej.

Przełomowymi rezultatami były twierdzenia realizacyjne M. Kuli [**34, 36**], które umożliwiły zamknięcie klasyfikacji dla ciał z ośmioma klasami kwadratów [**41**] oraz szesnastoma klasami kwadratów [**74**]. Rezultaty te najlepiej wyrazić w języku abstrakcyjnych pierścieni Witta i czynimy to poniżej.

Niech $w(q)$ będzie liczbą klas równoważnych w sensie Witta ciał (o charakterystyce $\neq 2$) z grupą klas kwadratów rzędu q. Dokładne wartości $w(q)$ są znane tylko dla $q \leqslant 32$ i są przedstawione w następujące tabeli

q	1	2	4	8	16	32	64	128
$w(q)$	1	3	6	17	51	155	$\geqslant 492$	$\geqslant 1600$

Przypadki $q \leqslant 8$ były badane przez Cordesa, Scharlaua i autora [**84, 85**] i opierały się na zasadniczo różniących się podejściach. Cordes zaproponował podejście aksjomatyczne do opisu typów grup Witta dla ciał z małą liczbą klas kwadratów. To podejście okazało się już całkowicie nieskuteczne w przypadku $q = 16$. Przyczynę tego stanu rzeczy odkryła Lucyna Szczepanik [**74**], pokazując, że aksjomatyka Cordesa jest zbyt słaba i już dla $q = 8$ prowadzi do obiektów nie pochodzących od ciał i form kwadratowych. Wprowadziła ona nowy aksjomat, który wyeliminował patologie i pozwolił jej na zbudowanie aksjomatycznej teorii przydatnej dla uzyskania klasyfikacji ciał w przypadku $q = 16$ i ustalenia przy pomocy twierdzeń realizacyjnych M. Kuli, że $w(16) = 51$.
Następnie w roku 1982 w pracy A. B. Carsona i M. A. Marshalla [**3**] udoskonalone zostały stosowane dotąd techniki i uzyskane zostały w sposób jednolity wszystkie rezultaty prezentowane w tabeli (częściowo z wykorzystaniem obliczeń komputerowych).
Problemowi klasyfikacji pierścieni Witta i Grothendiecka ciał poświęcone są także prace [**32, 35, 60, 72, 73, 74, 75, 84, 85, 86, 87**].

4.2. Abstrakcyjne pierścienie Witta i metody kombinatoryczne. Pierścień Witta ciała K można opisać za pomocą generatorów i relacji. Prowadzi to do przedstawienia $W(K) = \mathbb{Z}[G]/J$, gdzie $G = K^*/K^{*2}$ jest grupą klas kwadratów

ciała K, $\mathbb{Z}[G]$ oznacza pierścień grupowy grupy G nad $\mathbb{Z}$, natomiast J jest pewnym ideałem w $\mathbb{Z}[G]$. Ważną własnością pierścienia Witta ciała jest fakt, że podgrupa torsyjna addytywnej grupy tego pierścienia jest $2-$prymarna. Te własności pierścienia Witta ciała prowadzą do następującej definicji.
Abstrakcyjnym pierścieniem Witta nazywamy pierścień R, który ma prezentację

$$R = \mathbb{Z}[G]/J,$$

gdzie G jest elementarną $2-$grupą oraz podgrupa elementów torsyjnych w R jest grupą $2-$prymarną. Okazuje się, że z własności definiujących abstrakcyjny pierścień Witta można wydedukować niemal wszystkie własności strukturalne, które dla pierścieni Witta ciał udowodnił Pfister. Ponadto abstrakcyjne pierścienie Witta można badać metodami algebry komutatywnej uwalniając się w ten sposób od zawikłanych zależności struktury pierścienia Witta od wyznaczającego go ciała. Łatwo stwierdzić, że abstrakcyjne pierścienie Witta tworzą kategorię, jeśli za morfizmy przyjąć homomorfizmy pierścieni $h : \mathbb{Z}[G]/J \to \mathbb{Z}[G_1]/J_1$ takie, że dla każdego $g \in G$ mamy $h(g + J) = g_1 + J_1$ dla pewnego $g_1 \in G_1$. Oznaczmy tę kategorię symbolem $\mathcal{APW}$. Oczywiście pierścienie Witta ciał są obiektami tej kategorii. Jeśli R jest abstrakcyjnym pierścieniem Witta i istnieje ciało K takie, że R i $W(K)$ są izomorficzne, to mówimy, że pierścień R jest realizowany przez ciało K (realizuje się jako pierścień Witta ciała K). Pierwszym rezultatem, który pokazuje zalety abstrakcyjnego podejścia do pierścieni Witta jest nietrudny do udowodnienia fakt: *w kategorii $\mathcal{APW}$ istnieją skończone produkty obiektów.*

Istnieje jeszcze jedna operacja w kategorii $\mathcal{APW}$, operacja rozszerzenia grupowego pierścienia Witta. Jeśli R jest pierścieniem Witta, to pierścień grupowy $R[\Delta]$, gdzie Δ jest elementarną $2-$grupą, jest także abstrakcyjnym pierścieniem Witta. Te dwie operacje, które nazwiemy operacjami elementarnymi na abstrakcyjnych pierścieniach Witta, pozwalają z obiektów prostszych zbudować bardziej skomplikowane. Jeśli więc ustalimy listę *bazowych* pierścieni Witta, powiedzmy $R_1, \ldots, R_m$, to stosując operacje elementarne do pierścieni tej listy i iterując to postępowanie, otrzymamy klasę pierścieni konstruowalnych z pierścieni bazowych przy pomocy operacji elementarnych. Szczegółowa analiza struktury pierścieni Witta ciał z liczbą klas kwadratów $q \leqslant 8$ pokazała, że wszystkie te pierścienie można otrzymać poprzez operacje elementarne z następującej listy bazowych pierścieni Witta:

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \mathbb{L}_3,$$

gdzie $\mathbb{L}_3$ jest pierścieniem Witta ciała $\mathbb{Q}_2$ liczb $2-$adycznych. Cztery wymienione tu pierścienie bazowe nie są już przedstawialne przez operacje elementarne na jakichś prostszych pierścieniach Witta, są więc naprawdę *bazowe.* Warto zauważyć, że bazowe pierścienie Witta są realizowane przez ciała, odpowiednio $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_3, \mathbb{Q}_2$. Dalsza analiza tej sytuacji prowadzi do wniosku, że do bazowych pierścieni Witta (czyli nierozkładalnych w sensie operacji elementarnych) należy zaliczyć pierścienie Witta $\mathbb{L}_n$, $n \geqslant 1$, skończonych rozszerzeń stopnia n ciała $\mathbb{Q}_2$ liczb $2-$adycznych. Przy takiej liście bazowych pierścieni Witta znana jest nieudowodniona od ponad 20 lat hipoteza o typie elementarnym ETC (*Elementary Type Conjecture*):
Każdy skończenie generowany pierścień Witta powstaje z pierścieni bazowych poprzez ciąg operacji elementarnych.
Opisywane powyżej rezultaty o klasyfikacji ciał ze względu na formy kwadratowe potwierdzają słuszność ETC dla pierścieni Witta wszystkich ciał K z liczbą klas

kwadratów $q(K) \leqslant 32$. Także występujące w tabeli nierówności $w(64) \geqslant 492$ oraz $w(128) \geqslant 1600$ powstały przez obliczenie liczby elementarnych pierścieni Witta. Dla $q = 64$ wynosi ona 492, dla $q = 128$ jest równa 1600. Jeśli hipoteza ETC jest prawdziwa dla tych dwóch wartości q, to $w(64) = 492$ oraz $w(128) = 1600$.

Drugą, oprócz ciał z $q \leqslant 32$, klasą, dla której hipoteza ETC została udowodniona jest klasa beztorsyjnych abstrakcyjnych pierścieni Witta. Pierścień Witta ciała K jest beztorsyjny wtedy i tylko wtedy gdy ciało K jest *pitagorejskie* (to znaczy, gdy każda suma kwadratów elementów ciała K jest kwadratem pewnego elementu ciała K). W szczególności więc, pierścień Witta każdego ciała pitagorejskiego ze skończoną liczbą klas kwadratów można otrzymać z pierścienia Witta ciała liczb rzeczywistych $W(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ poprzez ciąg operacji elementarnych. Ten elegancki rezultat udowodnili niezależnie M. Marshall (zob. [**49**]) i A. Sładek w swojej rozprawie doktorskiej.

Rozpatrywanie operacji elementarnych na abstrakcyjnych pierścieniach Witta i naturalna hipoteza ETC stają się szczególnie (a może nawet jedynie) istotne, gdy zawęzimy rozważania do pierścieni Witta ciał (czyli abstrakcyjnych pierścieni Witta realizowanych przez ciała). Wtedy od razu stajemy przed fundamentalnym pytaniem: czy operacje elementarne na pierścieniach realizowanych przez ciała są także pierścieniami Witta realizowanymi przez ciała? W przypadku rozszerzeń grupowych sytuacja jest prostsza i odpowiedź pozytywna wynika ze znanych rezultatów T. A. Springera z lat pięćdziesiątych. Z grubsza mówiąc rozszerzenia grupowe pierścienia $W(K)$ są realizowane przez ciała szeregów formalnych nad ciałem K. Natomiast w przypadku produktu problem jest znacznie trudniejszy i został całkowicie rozwiązany metodami teorii waluacji w pracy doktorskiej M. Kuli [**34, 36**]. Okazuje się, że

Skończony produkt abstrakcyjnych pierścieni Witta realizowanych przez ciała jest abstrakcyjnym pierścieniem Witta realizowanym przez pewne ciało.

To twierdzenie i prawdziwość hipotezy ETC dają pełną klasyfikację ciał ze skończoną liczbą klas kwadratów ze względu na typ izomorficzny pierścienia Witta. Szczegółową prezentację tej teorii można znaleźć w książce Marshalla [**49**].
M. Kula, M. Marshall i A. Sładek [**40**] studiowali także strukturę granic prostych skończenie generowanych beztorsyjnych abstrakcyjnych pierścieni Witta. Wyjaśniona została możliwość realizowania dowolnych beztorsyjnych abstrakcyjnych pierścieni Witta przez przestrzenie porządków ciał pitagorejskich. Inne prace poświęcone problematyce abstrakcyjnych pierścieni Witta to [**31, 39, 42, 61, 62, 75**]

W pracach nad potwierdzeniem hipotezy ETC poziom komplikacji ciała charakteryzuje się przeważnie liczbą klas kwadratów ciała $q(K) = |K^*/K^{*2}|$. Dla $q \leqslant 32$ hipoteza ETC jest udowodniona. Innym naturalnym w teorii form kwadratowych miernikiem poziomu komplikacji teorii form kwadratowych nad ciałem K jest liczba $Q(K)$ algebr kwaternionów nad ciałem K (to znaczy, liczba klas izomorficznych algebr kwaternionów nad K). Jeśli q jest skończone, to mamy trywialne oszacowanie $Q \leqslant q^2$, ale na przykład, dla każdego ciała z $q = 8$ liczba algebr kwaternionów jest $\leqslant 12$ (zob. [**72**], gdzie analizowane są związki między q i Q). Badanie struktury pierścieni Witta ciał w zależności od liczby algebr kwaternionów nad ciałem zainicjował C. Cordes. Najtrudniejszymi do zbadania są przypadki, gdy Q jest potęgą liczby 2. Przypadek $Q = 2$ jest już wysoce nietrywialny (dla każdego $q = 2^\ell$ istnieją ciała K z $Q(K) = 2$) i był dyskutowany przez Fröhlicha, Kaplansky'ego i Cordesa (definitywne ujęcie w [**49**, str. 95–99]) i był także źródłem inspiracji dla różnych uogólnień (zob. [**87, 32**]). W pracy [**5**], posługując się pomysłowymi metodami kombinatorycznymi, Cordes udowodnił, że jeśli $Q(K) = 4$, to hipoteza ETC jest prawdziwa dla K. Ten rezultat uchodzi już za bardzo trudny do udowodnienia. M. Kula w swojej pracy habilitacyjnej [**37**] zrobił dalszy istotny krok dowodząc prawdziwości ETC dla ciał ze skończoną liczbą klas kwadratów i $Q = 8$. Dwie inne prace M. Kuli [**38, 39**] podają rezultaty o liczbie pierścieni Witta z zadaną liczbą klas kwadratów, w tym także asymptotyczne oszacowania liczby pierścieni Witta. W pracy [**38**] udowodniona została elegancka hipoteza W. Scharlaua mówiąca, że funkcja tworząca skończenie generowanego pierścienia Witta jest zawsze funkcją wymierną z jednym biegunem.

