

# Równania i nierówności funkcyjne

ROMAN GER

**Streszczenie.** Matematyka polska zawdzięcza powstanie i spektakularny rozwój śląskiej szkoły równań funkcyjnych panu profesorowi Markowi Kuczynie - wybitnemu uczonemu i wielkiej indywidualności. Profesor Kuczma przyczynił się też w znacznej mierze do ukształtowania środowiska matematycznego w Uniwersytecie Śląskim, a przed jego erygowaniem w 1968 roku, w ówczesnej Filii Uniwersytetu Jagiellońskiego w Katowicach. Nie sposób w jubileuszowym opracowaniu głębiej wniknąć w matematyczne dokonania ludzi, którzy tę szkołę tworzyli i tworzą, i którzy opublikowali kilkaset prac oraz kilka pozycji książkowych z tej dziedziny. W przeświadczeniu autora, jedynym racjonalnym podejściem będzie próba "hasłowej" (by nie rzec wręcz *key words and phrases*) syntezy tego dorobku, adresowanej głównie do niespecjalistów. Nie ma więc w tym artykule precyzyjnych sformułowań wyników, wzory pojawiają się tylko śladowo i, z oczywistych powodów, unika się jakiegokolwiek waloryzacji. Z drugiej strony szereg dat, faktów i zdarzeń szybko zaciera się w ludzkiej pamięci i dlatego ich utrwalenie wydaje się przedsięwzięciem pożytecznym. Przyjąłem przeto propozycję Zarządu Oddziału Górnośląskiego PTM, by podjąć się tego zadania, będąc od początku świadomym niedoskonałości i subiektywizmu, jakim opracowanie takie będzie zapewne obciążone.

Niech mi wolno będzie wyrazić w tym miejscu moje serdeczne podziękowanie panu profesorowi Baronowi za wszelkie uwagi, dyskusje (w tym - dotyczące koncepcji artykułu), korekty i przekazane informacje.

Przedstawione treści zostały podzielone na siedem części:

1. Rys historyczny
2. Z biografii profesora Marka Kuczmy
3. Kierunki badań
4. Genealogia
5. Seminaria
6. Kontakty naukowe i osiągnięcia organizacyjne
7. Bibliografia

Genealogia jest tu rozumiana w sensie zbliżonym do idei znanego programu "The Mathematics Genealogy Project" z North Dakota State University (zob. <http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/>), ale z nieco odmiennym rozłożeniem akcentów. Bibliografia jest śladowa, obejmując jedynie pozycje bezpośrednio cytowane w tekście; w najmniejszym stopniu nie odzwierciedla dorobku szkoły, o której artykuł traktuje.

**1. Rys historyczny.** Załączki teorii równań funkcyjnych na Śląsku wiążą się z pojawieniem się tutaj dwu osób: Marka Kuczmy (1935-1991) i Mieczysława Kucharzewskiego (1920-1993). Byli oni uczniami profesora Stanisława Gołąba (1902-1980), wybitnego

polskiego geometry, związanego ze środowiskiem krakowskim (Uniwersytet Jagielloński i Akademia Górniczo-Hutnicza), który sam współcześnie postrzegany jest jako naukowy “dziadek” tej teorii w Polsce. W znanej monografii *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte* [1], napisanej wspólnie z Jánosem Aczélem, światowym liderem teorii równań funkcyjnych, uwidocznione są jej głębokie związki z teorią obiektów geometrycznych, której prof. Gołąb był współtwórcą. Mieczysław Kucharzewski rozpoczął pracę w Katowicach w październiku 1956 r. na stanowisku adiunkta w Studium Wieczorowym Politechniki Śląskiej w Katowicach (przeniesiony tutaj służbowo z Instytutu Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego). W latach 1958-1966 prowadził także wykłady i seminaria dla studentów Sekcji Matematyki Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Katowicach. Marek Kuczma, podówczas pracownik naukowy Katedry Geometrii Uniwersytetu Jagiellońskiego, prowadził także podobne zajęcia dydaktyczne na Sekcji Matematyki katowickiej WSP w latach 1961-1967. Oba matematycy mieli więc tego samego mistrza, wspólny krakowsko-geometryczny rodowód naukowy i wspólne miejsce pracy. Na niwie naukowej ta jedność czasu i miejsca zaowocowała m.in. pracami [12] oraz [13], a w szczególności rozprawą *Basic concepts of the theory of geometric objects* [13] dotyczącą wyznaczania i klasyfikacji obiektów geometrycznych i ich komitant. Nieco później, w podobnym duchu, ale zapewne z myślą o szerszym kręgu odbiorców, Mieczysław Kucharzewski napisał monografię *Elementy teorii obiektów geometrycznych* [9].