4.3. Algebry z dzieleniem. Dla ciała nieprzemiennego A pierścień Witta $W(A)$ określa się jako abstrakcyjny pierścień Witta

$$W(A) = \mathbb{Z}[S(A)]/J$$

gdzie $S(A)$ jest podgrupą multyplikatywnej grupy $A^\times$ ciała A generowaną przez zbiór wszystkich kwadratów $A^{\times 2}$. Tutaj J jest ideałem generowanym przez zbiór

$$\{[1] + [a] - [1 + a] - [a(1 + a)] : a \in S(A), a \neq 0, -1\} \cup \{[1] + [-1]\}.$$

T. Craven udowodnił w 1982 roku, że dla każdego ciała F istnieje nieprzemienne ciało A takie, że $F \subseteq A$ oraz $W(F) \cong W(A)$.

Równie interesujące jest pytanie, czy dla danego ciała nieprzemiennego A istnieje ciało F takie, że $W(A) \cong W(F)$. A. Sładek udowodnił, że tak jest, gdy
(a) A jest algebrą kwaternionów nad ciałem pitagorejskim lub lokalnym ([**64**]), lub
(b) A jest algebrą z dzieleniem nad ciałem globalnym i ma wymiar nieparzysty ([**68**]).
Jeśli wymiar jest parzysty, to konstruuje się abstrakcyjny pierścień Witta $W_c(A)$, realizowany przez pewne ciało, którego homomorficznym obrazem jest $W(A)$ ([**69**]).

A. Sładek znalazł także odpowiednik twierdzenia Springera o strukturze pierścieni Witta ciał zupełnych względem waluacji dyskretnej dla przypadku ciała nieprzemiennego zupełnego względem waluacji dyskretnej ([**66**]). Jako konsekwencję tej teorii pokazał, że istnieje ciało nieprzemienne A zupełne względem waluacji dyskretnej, takie, że pierścień Witta $W(A)$ nie jest izomorficzny z pierścieniem Witta żadnego ciała przemiennego ([**65**]).

4.4. Ciała globalne. Ciała liczb algebraicznych mają *nieskończone* grupy klas kwadratów i metody badania równoważności Witta wypracowane dla ciał ze skończoną grupą klas kwadratów okazały się nieprzydatne dla ciał liczb algebraicznych. Jeszcze w roku 1983 nie była znana odpowiedź na pytanie, czy istnieją dwa nieizomorficzne ciała liczb algebraicznych z izomorficznymi pierścieniami Witta (takie pytanie zgłosiłem jako otwarty problem na konferencji w Chlébském w 1983 roku). W trakcie pracy nad tym zagadnieniem zauważono przede wszystkim, że dla ciał liczb algebraicznych problem równoważności Witta można sformułować w języku symboli Hilberta. Okazuje się (zob. [**91**]), że ciała liczb algebraicznych K i L są równoważne w sensie Witta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dwie bijekcje

$$t : K^*/K^{*2} \to L^*/L^{*2}, \quad T : \Omega_K \to \Omega_L,$$

z których pierwsza jest izomorfizmem grup, a druga odwzorowuje zbiór dywizorów pierwszych ciała K (z dywizorami nieskończonymi włącznie) na odpowiedni zbiór dywizorów ciała L, oraz bijekcje te zachowują kwadratowe symbole Hilberta w tym sensie, że

$$(a,b)_{\mathfrak{p}} = (ta,tb)_{T\mathfrak{p}} \quad \forall\ a,b \in K^*/K^{*2},\ \forall\ \mathfrak{p} \in \Omega_K.$$

W związku z tym, dla ciał liczb algebraicznych zamiast o równoważności Witta mówi się często o równoważności Hilberta tych ciał. Głównym wynikiem o równoważności Witta ciał liczbowych jest efektywny warunek konieczny i wystarczający na to by dwa ciała liczbowe były równoważne w sensie Witta. Sprowadza się on do następującej *zasady lokalno-globalnej dla równoważności Witta ciał liczbowych* (zob. [**53**]): *Ciała liczb algebraicznych K i L są równoważne w sensie Witta wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy uzupełnieniami ciał K i L taka, że odpowiadające sobie uzupełnienia są równoważne w sensie Witta.*
Wykorzystując zasadę lokalno-globalną można wskazać kompletny układ niezmienników równoważności Witta ciał liczbowych. Są to dla ciała K

$$n,\ r,\ s,\ g; \quad (n_i, s_i), \quad i = 1, \ldots, g,$$

gdzie $n = [K : \mathbb{Q}]$, r jest liczbą rzeczywistych zanurzeń ciała K, $s = s(K)$ jest indeksem Pfistera (level, Stufe) ciała K, g oznacza liczbę ideałów dyadycznych, n_i oraz s_i są stopniami i indeksami Pfistera dyadycznych uzupełnień ciała K. W szczególności, równoważność Witta zachowuje stopnie ciał liczbowych K, L, co nie jest oczywiste bezpośrednio. A więc na przykład, ciało $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych nie jest równoważne w sensie Witta z żadnym innym ciałem liczbowym.
Znając kompletny niezmiennik równoważności Witta można też próbować pełnej klasyfikacji ciał liczbowych danego stopnia n, w szczególności dla ciał małych stopni. Kompletne klasyfikacje są znane dla ciał stopnia $n = 2, 3, 4$ (zob. [**11, 26, 53, 92**]. Ogólnie, dla każdej liczby naturalnej n istnieje tylko skończona liczba $w(n)$ klas Witta ciał liczbowych stopnia n. Znane są wartości $w(n)$ dla $n \leqslant 11$ (zob. [**92**]):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$w(n)$	1	7	8	29	36	95	124	270	365	715	954

Tak więc ciała kwadratowe ($n = 2$) rozpadają się na siedem klas Witta. Obliczając niezmienniki można pokazać, że klasy te są reprezentowane przez następujące ciała:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}\,), \quad d = -1, \pm 2, \pm 7, \pm 17.$$

Wszystkie klasy są nieskończone z wyjątkiem klasy ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}\,)$, która jest jednoelementowa. Okazuje się, że sześć spośród wymienionych ciał kwadratowych ma liczbę klas ideałów równą 1 (a więc pierścienie liczb całkowitych w tych ciałach są pierścieniami ideałów głównych), natomiast ciało $\mathbb{Q}(\sqrt{-17}\,)$ ma liczbę klas równą 4. W pracy [**6**] zaobserwowaliśmy, że każda z sześciu nieskończonych klas Witta ciał kwadratowych (5 spośród nich reprezentowanych przez ciała z liczbą klas 1), zawiera także ciała z parzystą liczbą klas ideałów a nawet z dowolnie dużą 2-rangą grupy klas ideałów. Ten stan rzeczy przenosi się na klasy Witta ciał liczbowych dowolnego stopnia parzystego, a nawet ciał dowolnego stopnia. Można bowiem udowodnić, że *jeśli liczba pierwsza p dzieli n, to każda nieskończona klasa ciał liczbowych stopnia n równoważnych w sensie Witta zawiera ciała z dowolnie duża p-rangą grupy klas ideałów* (zob. [**96**]).

Rozstrzygnięcie, czy dwa ciała liczb algebraicznych mają izomorficzne pierścienie Witta sprowadza się do obliczenia wymienionych wyżej arytmetycznych niezmienników tych ciał. Jednakże to rozstrzygnięcie nie daje odpowiedzi na pytanie jaki jest typ izomorficzny pierścienia Witta tych ciał. A. Czogała i A. Sładek w pracy [**19**] dla każdego ciała liczb algebraicznych K skonstruowali pewien pierścień $V(K)$ (wskazując konkretnie elementy i definiując działania), który jest izomorficzny z pierścieniem Witta ciała K. Można więc uważać, że w ten sposób została całkowicie rozszyfrowana struktura pierścienia Witta dowolnego ciała liczb algebraicznych.

Jeśli pierścienie Witta dwóch ciał liczbowych K i L są izomorficzne oraz $\tau : W(K) \to W(L)$ jest izomorfizmem pierścieni, to na podstawie zasady lokalno-globalnej istnieje bijekcja $T : \Omega_K \to \Omega_L$ zbiorów wszystkich dywizorów pierwszych ciał K i L taka, że dla każdego $\mathfrak{p} \in \Omega_K$ izomorfizm τ indukuje izomorfizm

$$\tau_{\mathfrak{p}} : W(K_{\mathfrak{p}}) \to W(L_{T\mathfrak{p}}).$$

W tym kontekście przejście od sytuacji globalnej do lokalnej, inaczej niż dla izotropowości czy równoważności form kwadratowych, jest nietrywialne: działamy bowiem w dwóch różnych ciałach i jest potrzebne odwzorowanie T dla porównania zachowania lokalnego w dwóch ciałach. Następująca definicja wyodrębnia szczególnie ważną własność lokalnych izomorfizmów $\tau_{\mathfrak{p}}$.

Definicja. Jeśli dla każdej jedności $u \in K_{\mathfrak{p}}$ izomorfizm τ_p przeprowadza klasę Witta $\langle u\rangle \in W(K_{\mathfrak{p}})$ na klasę Witta $\langle u'\rangle \in W(L_{T\mathfrak{p}})$, gdzie u' jest jednością w ciele $L_{T\mathfrak{p}}$, to izomorfizm $\tau_{\mathfrak{p}}$ nazywa się *łagodnym izomorfizmem lokalnym* indukowanym przez izomorfizm globalny τ.

Jeśli wszystkie izomorfizmy lokalne indukowane przez izomorfizm globalny τ są łagodne, to izomorfizm globalny τ nazywa się *łagodnym izomorfizmem globalnym* pierścieni $W(K)$ i $W(L)$, natomiast ciała K i L nazywa się *łagodnie równoważnymi* w sensie Witta.

Pełną klasyfikację ciał kwadratowych ze względu na łagodną równoważność Witta podał A. Czogała w swojej pracy doktorskiej (zob. [**11**]). Ponieważ jednym z niezmienników łagodnej równoważności jest liczba czynników pierwszych wyróżnika ciała, więc ciała kwadratowe rozpadają się na nieskończenie wiele klas łagodnie równoważnych ciał (wobec 7 klas zwykłej równoważności Witta).

Okazuje się, że jeśli ciała K i L są łagodnie równoważne, to izomorficzne są także pierścienie Witta pierścieni liczb całkowitych $\mathcal{O}_K$ i $\mathcal{O}_L$ ciał K i L:

$$W\mathcal{O}_K \cong W\mathcal{O}_L,$$

a także, dla grup $C(K)$ i $C(L)$ klas ideałów w ciałach K i L mamy izomorfizm

$$C(K)/C(K)^2 \cong C(L)/C(L)^2.$$

Stąd wynika, że $2-$rangi grup klas ideałów ciał K i L są równe. A więc inaczej niż w przypadku zwykłej równoważności Witta, *łagodna równoważność ciał liczbowych zachowuje parzystość liczby klas ideałów.*

4.5. Równoważność Hilberta wyższych stopni i formy wyższych stopni. Jak to zauważyliśmy wyżej, równoważność Witta ciał liczb algebraicznych ma kompletny opis w języku kwadratowych symboli Hilberta. Jeszcze innego sposobu opisu równoważności Witta dostarcza twierdzenie Harrisona dające opis równoważności Witta w języku zbiorów wartości binarnych form kwadratowych. Dla ciał liczb algebraicznych nie znamy wprawdzie żadnych odpowiedników pierścienia Witta form wyższych stopni, ale znamy teorię symboli Hilberta wyższych stopni. A. Czogała i A. Sładek [**17**] wprowadzili więc równoważność Hilberta wyższych stopni ciał liczb algebraicznych posługując się odpowiednio zmodyfikowaną definicją *kwadratowej* równoważności Hilberta (w której występują kwadratowe symbole Hilberta). Znaleźli także odpowiednik warunku Harrisona dopasowany do kontekstu symboli Hilberta stopnia n. Zakładając, że rozpatrywane ciała K i L zawierają pierwiastki pierwotne stopnia n z jedynki, warunek ten sprowadza się do istnienia izomorfizmu grup

$$t : K^*/K^{*n} \to L^*/L^{*n}$$

który zachowuje grupy norm z odpowiadających sobie rozszerzeń cyklicznych:

$$t(N(K(\sqrt[n]{a}))) = N(L(\sqrt[n]{ta}))$$

dla wszystkich $a \in K^*/K^{*n}$. Jeśli ten warunek jest spełniony, to mówimy, że ciała K i L są równoważne w sensie Harrisona. W pracy [**17**] udowodniono, że jeśli n jest liczbą pierwszą, to ciała K i L są równoważne ze względu na symbole Hilberta stopnia n wtedy i tylko wtedy, gdy są równoważne w sensie Harrisona. Tak więc twierdzenie, które dla $n = 2$ zostało zauważone i udowodnione za pośrednictwem pojęcia pierścienia Witta, dla $n > 2$ jest także prawdziwe, chociaż pojęcie pierścienia Witta jest w tym przypadku nieobecne.