Habilitacja Marka Kuczmy na Wydziale Matematyczno-Fizyczno-Chemicznym Uniwersytetu Jagiellońskiego z zakresu analizy matematycznej (za rozprawę pt. *O równaniu Schrödera* M. Kuczma uzyskał stopień naukowy docenta w październiku 1963 r.) zbiegła się w czasie z utworzeniem w Katowicach Studium Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego. Egzaminacje wstępne na to Studium (niesłusznie w rozmaitych źródłach nazywane Filią UJ w Katowicach, która formalnie utworzona została dopiero na początku roku akademickiego 1966/67) odbyły się w lipcu 1963 r. Komisji Egzaminacyjnej przewodniczył profesor Stanisław Gołąb, a jej członkami byli m.in. dr Mieczysław Kucharzewski i pani mgr Halina Światak, która także poświęciła się równaniom funkcyjnym, nie zwiąawszy się wszak ze Śląskiem (kilka lat później wyemigrowała z Polski na parę dziesięcioleci). To swoiste zwiastowanie narodzin teorii równań funkcyjnych na Górnym Śląsku. Ze Studium pan doc. dr hab. Marek Kuczma związany był od pierwszych chwil jego istnienia. Natychmiast po otrzymaniu etatu docenta (w 1964 r.) został on wybrany prodziekanem Wydziału Mat.-Fiz.-Chem UJ d/s Oddziału w Katowicach, którą to funkcję pełnił do czerwca 1968 r. Z dniem 1 grudnia 1966 r. objął kierownictwo Katedry Równań Funkcyjnych w katowickiej Filii Uniwersytetu Jagiellońskiego. Za faktyczną datę już nie zwiastowania, ale samych narodzin teorii racjonalnym wydaje się przyjąć moment uruchomienia przez docenta Kuczme seminarium naukowego z początkiem roku akademickiego 1964/65. Historia tego Seminarium, istniejącego do dziś, jest niemal tożsama z historią wspaniałego rozwoju tytułowej dyscypliny. Jak pisze pan prof. Kucharzewski w swoim, niestety nieopublikowanym, artykule *O matematyce w ośrodku górnośląskim* [11]: “*Seminarium to szybko stało się ogólnopolskim, a jego tematyka była podstawą prac doktorskich i habilitacyjnych.*” To prawda, ale nie cała. Więcej i szczegółowo o tej fascynującej historii traktuje

## One Thousand Seminars on Functional Equations

wydana nakładem Wydawnictwa Uniwersytetu Śląskiego w kwietniu 2002 r. i wręczona na ponad stu uczestnikom uroczystego tysięcznego posiedzenia Seminarium, które miało miejsce 8 kwietnia 2002 r. (początek, jak zawsze przez blisko 40 lat, we wtorek o godz. 16:15). Posiedzenie to z udziałem kompletu władz rektorskich oraz znakomitych gości, w tym wielu zagranicznych, było bez wątpienia wydarzeniem naukowym dla całej społeczności Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, a także dla śląskiego środowiska matematycznego.

Skoro już o Uniwersytecie Śląskim mowa, to przypomnijmy, że został on erygowany Rozporządzeniem Rady Ministrów z 8 czerwca 1968 r. § 1. tego rozporządzenia głosi: *Tworzy się Uniwersytet Śląski w Katowicach przez połączenie Wyższej Szkoły Pedagogicznej z Filią Uniwersytetu Jagiellońskiego w Katowicach*. Badania z zakresu równań funkcyjnych na obu uczelniach i prace Seminarium tę spójnie niejako wyprzedzały. Prócz liderów w osobach Marka Kuczmy i Mieczysława Kucharzewskiego z matematyków pełnoetatowo zatrudnionych na katowickiej WSP zajmujących się równaniami funkcyjnymi wymienić tu należy panią mgr Małgorzatę Rozmus-Chmurową i mgra Stefana Czerwika (oboje doktoryzowali się na początku lat siedemdziesiątych mając profesora Marka Kuczmy za promotora). Młodych adeptów teorii równań funkcyjnych więcej wszakże było pośród kadry matematycznej katowickiej Filii UJ: od roku 1963 byli to w szczególności: mgr Joanna Burek, mgr Eugeniusz Głowacki (1940-1995), od roku 1964 - pani mgr Wilhelmina Smajdor (formalnie w Katedrze Funkcji Analitycznych Filii UJ, a później w Pracowni Instytutu Matematycznego PAN w Katowicach oraz w Centrum Badań Naukowych PAN w województwie katowickim), od roku 1965 - pan mgr Andrzej Smajdor (w roku akademickim 1964/65 pracował w Katedrze Matematyki C na Politechnice Śląskiej w Gliwicach), a od roku 1966 - pan mgr Janusz Matkowski. Zagadnieniami o geometrycznej genezie prowadzącymi do równań funkcyjnych zajmowali się (zajmują) panowie Edward Siwek i Andrzej Zajtz, podówczas wykładowcy na katowickiej Filii UJ; pierwszy z nich praktycznie całą swoją działalność naukową i dydaktyczną związał najpierw z Filią a potem Uniwersytetem Śląskim, drugi ze środowiskiem śląskim nie związał się na trwale (obecnie profesor Akademii Pedagogicznej w Krakowie).

Rok 1968 był znaczący nie tylko w kontekście historycznym, nie tylko z powodu utworzenia Uniwersytetu, ale także, dla omawianej dyscypliny, przede wszystkim dlatego, że ukazała się drukiem fundamentalna monografia *Functional equations in a single variable* [14] autorstwa Marka Kuczmy. Stworzyła ona podwaliny systematycznej teorii równań funkcyjnych o jednej zmiennej i odegrała w świecie dla tej dziedziny rolę analogiczną do kreacyjnych i systematyzujących aspektów szeroko już wówczas znanej monografii Jánoša Aczéla *Lectures on functional equations and their applications* (Academic Press,