W pracy A. Czogały i A. Sładka [**18**] znaleziony został kompletny niezmiennik równoważności Hilberta stopnia ℓ, gdzie ℓ jest nieparzystą liczbą pierwszą. Okazuje się, że o równoważności Hilberta stopnia ℓ ciał K i L decydują jedynie lokalne stopnie $\ell-$adycznych uzupełnień ciał K i L.

Łagodną równoważność Hilberta stopnia ℓ studiował A. Czogała w pracy [**12**], natomiast w pracy [**15**] udowodnił on, że dla nieparzystych liczb pierwszych ℓ każde dwa globalne ciała funkcyjne są $\ell-$równoważne w sensie Hilberta. A. Sładek [**70**] odkrył związki pomiędzy równoważnością Hilberta wyższych stopni i $K-$teorią Milnora. Pełny wykład równoważności Hilberta wyższych stopni dla ciał globalnych i wiele nowych rezultatów zawiera rozprawa habilitacyjna A. Czogały [**16**].

Jak już wspomnieliśmy, dla form stopni $d > 2$ nie jest znany żaden odpowiednik konstrukcji pierścienia Witta form kwadratowych. W związku z tym dla form wyższych stopni nie istnieje odpowiednik obszernej i ważnej teorii pierścieni Witta. Tam gdzie własności pierścieni Witta form kwadratowych można sformułować w sposób równoważny przy pomocy innych pojęć (na przykład, nad ciałami globalnymi w języku symboli Hilberta), można spodziewać się istnienia uogólnienia na formy wyższych stopni. Ponadto, są oczywiście własności form kwadratowych, które niekoniecznie wyrażają się w języku pierścieni Witta i mają sens dla form wszystkich stopni. Obiektem o centralnym znaczeniu w teorii form wszystkich stopni jest grupa automorfizmów (izometrii) formy. Dla form kwadratowych grupy automorfizmów (nazywane też grupami ortogonalnymi) są przeważnie nieskończone, natomiast dla nieosobliwych form stopni $\geqslant 3$ grupy automorfizmów są zawsze skończone (twierdzenie C. Jordana z 1890 roku). W związku z tym jest rzeczą naturalną zbadać, które grupy skończone realizują się jako grupy automorfizmów form wyższych stopni. Badania w tym zakresie zainicjował A. Sładek.

W pracach [**4, 71, 111**] uzyskano różne twierdzenia realizacyjne, wśród nich dla grup Clifforda-Littlewooda-Eckmanna ([**71**], realizacja poprzez formy nad ciałem $\mathbb{Q}$) oraz dla grup skończonych z centralną inwolucją ([**4**], realizacja poprzez formy będące sumami potęg form liniowych nad ciałem uporządkowanym).

4.6. Hipoteza Milnora. Już w pracy Witta [**112**] zapoczątkowana została klasyfikacja form kwadratowych nad dowolnymi ciałami ze względu na równoważność form kwadratowych. Faktycznie wystarczy rozpatrywać niezmienniki podobieństwa form kwadratowych: wskaźnik wymiaru, wyróżnik i niezmiennik Hassego-Witta. Niezmienniki te można traktować jako homomorfizmy grup

$$e^n : I^n(F) \to H^n(F), \quad n = 0, 1, 2.$$

Tutaj $H^n(F)$ jest grupą kohomologii $H^n(G_F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, gdzie G_F jest grupą Galois rozdzielczego domknięcia ciała F, natomiast $I^n(F)$ jest potęgą ideału fundamentalnego $I(F)$ pierścienia Witta $W(F)$.

Dla $n = 0, 1, 2$ homomorfizmy e^n indukują homomorfizmy grup

$$e_n : I^n(F)/I^{n+1}(F) \to H^n(F).$$

Fakt, że e_0 i e_1 są izomorfizmami jest nietrudny do udowodnienia, natomiast pytanie o bijektywność e_2 było jednym z głównych problemów algebraicznej teorii form kwadratowych w latach siedemdziesiątych. Problem ten rozwiązał w 1981 roku 24-letni matematyk z Leningradu A. S. Merkurjev.

W roku 1970 ukazała się ważna praca Milnora [**52**], w której zauważone zostały związki pomiędzy pierścieniami Witta, $K-$teorią i wyższymi grupami kohomologii. Dla ciała F i dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 0$ oznaczmy $n-$tą $K-$grupę Milnora przez $K_n(F)$. Milnor rozpatrywał diagram

$$\begin{tikzcd} & K_n(F)/2K_n(F) \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[dr, "h_n"] & \\ I^n(F)/I^{n+1}(F) \arrow[rr, "e_n"] & & H^n(F) \end{tikzcd}$$

gdzie homomorfizmy s_n oraz h_n są naturalnie określone na generatorach natomiast e_n jest odwzorowaniem, które dla $n = 0, 1, 2$ można identyfikować odpowiednio ze wskaźnikiem wymiaru, wyróżnikiem i niezmiennikiem Hassego-Witta. Ideał $I^n(F)$ ma naturalny zbiór addytywnych generatorów wyznaczony przez tak zwane $n-$krotne formy Pfistera. Dla $n > 2$ wiadomo było, że istnieje tylko jeden sposób określenia odwzorowania e_n na odpowiednich addytywnych generatorach grupy $I^n(F)/I^{n+1}(F)$, ale otwartym zagadnieniem było, czy tak skonstruowane odwzorowanie e_n jest homomorfizmem grup.