New York-London, 1966) i jej skromniejszej objętościowo wcześniejszej wersji niemieckojęzycznej *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1961). Sam Marek Kuczma rolę swego dzieła postrzegał tak: *Głównym moim osiągnięciem naukowym jest stworzenie i rozwinięcie (częściowo wspólnie z moimi uczniami) systematycznej teorii równań funkcyjnych o jednej zmiennej. Teoria ta została przedstawiona w mojej monografii ... Jest to jedyna w świecie monografia poświęcona temu przedmiotowi i jest stale cytowana przez wszystkich autorów piszących na ten temat. I dalej: Omówienie mojej monografii, napisane przez prof. M. A. McKiernana z University of Waterloo (Kanada), ukazało się w Mathematical Reviews, tom 37, Nr 4 (1969), #4441, oraz w Zentralblatt für Mathematik, tom 196 (1970), str. 164. Recenzja tej monografii, pióra prof. M. Kucharzewskiego z Instytutu Matematycznego P.A.N., ukazała się we Wiadomościach Matematycznych, tom 11 (1970), str. 321-322. Zaś w Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung, tom 72, zeszyt 2/3 (1970), ukazała się recenzja pióra T. Howroyda, profesora University of New Brunswick (Kanada) (fragmenty życiorysu naukowego datowanego na 26 kwietnia 1976 r.)*

W roku 1968 wreszcie, opuścił mury Filii UJ jedyny rocznik studentów, który całe swoje kształcenie odbywał w tej placówce, wysłuchując m.in. wykładów monograficznych z zakresu teorii równań funkcyjnych. Sześcioro spośród magistrów matematyki tego rocznika otrzymało asystentury w nowoutworzonym Uniwersytecie Śląskim, a troje z nich: Joanna Wójcik (od 1969 - Joanna Ger), Zygfryd Kominek i autor tego opracowania rozpoczęło pracę naukową pod kierunkiem docenta Marka Kuczmy (pani mgr Joanna Wójcik-Ger przez dwa pierwsze lata formalnie była pracownikiem etatowym uniwersyteckiego Ośrodka Obliczeniowego). Rozwój badań z zakresu równań funkcyjnych na Uniwersytecie Śląskim był imponujący. W pewnej mierze zobrazować go może historia uzyskiwanych stopni i awansów naukowych. Sam kierownik Katedry (a od 1969 r. - Zakładu) Równań Funkcyjnych - Marek Kuczma uzyskał tytuł profesora nadzwyczajnego nauk matematycznych w czerwcu 1969 r., a w niespełna cztery lata później - tytuł profesora zwyczajnego. Uczniowie profesora Kuczmy zaczęli się wkrótce doktoryzować. Pani Wilhelmina Smajdor uzyskała stopień naukowy doktora jeszcze w roku 1968 (o roku ów!) w Instytucie Matematycznym PAN, a pan Andrzej Smajdor w rok później na Uniwersytecie Jagiellońskim. Tamże, w roku 1970 doktoryzował się pan Janusz Matkowski. Pierwszy doktorat z równań funkcyjnych na Uniwersytecie Śląskim miał miejsce w kwietniu 1971 r. (Roman Ger). W tym samym roku, ale na Uniwersytecie Jagiellońskim doktorat uzyskał pan Stefan Czerwik, a w rok później - także na UJ - stopień ten nadano pani Małgorzacie Rozmus-Chmurowej. Wszystkie dalsze doktoraty pracowników Zakładu promowane przez prof. Kuczmy były już uzyskiwane na Uniwersytecie Śląskim. I tak: w 1974 r. doktorami nauk matematycznych zostali panowie Karol Baron i Marek Cezary Zdun oraz Zygfryd Kominek (promotorem tego ostatniego był doc. dr hab. Bogdan Choczewski, na stałe związany do dziś z ośrodkiem krakowskim; przez pewien czas pracował jednak na Politechnice Śląskiej w Gliwicach), a w 1975 - pani Joanna Ger i pan Józef Drewniak który magisterium uzyskał już na UŚl., ale w latach 1969-1976 pracował w Zakładzie Systemów Automatyki Kompleksowej PAN w Gliwicach z pracownią zlokalizowaną na UŚl. w Katowicach. ZSAK był wtedy dla pro-

profesora Kuczmy drugim miejscem pracy; pełnił tam przez szereg lat funkcję kierownika Pracowni Teorii Iteracji, teorii tak ściśle związanej z równaniami funkcyjnymi o jednej zmiennej, że dziś powszechnie nazywane one są równaniami iteracyjnymi. Teorii iteracji dotyczyła też rozprawa doktorska pana Drewniaka. W 1976 r. już jako nauczyciel akademicki rozpoczął on pracę na Uniwersytecie Śląskim w Zakładzie Analizy Numerycznej kierowanym przez pana docenta Jana Błaza, a do Zakładu Równań Funkcyjnych przeszedł w roku 1987. Ostatnim doktorem wypromowanym przez profesora Kuczmę jest pan Maciej Sablik, który stopień ten uzyskał na UŚl. w roku 1980. Kilka lat wcześniej jednak pierwsi uczniowie zaczęli się “usamodzielniać”, tj. uzyskiwać stopień naukowy doktora habilitowanego. Pierwszym był pan dr Janusz Matkowski, któremu stopień ten nadała Rada Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego w roku 1975, na podstawie pracy na temat *Integrable solutions of functional equations* opublikowaną w *Dissertationes Mathematicae* **127** (1975). Pierwsza habilitacja z matematyki na Uniwersytecie Śląskim (Roman Ger) miała miejsce w roku 1976 i dotyczyła tzw. warunkowych równań funkcyjnych. Wymagane obowiązującymi wówczas przepisami “obszerne streszczenie w języku polskim” ukazało się jako nota *O pewnych równaniach funkcyjnych z obciążoną dziedziną* (Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego, Nr **132**, Katowice, 1976). A oto chronologia dalszych habilitacji z zakresu równań funkcyjnych w ośrodku katowickim (pomijamy tu przewody, które dotyczyły osób spoza regionu Górnego Śląska):

- rok 1980
  - Karol Baron, *Functional equations of infinite order*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego, Nr **265**, Katowice, 1978;
  - Marek Cezary Zdun, *Continuous and differentiable iteration groups*, ibidem, Nr **308**, Katowice, 1979;
- rok 1983
  - Stefan Czerwik, *Fixed point theorems and special solutions of functional equations*, ibidem, Nr **428**, Katowice, 1980;
- rok 1987
  - Andrzej Smajdor, *Iterations of multi-valued functions*, ibidem, Nr **759**, Katowice, 1985;
  - Wilhelmina Smajdor, *Subadditive and subquadratic set-valued functions*, ibidem, Nr **889**, Katowice, 1987;
- rok 1990
  - Józef Drewniak, *Fuzzy relation calculus*, ibidem, Nr **1063**, Katowice, 1989;
- rok 1993

– Witold Jarczyk, *A recurrent method of solving iterative functional equations*, ibidem, Nr **1206**, Katowice, 1993;

• rok 1997

– Maciej Sablik, *Basic sets for functional equations*, ibidem, Nr **1578**, Katowice, 1996;

Pozostały jeszcze trzy rozprawy:

• Zygryda Kominka, *Convex functions in linear spaces*, ibidem, Nr **1087**, Katowice, 1989;

• Kazimierza Nikodema, *K-convex and K-concave set-valued functions*, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Nr **559**, Łódź, 1989;  
oraz

• Zbigniewa Gajdy, *Invariant means and representations of semigroups in the theory of functional equations*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego, Nr **1273**, Katowice, 1992.

Pierwszy z autorów habilitował się w lutym 1991 roku na Politechnice Warszawskiej, a drugi - miesiąc wcześniej w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk w Warszawie. Niespodziewana śmierć trzeciego autora, pana dra Zbigniewa Gajdy (1958-1992), nie pozwoliła na obronę tej świetnej rozprawy, która miała być przedstawiona jako habilitacyjna. Dodajmy, że dwaj ostatni z wymienionej trójki matematyków są uczniami profesora Romana Gera, a więc niejako “wnukami” naukowymi profesora Kuczmy. O profesorach i tak pojętej genealogii powiemy nieco więcej w §4.

Jest rzeczą tyleż naturalną, co oczywistą, że tak postępujący przyrost kadry, składaną wspaniale świadczący o rozkwicie dziedziny, nie może dokonywać się wyłącznie w murach jednej uczelni. Dlatego, po usamodzielnieniu się, prędzej czy później część matematyków odchodzi do innych placówek, by tam tworzyć nowe zespoły. I tak, w roku 1983 (prawie natychmiast po habilitacji) z Zakładu odchodzi pan docent Stefan Czerwik, by po czteroletnim pobycie w Uniwersytecie Yola w Nigerii, zatrudnić się na trzy lata w Instytucie Matematyki Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie, a od 1991 objąć kierownictwo Zakładu Równań Różniczkowych i Funkcyjnych w Instytucie Matematyki Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Przez ponad 10 lat prowadził tam także Seminarium z Równań Funkcyjnych.

Pan docent Janusz Matkowski (profesor tytularny od 1983 roku) przenosi się w 1976 roku na Filię Politechniki Łódzkiej w Bielsku-Białej (obecnie jest to samodzielna uczelnia: Akademia Techniczno-Humanistyczna) i tam obejmuje Zakład Matematyki, a od 1984 r. - Katedrę Matematyki w strukturze Wydziału Budowy Maszyn, będąc jej kierownikiem

aż do 1997 roku. Profesor Matkowski zdołał utworzyć w Bielsku-Białej prężny ośrodek równań funkcyjnych z doskonale pracującym Seminarium (założonym przez niego już w 1976 r.), które w marcu 2002 roku celebrowało swoje 600-tne posiedzenie.

Pan profesor Matkowski przeniósł się w 1997 roku do ówczesnej Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Zielonej Górze i, naturalną kolejną rzeczą, również tam rozpoczął kształcenie młodej kadry w dziedzinie równań funkcyjnych uruchamiając, w szczególności, Seminarium z Równań i Nierówności Funkcyjnych i Teorii Iteracji. W roku 2001, z połączenia Politechniki Zielonogórskiej i WSP im. T. Kotarbińskiego powstał Uniwersytet Zielonogórski. Od tej chwili Seminarium afiliowane jest przez Instytut Matematyki na Wydziale Nauk Ścisłych tego uniwersytetu. Dodajmy, że w roku 1991 powraca do Katowic, by od tego czasu do chwili obecnej pracować równoległe na Uniwersytecie Śląskim.

Od 1997 r. kierownictwo bielskiej Katedry Matematyki i Seminarium sprawuje pan dr hab. Kazimierz Nikodem (od 2001 roku - profesor tytularny), który w trzy lata po doktoracie odszedł z Uniwersytetu Śląskiego do Bielska-Białej, gdzie pracuje do dziś.

Podobnie postąpił pan dr hab. Marek Cezary Zdun (profesor tytularny od roku 1997); wkrótce po habilitacji, w roku 1981 przeszedł do pracy w ośrodku bielskim, by po 4 latach przenieść się w roku 1985 do krakowskiej Wyższej Szkoły Pedagogicznej (od 1999 roku - Akademia Pedagogiczna im. Komisji Edukacji Narodowej), gdzie pracuje do dziś, prowadząc tam od 1990 roku Seminarium z Teorii Iteracji.