Milnor postawił pytanie, czy homomorfizmy s_n i h_n są zawsze bijektywne (dla wszystkich n i dla wszystkich ciał F). Przypuszczalną pozytywną odpowiedź na te pytania nazwano hipotezami Milnora. Nie będziemy wchodzić w szczegóły definicji odwzorowań s_n, h_n, e_n (zobacz pracę Pfistera [**55**]), zauważymy tylko, że pytania Milnora są równoważne pytaniu o istnienie izomorfizmu grup e_n, dla którego diagram Milnora jest przemienny. To z kolei sprowadza się do pokazania, że dla dowolnego ciała F i dowolnej liczby naturalnej n odwzorowania $e^n : I^n(F) \to H^n(F)$ określone w sposób naturalny na addytywnych generatorach $I^n(F)$ mają dwie następujące własności:

(a) e^n jest dobrze określonym homomorfizmem grup $I^n(F) \to H^n(F)$,

(b) $\ker e^n = I^{n+1}(F)$.

Wokół prób dowodu (a) i (b) koncentrowała się znaczna aktywność naukowa w latach

siedemdziesiątych i osiemdziesiątych. Był to jeden z głównych nurtów badań w algebraicznej teorii form kwadratowych. Aktywnym uczestnikiem tych badań był Marek Szyjewski, który hipotezą Milnora zajmował się już w swojej pracy magisterskiej. W roku 1989, pracując pod kierunkiem A. A. Suslina w Leningradzie, rozwiązał on problem (a) dla $n = 4$ (zob. [**76**]).
Wielką sensacją naukową było kompletne rozwiązanie problemów (a) i (b) przez Voevodsky'ego w 1996 roku. Historia ataku na problemy (a) i (b) jest następująca:

(a) $n \leqslant 2$: Pfister [**54**] (1966), $n = 3$: Arason (1975), $n = 4$: Jacob-Rost [**25**] (1989), Szyjewski [**76**] (1989), dowolne n: Voevodsky (1996)

(b) $n \leqslant 1$: Pfister [**54**] (1966), $n = 2$: Merkurjew [**50**] (1981), $n = 3$: Merkurjew-Suslin (1986), Rost (1986), dowolne n: Voevodsky (1996).

Jak wiadomo, Vladimir Voevodsky otrzymał w roku 2002 Medal Fieldsa za prace, których kulminacją był dowód hipotezy Milnora.

Literatura

[1] B. Błaszczyk, The $u-$invariant of fields with 16 and 32 square classes. I. *Ann. Polon. Math.* **37** (1980), 1–12.

[2] R. M. Bryant, O. Macedońska, Automorphisms of relatively free nilpotent groups of infinite rank. *J. Algebra* **121** (1989), 388–398.

[3] A. B. Carson and M. A. Marshall, Decomposition of Witt rings. *Canad. J. Math.* **34** (1982), 1276–1302.

[4] A. Chlebowicz, A. Sładek, M. Wołowiec-Musiał, Automorphisms of certain forms of higher degree over ordered fields. *Linear Alg. Appl.* **331** (2001), 145–153.

[5] C. Cordes, Quadratic forms over fields with four quaternion algebras. *Acta Arith.* **41** (1982), 55–70.

[6] P. E. Conner, R. Perlis, K. Szymiczek, Wild sets and 2-ranks of class groups. *Acta Arith.* **79** (1997), 83–91.

[7] A. Czarnota, Warunki konieczne i wystarczające dla modułów kongruencji $\sum_{r=1}^{n-1} r^{n-1} \equiv -1 \pmod{n}$. *Prace Mat.* **2** (1956), 172–178.

[8] A. Czarnota, Zusammenhang zwischen der Summe der Primitivwurzeln einer Primzahl und der Möbiusschen $\mu-$Funktion. *Wiss. Z. Hochsch. Karl-Marx-Stadt* **5** (1963), 1–3.

[9] A. Czarnota, Kongruencje spełniane przez sumy potęg pierwiastków pierwotnych względem modułu pierwszego. *Prace Mat.* **8** (1964), 131–142.

[10] A. Czogała, Arithmetic characterization of algebraic number fields with small class numbers. *Mat. Zeit.* **176** (1981), 247–273.

[11] A. Czogała, On reciprocity equivalence of quadratic number fields. *Acta Arith.* **58** (1991), 27–46.

[12] A. Czogała, Higher degree tame Hilbert-symbol equivalence of number fields. *Abh. Math. Sem Hamburg* **69** (1999), 175–185.

[13] A. Czogała, Witt rings of global function fields. *Funct. Approx.* **27** (2000), 243–252.

[14] A. Czogała, Witt rings of Hasse domains of global fields. *J. Algebra* **244** (2001), 604–630.

[15] A. Czogała, Hilbert-symbol equivalence of global function fields. *Math. Slovaca* **51** (2001), 393–401.

[16] A. Czogała, Równoważność Hilberta ciał globalnych. *Uniw. Śląski w Katowicach Prace Naukowe* **1969** (2001), 1–94.

[17] A. Czogała, A. Sładek, Higher degree Hilbert-symbol equivalence of number fields. *Tatra Mount. Math. Publ.* **11** (1997), 77–88.

[18] A. Czogała, A. Sładek, Higher degree Hilbert-symbol equivalence of algebraic number fields. II. *J. Number Theory* **72** (1998), 363–376.

[19] A. Czogała, A. Sładek, Witt rings of global fields. *Commun. Algebra* **31** (2003), 3195–3205.

[20] P. W. Gawron, O. Macedońska, All automorphisms of the 3-nilpotent free group of countably infinite rank can be lifted. *J. Algebra* **118** (1988), 120–128.

[21] P. Gawron, V. Nekrashevych, W. Suszczański, Conjugation in tree automorphism groups. *Int. J. Algebra Comput.* **11** (2001), 529-547.

[22] P. W. Gawron, W. Tomaszewski, On arrangment of regular cyclic subgroups in symmetric group. *Publ. Math. Debrecen* **53** (1998), 49-57.

[23] K. Gupta, W. Hołubowski, On 2-symmetric words in groups. *Archiv der Math.* **73** (1999), 327-331.

[24] W. Hołubowski, Parabolic subgroups of Vershik-Kerov's group. *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), 2579-2582.

[25] W. B. Jacob and M. Rost, Degree four cohomological invariants for quadratic forms. *Invent. Math.* **96** (1989), 551–570.

[26] S. Jakubec, F. Marko, K. Szymiczek, Parity of class numbers and Witt equivalence of quartic fields. *Math. Comput.* **64** (1995), 1711–1715. Corrigendum, *ibid.* **66** (1997), 927.

[27] G. Krawczyk, Closed subgroups of a quadratic form scheme. *Ann. Math. Siles.* **3** (1990), 18–23.