W roku 1988 z Zakładu Równań Funkcyjnych w Uniwersytecie Śląskim odchodzi pan dr hab. Andrzej Smajdor (od 2001 roku - profesor tytularny) przechodząc do pracy w krakowskiej WSP. Podobnie, 12 lat później (w roku 2000) postąpiła pani dr hab. Wilhelmina Smajdor. Oboje prowadzą wspólnie Seminarium z Teorii Funkcji Wielowartościowych w Instytucie Matematyki Akademii Pedagogicznej w Krakowie (w latach 1991-2000 posiedzenia odbywały się w Katowicach na UŚl.); nazwa seminarium nie zmienia faktu, że prace dotyczą stosownych aspektów teorii równań funkcyjnych i teorii iteracji.

W niespełna rok po habilitacji, w roku 1994, do Zielonej Góry przenosi się pan Witold Jarczyk ściśle współpracując tam z profesorem Matkowskim, ale podobnie jak on, nie zrywa kontaktu z ośrodkiem katowickim; Uniwersytet Śląski jest dla niego drugim miejscem pracy od 1994 roku do chwili obecnej.

Jest rzeczą godną podkreślenia, że ten opis "migracji", z konieczności (limitowana objętość artykułu) ograniczony jedynie do osób ze statusem tzw. samodzielnego pracownika nauki, świadczy niejako przy okazji, że matematycy ci nie tylko nie zerwali związków naukowych z macierzystym ośrodkiem katowickim, w szczególności z jego seminariami, ale albo nadal w nim równoległe pracują albo, z nielicznymi wyjątkami, w Uniwersytecie Śląskim uzyskują stopnie i tytuły naukowe. W ten sposób nadal współtworzą fenomen jakim była i jest katowicka "szkoła" równań funkcyjnych.

**2. Z biografii profesora Marka Kuczmy.** O roli profesora jako twórcy usystematyzowanej dyscypliny i kreatora śląskiego ośrodka równań funkcyjnych była już mowa. Szerszą biografię zawiera artykuł R. Gera [4]. Syntetyczny przegląd jego bogatej twórczości znaleźć można w artykułach K. Barona [2], B. Choczewskiego [3] i R. Gera [5]. Ograniczmy się przeto w tym miejscu do przytoczenia podstawowych faktów biograficznych. Marek Kuczma urodził się 10 października 1935 roku w Katowicach. Tutaj ukończył szkołę średnią składając egzamin dojrzałości 9 czerwca 1952 r. w katowickim Liceum Ogólnokształcącym im. Mikołaja Kopernika. W latach 1952-1956 studiował matematykę na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie, uzyskując 25 czerwca 1956 roku dyplom magistra matematyki. 19 stycznia 1961 r. Rada Wydziału Mat.-Fiz.-Chem. UJ nadała mu stopień doktora nauk matematyczno-fizycznych za rozprawę pt. *O pewnym równaniu funkcyjnym pierwszego rzędu*; promotorem był profesor Stanisław Gołąb. O habilitacji i tytułach profesorskich już mówiliśmy.

Jeszcze jako student IV roku M. Kuczma rozpoczął w styczniu 1956 r. pracę w Katedrze Matematyki Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie na stanowisku zastępcy asystenta i kolejno na stanowiskach asystenta, starszego asystenta i adiunkta, aż do lutego 1962 r., po czym przeszedł do Katedry Geometrii Uniwersytetu Jagiellońskiego, gdzie pracował na stanowisku adiunkta, a następnie docenta. Z dniem 1 grudnia 1966 r. został przeniesiony do Katedry Równań Funkcyjnych w katowickiej Filii UJ. Od utworzenia Uniwersytetu Śląskiego w roku 1968 aż do końca roku akademickiego 1968/69 pełnił funkcję kierownika sekcji matematyki i, równocześnie, kierownika Katedry Równań Funkcyjnych. W związku z wprowadzeniem nowej struktury na Uniwersytecie Śląskim, od 1 lipca 1969 r. objął funkcję dyrektora Instytutu Matematyki UŚl. (pełnił ją do końca września 1973 r.) oraz funkcję kierownika Zakładu Równań Funkcyjnych (do końca sierpnia 1987 r.)

Dorobek naukowy profesora Marka Kuczmy jest imponujący; składa się nań 180 publikacji i trzy monografie matematyczne:

- *Functional Equations in a Single Variable* [14]
- *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities* [15]
- *Iterative Functional Equations* [16].

O pierwszej z nich powiedzieliśmy już wiele. Druga monografia również cieszy się uznaniem w środowiku międzynarodowym i jest bardzo wysoko oceniana przez specjalistów. Dowiodła ona, w szczególności, że także w dziedzinie równań i nierówności funkcyjnych o wielu zmiennych prof. Kuczma jest specjalistą najwyższego formatu; wraz z licznymi pracami oryginalnymi w tej dziedzinie pozwoliło to włączyć się młodym matematykom w światowy nurt badań w tej dyscyplinie. Ostatnia z wymienionych monografii, napisana wspólnie z B. Choczewskim i R. Gerem, zawiera zarys współczesnej teorii iteracyjnych równań funkcyjnych zawierając najnowsze wyniki do chwili jej wydania, tj. do początku lat 90. ubiegłego wieku.



Źródłem sporem satysfakcji zarówno dla profesora Kuczmy jak i jego uczniów był też fakt, że jego prace poświęcone teorii rozwiązań monotonicznych i wypukłych pewnych równań funkcyjnych o jednej zmiennej znalazły szeroki oddźwięk i ważne zastosowania w probabilistyce, w tzw. teorii procesów kaskadowych (gałązkowych) (por. np. E. Seneta, *Functional equations and the Galton-Watson process*, Advances in Applied Probability 1 (1969), 1-42 oraz K.B. Athreya and P.E. Ney, *Branching processes*, Springer Verlag, 1972). Dramatycznym zrzędzeniem losu, Marek Kuczma, który nigdy nie cieszył się dobrym zdrowiem, w 1978 roku doznał wylewu do mózgu, co spowodowało konieczność długotrwałego leczenia i rehabilitacji. Zakończone sukcesem, pozwoliły mu powrócić do dydaktyki i pracy naukowej. Niestety, nie na długo. Ponowny wylew przykuł już profesora na stałe do inwalidzkiego wózka i spowodował, że już jedynie okazjonalnie i coraz rzadziej opuszczał wnętrze swego bardzo skromnego mieszkania przy ul. Mikołowskiej w Katowicach. To, że był w stanie bardzo owocnie pracować naukowo jeszcze przez całą dekadę lat osiemdziesiątych (zwróćmy uwagę, że dwie ostatnie z cytowanych monografii wydane zostały, odpowiednio, w latach 1985 i 1990 (!)) zawdzięczał swojemu hartowi ducha, ale przede wszystkim anielskiej cierpliwości i poświęceniu swej żony Krystyny. Wszystko to nie zmieniało jednak brutalnego faktu, że po raz ostatni był w stanie przewodniczyć pracom swego Seminarium we wtorek, 3 czerwca, 1980 r. Było to seminarium nr 393.

Przez cztery następne lata akademickie prowadził je pan dr Andrzej Smajdor, a przez szesnaście kolejnych - drugi z piszących te słowa. Z końcem października 2002 r. przewodnictwo objął pan dr hab. Maciej Sablik, kierując pracami Seminarium do dziś (dużo bardziej szczegółowych informacji na ten temat zawiera artykuł R. Gera [8]).

Twórca Seminarium i utożsamianej z nim szkoły zmarł 13 czerwca 1991 r. po siedmiu miesiącach beznadziejnej hospitalizacji.

**3. Kierunki badań.** Jak już wspominałem, ogrom materiału, a także ramy artykułu, nie pozwalają na szczegółowe przedstawianie wyników, nawet tych najważniejszych (zresztą taka kwalifikacja byłaby tyleż subiektywna, co mało dyplomatyczna). Z żalem również, po konsultacjach z innymi specjalistami, doszedłem do wniosku, że zapewne wysoce pożądana próba przypisania nazwisk autorów do poszczególnych haseł, będzie zarówno niekompletna jak i pozbawiona informacji o wielkości wkładu danego autora; zastosowania klucza alfabetycznego zaś mogłoby w pewnych wypadkach graniczyć z groteską. Odstępując więc z tych powodów od takiego zamysłu ograniczę się jedynie do "hasłowego" przedstawienia problematyki badawczej podejmowanej przez śląskich matematyków pracujących w dziedzinie równań funkcyjnych.

Rozpocznijmy, zgodnie z chronologią, od *równań funkcyjnych o jednej zmiennej*, nazywanych alternatywnie *iteracyjnymi równaniami funkcyjnymi*. Wchodzą tu w grę:

- równania liniowe pierwszego rzędu;

- równania Abela, Bötchera i Schrödera;
- równania liniowe wyższych rzędów;
- równania nieliniowe;
- pierwiastki iteracyjne i równania ze złożeniami funkcji niewiadomej;
- równania równoczesne;
- nierówności funkcyjne o jednej zmiennej.

Badania obejmowały m.in.: istnienie i jednoznaczność rozwiązań w różnych klasach odwzorowań (stałego znaku, całkowalne, o wahaniu skończonym, regularnie zmieniające się, z własnością Darboux, ciągle, ciągle nigdzie nieróżniczkowalne, różniczkowalne, klasy  $C^r$ , klasy  $C^\infty$ , monotoniczne, wypukłe, lipschitzowskie, klasy  $U^\alpha$ , analityczne, meromorficzne, addytywne na swoim wykresie, o “dużym” wykresie); poszukiwanie rozwiązań rzeczywistych, zespolonych, o wartościach w przestrzeniach Banacha i rozwiązania stochastyczne; rozszerzanie rozwiązań; rezultaty typu strukturalnego (własności generyczne).

Z równaniami funkcyjnymi (głównie o jednej zmiennej) wiążą się ściśle: *metoda punktu stałego* i, jak już wielokrotnie podkreślaliśmy, *teoria iteracji*. Matematycy katowickiej szkoły równań funkcyjnych uzyskiwali oryginalne wyniki również i w tych dziedzinach. Dotyczyły one, odpowiednio,

- nieliniowych kontrakcji i  $\alpha$ -kontrakcji, nowych twierdzeń o punktach stałych (w tym twierdzenia Matkowskiego), charakteryzacji przyciągających punktów stałych, własności generycznych, wspólnych punktów stałych dla komutujących odwzorowań trójkątnych i *last but not least* prób zastosowania metody punktu stałego w teorii równań o wielu zmiennych;
- funkcji przemiennych, istnienia rozmaitych grup (półgrup) iteracji (wypukłych, wklęsłych,  $p$ -wypukłych, analitycznych, całkowitych, klasy  $C^n$  różniczkowalnych, homeomorfizmów przedziału i okręgu), ciągów iteracyjnych, iterowania funkcji o wartościach losowych, struktury orbit, porządku Szarkowskiego, funkcji prawie iterowalnych, zbiorów granicznych dla funkcji ciągłych, asymptotycznej stabilności stochastycznie iterowanych układów funkcyjnych iterowania średnich, indeksowanych rodzin bijekcji, wzorów asymptotycznych dla iterat.