[28] P. Koprowski, Sums of squares of pure quaternions. *Math. Proc. Royal Irish Acad.* **98A** (1998), 63–65.

[29] P. Koprowski, Witt equivalence of algebraic function fields over real closed fields. *Math. Zeit.* **242** (2002), 323–345.

[30] P. Koprowski, Local-global principle for Witt equivalence of function fields over global fields. *Colloq. Math.* **91** (2002), 293–302.

[31] K. Kozioł, Quadratic form schemes determined by hermitian forms. *Colloq. Math.* **53** (1987), 27–33.

[32] K. Kozioł, Quadratic forms over quadratic extensions of generalized local fields. *J. Algebra* **118** (1988), 1–13.

[33] N. V. Kroshko, W. Suszczański, Direct limits of symmetric and alternating groups with strictly diagonal embeddings. *Archiv der Math.* **71** (1998), 173-182.

[34] M. Kula, Fields with prescribed quadratic form schemes. *Math. Zeit.* **167** (1979), 201–212.

[35] M. Kula, Fields with non-trivial Kaplansky's radical and finite square class number. *Acta Arith.* **37** (1981), 411–418.

[36] M. Kula, Fields and quadratic form schemes. *Ann. Math. Siles.* **1** (1985), 7–22.

[37] M. Kula, Finitely Generated Witt Rings. *Uniw. Śląski w Katowicach Prace Naukowe* **1207** (1991), 1–52.

[38] M. Kula, Crystal growth and Witt rings. *J. Algebra* **136** (1991), 190–196.

[39] M. Kula, Counting Witt rings. *J. Algebra* **206** (1998), 568–587.

[40] M. Kula, M. Marshall, A. Sładek, Direct limits of finite spaces of orderings. *Pacific J. Math.* **112** (1984), 391–406.

[41] M. Kula, L. Szczepanik, and K. Szymiczek, Quadratic forms over formally real fields with eight square classes. *Manuscripta Math.* **29** (1979), 295–303.

[42] M. Kula, L. Szczepanik, and K. Szymiczek, Quadratic form schemes and quaternionic schemes. *Fund. Math.* **130** (1988), 181–190.

[43] T. Y. Lam, *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*. W. A. Benjamin, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973. Second printing with revisions, 1980.

[44] O. Macedońska-Nosalska, A note on associative polyverbal operations on groups. *Canad. J. Math.* **26** (1974), 1450–1454.

[45] O. Macedońska-Nosalska, On infinite Nielsen transformations. *Math. Scand.* **51** (1982), 63–86.

[46] O. Macedońska-Nosalska, The abelian case of Solitar's conjecture on infinite Nielsen transformations. *Canad. Math. Bull.* **28** (1985), 223–230.

[47] O. Macedońska-Nosalska, A. Storozhev, Varieties of t-groups. *Commun. Algebra* **25** (1997), 1589-1593.

[48] O. Macedońska, M. Żabka, On equivalence of semigroup identities. *Math. Scand.* **88** (2001), 161-181.

[49] M. A. Marshall, *Abstract Witt Rings*, volume 57 of *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*. Queen's University, Kingston, Ontario, 1980.

[50] A. S. Merkurjev, On the norm residue symbol of degree 2. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **261** (1981), 542–547. English Translation: Soviet Math. Dokl. **24** (1981), 546–551.

[51] J. Milnor, D. Husemoller, *Symmetric Bilinear Forms.* Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1973.

[52] J. Milnor, Algebraic $K-$theory and quadratic forms. *Invent. Math.* **9** (1970), 318–344.

[53] R. Perlis, K. Szymiczek, P. E. Conner and R. Litherland, Matching Witts with global fields. *Contemp. Math.* **155** (1994), 365–387.

[54] A. Pfister, Quadratische Formen in beliebigen Körpern. *Invent. Math.* **1** (1966), 116–132.

[55] A. Pfister, On the Milnor Conjectures: history, influence, applications. *Jber. d. Dt. Math.-Verein.* **102** (2000), 15–41.

[56] E. Płonka, On a non-abelian variety of groups which are symmetric algebras. *Math. Scand.* **74** (1994), 184–190.

[57] E. Płonka, Structure of weak automorphism group of mono-unary algebras. *Algebra Univers.* **42** (1999), 1–7.

[58] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian Forms.* Springer Verlag, BerlinHeidelberg-New York-Tokyo, 1985.

[59] D. B. Shapiro, M. Szyjewski, Product formulas for quadratic forms. *Bol. Soc. Mat. Mex.* II. ser. **37** (1992), 463–474.

[60] A. Sładek, Grothendieck groups of quadratic forms over formally real fields, *Uniw. Śląski w Katowicach, Prace Naukowe 59, Prace Mat.* **5** (1975), 41–47.

[61] A. Sładek, Abstract theory of quadratic forms. *Uniw. Śląski w Katowicach, Prace Naukowe 332, Prace Mat.* **10** (1980), 46–57.

[62] A. Sładek, Stability in abstract theory of quadratic forms. *Uniw. Śląski w Katowicach, Prace Naukowe 332, Prace Mat.* **10** (1980), 58–68.

[63] A. Sładek, Grothendieck and Witt groups in the reduced theory of quadratic forms. *Ann. Polonici Math.* **38** (1980), 13–25.

[64] A. Sładek, Witt rings of quaternion algebras. *J. Algebra* **103** (1986), 267–272.

[65] A. Sładek, Witt rings of complete skew fields. II. *Wiss. Beitr. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Halle (Saale)* **33** (1986), 239–243.

[66] A. Sładek, Witt rings of complete skew fields. *Pacific J. Math* **132** (1988), 391–399.

[67] A. Sładek, Witt rings of skew fields. *Uniw. Śląski w Katowicach Prace Naukowe* **1079** (1989), 1–50.

[68] A. Sładek, Witt rings of division algebras over global fields. *Commun. Algebra* **18** (1990), 2159–2175.

[69] A. Sładek, Witt rings of even degree division algebras over number fields. *Commun. Algebra* **22** (1994), 3531–3543.

[70] A. Sładek, Higher degree Harrison equivalece and Milnor $K-$functor. *Acta Math. Inform. Univ. Ostrav.* **6** (1998), 183–189.

[71] A. Sładek, A. Wesołowski, Clifford-Littlewood-Eckmann groups as orthogonal groups of higher degree. *Ann. Math. Siles.* **12** (1998), 93–103.