Z początkiem lat siedemdziesiątych w ośrodku katowickim zaczęły się pojawiać prace z zakresu *równań i nierówności funkcyjnych o wielu zmiennych*. Dodajmy od razu, że chociaż różnice w zakresie stosowanych metod i typu uzyskiwanych wyników w tej dziedzinie w zestawieniu z teorią równań iteracyjnych są może nawet dalej idące niż np. pomiędzy teoriami równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych, to pozornie prosta kwestia

zakwalifikowania danego równania (pracy) do jednej z tych dyscyplin może w praktyce nastroczać pewne trudności. lub prowadzić do nieporozumień. I tak np. równanie funkcyjne Wallace'a

$$f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x,y) + f(y,x)}{2}$$

i które żywo przypomina klasyczne równanie Jensena, po uważniejszym oglądzie okazuje się być równaniem typu iteracyjnego (liniowe równanie funkcyjne drugiego rzędu i o jednej zmiennej). Z drugiej strony równanie translacji (jedno z najważniejszych nie tylko w teorii równań funkcyjnych)

$$F(F(x, s), t) = F(x, s + t),$$

bez wątpienia o wielu zmiennych, jest fundamentalne, w szczególności, dla teorii iteracji, która z kolei stanowi podstawowe narzędzie w dziedzinie (nomen omen) iteracyjnych równań funkcyjnych.

Wziąwszy pod uwagę te klasyfikacyjne trudności, spróbujmy hasłowo zilustrować mnogość uzyskanych wyników składających się na rozwój tych badań na Górnym Śląsku.

- **Klasyczne równania i nierówności funkcyjne:** różnica Cauchy'ego; alternatywne i warunkowe równania typu Cauchy'ego; funkcjonały ortogonalnie addytywne; równania funkcyjne postulowane prawie wszędzie; rozszerzanie homomorfizmów; ciągłość odwzorowań dopuszczających formuły addycyjne; równania Jensena i Pexidera; funkcjonały kwadratowe i kwadratowe procesy stochastyczne; równanie d'Alemberta i jego uogólnienia splotowe; równanie Wilsona i jego uogólnienia; zbiory bazowe dla odwzorowań wielomianowych i innych równań funkcyjnych; rozszerzanie odwzorowań wielomianowych; równanie Gołąba-Schinzla i jego uogólnienia; własności funkcji podaddytywnych i ich zastosowania; funkcjonały podliniowe i ich reprezentacje; charakteryzacje odwzorowań poprzez równania i nierówności funkcyjne; liniowe nierówności funkcyjne o wielu zmiennych; twierdzenia o oddzielaniu typu Hahna-Banacha na abstrakcyjnych strukturach.
- **Funkcje wypukłe:** automatyczna ciągłość; złożenia funkcji wypukłych; funkcje  $\mathbb{Q}$ -wypukłe; struktura funkcji  $(s, t)$ -wypukłych; addytywność i wypukłość w przestrzeniach liniowo-topologicznych; wypukłość wyższych rzędów, wypukłość zbiorów i odwzorowań w przestrzeniach bez struktury liniowej; funkcje prawie wypukłe i ich stabilność; wypukłe procesy stochastyczne; transformacje wypukłe z wartościami w kratkach Banacha; charakterzacja funkcji wypukłych i uogólnienia nierówności Höldera i Minkowskiego; aksjomatyczna teoria wypukłości; wypukłość względem średnich: logarytmicznej i quasi-arytmetycznej; wypukłość w sensie Wrighta; klasy zbiorów związane z wypukłością w sensie Jensena; twierdzenia o domkniętym nadwykresie; funkcje quasi-wypukłe; charakterzacja zbiorów stacjonarnych dla klasy funkcji wypukłych w sensie Jensena; zbiory jednorodności dla funkcji jensenowsko wypukłych; wypukłe odwzorowania wielowartościowe.

- **Inne równania funkcyjne:** równania Wallace'a, Hosszú, Davisona i Alsiny; równanie Abela o wielu zmiennych i Piąty Problem Hilberta; całkowite rozwiązania równania Hillego; równania funkcyjne związane z teorią żetów; równania funkcyjne związane z teorią średnich (z twierdzeniami Lagrange'a, Cauchy'ego, Pompeiu i Fletta o wartości średniej; ze średnią logarytmiczną i potęgową; równania funkcyjne typu Stamatego); podwojenie sześcianu i związane z tym równanie funkcyjne; równania funkcyjne związane z nierównością Ptolomeusza; zjawisko alienacji w równaniach funkcyjnych; równania kocykli; równanie wykładnicze z dokładnością do normy; problem Rolewicza i związane z nim równania i nierówności funkcyjne; własność różnicowa, podwójna własność różnicowa i słaba własność różnicowa dla rozmaitych klas odwzorowań; własność różnicowa wyższych rzędów.
- **Stabilność:** pojęcie stabilności w sensie Hyersa-Ulama i różne jego warianty. Superstabilność; stabilność homomorfizmów; stabilność uogólnionego równania Cauchy'ego; stabilność odwzorowań wielomianowych i jednomianowych; kongruencje funkcyjne i ich stabilność; stabilność z dokładnością do ideału; stabilność Hyersa-Ulama równań trygonometrycznych i równania funkcji wykładniczych; jednostajnie bliskie i łączne  $t$ -normy archimedesowe; lokalna stabilność równania funkcji wielomianowych; ortogonalna stabilność; stabilność izometrii; sumy funkcji addytywnych i funkcji o wartościach całkowitych; twierdzenia faktoryzacyjne.
- **Zagadnienia pokrewne:** ideały i  $\sigma$ -ideały liniowo niezmiennicze oraz ideały sprzężone; zasada dualności Sierpińskiego-Erdösa; topologiczne analogony twierdzenia Vitaliego o pokryciu, twierdzenia Lebesgue'a o punktach gęstości i lematu Smिताła - uogólnienia; zbiory zerowe Haara i Christensena w abelowych grupach polskich, mierzalność w sensie Christensena; zbiory miary zero w przestrzeniach liniowo-topologicznych; bazy Hamela; twierdzenia typu Steinhausa i Piccard, lokalna wersja twierdzenia Steinhausa, funkcja Steinhausa, zbiory uniwersalnie mierzalne; zbiory odległości generowane przez zbiory o dodatniej mierze zewnętrznej Lebesgue'a; topologie generowane przez strukturę liniową.
- **Charakteryzacje odwzorowań i przestrzeni.** To jedna z najbardziej naturalnych idei pojawiających się w teorii równań funkcyjnych. Charakteryzowano m.in. funkcje: logarytmiczną, funkcje trygonometryczne i hiperboliczne, funkcję  $\Gamma$ -Eulera, niektóre nigdzie nieróżniczkowalne funkcje ciągłe, wielomiany oraz ich restrykcje do przedziału, stosunek anharmoniczny, niektóre klasyczne geometrie oraz przestrzenie: unitarne i ściśle wypukłe.
- **Odwzorowania wielowartościowe.** Z biegiem lat równania i nierówności funkcyjne, zwłaszcza o wielu zmiennych i w teorii iteracji, dla takich odwzorowań stały się jednym z żywych nurtów badawczych. Często problematyka ta kieruje się zagadnieniami i wynikami już uzyskanymi dla "zwykłych" (tj. jednowartościowych) funkcji, ale i w tych przypadkach wymaga wypracowania nowych metod. Rozważane m.in. były: wielowartościowe rozwiązania równań Cauchy'ego, Jensena, Pexide-