[72] B. Szczepanik, The number of quaternion algebras over a field. *Uniw. Śląski w Katowicach, Prace Naukowe 87, Prace Mat.* **6** (1975), 29–39.

[73] L. Szczepanik, Quadratic forms over Springer fields. *Colloq. Math.* **40** (1978), 31–37.

[74] L. Szczepanik, Fields and quadratic form schemes with the index of radical not exceeding 16. *Ann. Math. Siles.* **1**(13) (1985), 23–46.

[75] L. Szczepanik, Quadratic form schemes with non-trivial radical. *Colloq. Math.* **49** (1985), 143–160.

[76] M. Szyjewski, The fifth invariant of quadratic forms. (Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **308** (1989), 542–545. Translation in: *Soviet Math. Doklady* **40** (1990), 355 - 358.

[77] M. Szyjewski, An invariant of quadratic forms over schemes. *Documenta Math.* **1** (1996), 449–478.

[78] M. Szyjewski, On the Witt ring of a relative projective line. *Colloq. Math.* **75** (1998), 53–78.

[79] K. Szymiczek, L'équation $uv = w^2$ en nombres triangulaires. *Publ. Inst. Math.* (Beograd) **7** (1963), 139–141.

[80] K. Szymiczek, On the equations $a^x \pm b^x = c^y$. *Amer. J. Math.* **87** (1965), 262–266.

[81] K. Szymiczek, On prime numbers $p,\ q$ and r such that pq, pr and qr are pseudoprimes. *Colloq. Math.* **13** (1965), 259–263.

[82] K. Szymiczek, On pseudoprimes which are products of distinct primes. *Amer. Math. Monthly* **74** (1967), 35–37.

[83] K. Szymiczek, On the distribution of prime factors of Mersenne numbers. *Comment. Math. Prace Mat.* **13** (1969), 33–49.

[84] K. Szymiczek, Grothendieck groups of quadratic forms and G-equivalence of fields. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **73** (1973), 29–36. Corrigendum, *ibid.* **74** (1973), 199.

[85] K. Szymiczek, Quadratic forms over fields with finite square class number. *Acta Arith.* **28** (1975), 195–221.

[86] K. Szymiczek, Quadratic forms over fields. *Dissertationes Math.* (Rozprawy Mat.) **152** (1977), 1–63

[87] K. Szymiczek, Generalized Hilbert fields, *J. Reine Angew. Math.* **329** (1981), 58–65.

[88] K. Szymiczek, J. Yucas, Quadratic forms, rigid elements and nonreal preorders. *Proc. Amer. Math. Soc.* **88** (1983), 201–204.

[89] K. Szymiczek, Structure of the basic part of a field. *J. Algebra* **99** (1986), 422–429.

[90] K. Szymiczek, Generalized rigid elements in fields. *Pacific J. Math.* **128** (1987), 171–186.

[91] K. Szymiczek, Matching Witts locally and globally. *Math. Slovaca* **41** (1991), 315–330.

[92] K. Szymiczek, Witt equivalence of global fields. *Commun. Algebra* **19** (1991), 1125–1149.

[93] K. Szymiczek, Witt equivalence of global fields. II. Relative quadratic extensions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **343** (1994), 277–303.

[94] K. Szymiczek, Hilbert-symbol equivalence of number fields. *Tatra Mount. Math. Publ.* **11** (1997), 7–16.

[95] K. Szymiczek, *Bilinear Algebra. An introduction to the algebraic theory of quadratic forms.* Algebra, Logic and Applications vol. 7, Gordon and Breach Science Publishers 1997.

[96] K. Szymiczek, $p-$ranks of class groups of Witt equivalent number fields. *J. Number Theory* **78** (1999), 99–106.

[97] K. Szymiczek, Conner's Level Condition. *Proc. Graz 1998 Number Theory Conf.*, Eds. F. Halter-Koch, R. F. Tichy, Walter de Gruyter, Berlin-New York 2000, 445–452.

[98] K. Szymiczek, Tame equivalence and wild sets. *Semigroup Forum* **60** (2000), 260–270.

[99] K. Szymiczek, Ten problems on quadratic forms. *Acta Math. Inform. Univ Ostrav.* **10** (2002), 125–135.

[100] A. Wakulicz, Sur les sommes de quatre nombres ordinaux. *Spraw. Tow. Nauk. Warsz. Wydz. III Nauk Mat.-Fiz.* **42** (1949), 23–27.

[101] A. Wakulicz, Sur la somme d'un nombre fini de nombres ordinaux. *Fund. Math.* **36** (1949), 254–266.

[102] A. Wakulicz, Sur les polynomes en x ne prenant que des valeurs entières pour x entières. *Bull. Acad. Pol. Sci.* III, **2** (1953), 109–112.

[103] A. Wakulicz, Sur la question 3569. *Mathesis* **63** (1954), 133.

[104] A. Wakulicz, On the equation $x^3 + y^3 = 2z^3$. *Colloq. Math.* **5** (1957), 11–15.

[105] A. Wakulicz, Sur une arithmetisation du crible d'Erathostenes. *Colloq. Math.* **5** (1957), 241–242.

[106] A. Wakulicz, O pewnym zagadnieniu z arytmetyki. *Zeszyty Nauk. WSP w Katowicach* **1** (1958), 3–5.

[107] A. Wakulicz, O równaniach $a^3 \pm b^6 = c^2$ i o bokach sześciennych trójkątów pitagorejskich. *Zeszyty Nauk. WSP w Katowicach* **1** (1958), 17–23.

[108] A. Wakulicz, O pewnych związkach w elementarnej teorii liczb. *Zeszyty Nauk. WSP w Katowicach* **4** (1964), 11–15.

[109] A. Wakulicz, O ciągu reszt $na \pmod b$ przy $(a, b) = 1$. *Zeszyty Nauk. WSP w Katowicach* **5** (1966), 35–37.

[110] A. Wakulicz, O cyfrach $\sqrt{n}$. *Zeszyty Nauk. WSP w Katowicach* **6** (1968), 45–47.

[111] A. Wesołowski, Automorphism and similarity groups of forms determined by the characteristc polynomial. *Commun. Algebra* **27**(7) (1999), 3109–3116.

[112] E. Witt, Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. *J. Reine Angew. Math.* **176** (1937), 31–44.

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski, Katowice
E-mail address: szymiczek@ux2.math.us.edu.pl