ra, funkcjonałów kwadratowych, podaddytywnych i podkwadratowych, multifunkcje  $K$ -wypukłe i  $K$ -wklęsłe oraz wielomianowe, selekcje o danej własności multifunkcji analogicznego typu, wielowartościowe funkcje różniczkowalne i lipschitzowskie oraz pełna gama wielowartościowych odpowiedników klasycznych grup (półgrup) iteracji.

- **Zastosowania.** Znajdowano ich wiele, m.in. w: teorii procesów gałązkowych, miar podwójnie stochastycznych, teorii transformacji ergodycznych, operatorów Markowa, teorii falek, w analizie funkcjonalnej i harmonicznej, geometrii, algebrze, w rachunku prawdopodobieństwa, teorii zbiorów rozmytych, a także w fizyce i matematyce finansowej.

Brak nazwisk w tym wyliczeniu (o powodach pisałem na początku tego paragrafu) zostanie w pewnym stopniu zrekompensowany w kolejnej części, na którą złożą się niemal same tylko nazwiska.

**4. Genealogia.** Dalece niedoskonałą, ale jednak jakąś miarą kształtowania się szkoły i jej rozwoju jest przebieg awansów naukowych. Poniższa tabela sporządzona została na wzór znanego programu "The Mathematics Genealogy Project" z North Dakota State University (zob. <http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/>), choć trafniej byłoby powiedzieć, że stanowi on jedynie bardzo skromną adaptację tego pomysłu. W pierwszej kolumnie (nie licząc liczby porządkowej) podane jest nazwisko promotora z datą uzyskania tytułu w przypadku profesorów oraz miejscem i datą habilitacji w przypadku doktorów habilitowanych. W drugiej - wypromowani doktorzy w kolejności chronologicznej wraz z datą i miejscem finalizacji przewodu.

Przedstawione zestawienie odzwierciedla stan na dzień 30 czerwca 2003 r.

**5. Seminaria.** O centrotwórczej i ogniskującej roli

### Seminarium z Równań Funkcyjnych

uruchomionego przez profesora Marka Kuczmę była już mowa. Ponownie także wspomnijmy, że rolę jaką odegrało ono w środowisku górnośląskim najpełniej opisuje zbiorowa publikacja *One Thousand Seminars on Functional Equations* (Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2002). Przypomnijmy tu jedynie niektóre daty związane z historią Seminarium.

1. **Lata 1964/1965 oraz 1965/1966**

# 1 - 28

Seminarium odbywało się co dwa tygodnie. Na Seminarium #1, które odbyło się 6 października 1964 r., gościem był pan prof. Minoru Urabe, a referat wygłosił pan docent Marek Kuczma nt. *On a functional characterization of logarithmic functions.*

## 2. Lata 1966/1967 do 1979/1980

# 29 - 393

Ostatnie Seminarium prowadzone przez pana prof. dra hab. Marka Kuczmę miało miejsce w dniu 3 czerwca 1980 r. Miało # 393. Referat wygłosił pan mgr Witold Jarczyk.

## 3. Lata 1980/1981 do 1983/1984

# 394 - 506

Z początkiem roku akademickiego 1980/1981 profesor Kuczma nominował pana dra Andrzeja Smajdora zastępcą kierownika Zakładu Równań Funkcyjnych. Jednym z obowiązków zastępcy było prowadzenie Seminarium.

Pierwsze Seminarium pod oficjalnym kierownictwem pana dra Andrzeja Smajdora nosiło # 394 i odbyło się dnia 4 listopada 1980 r. Wygłoszone zostały trzy referaty:

- Doc. dr hab. Roman Ger, *Sprawozdanie z konferencji w Kanadzie;*
- Dr Karol Baron, *Sprawozdanie z konferencji w Austrii;*
- Dr Marek Cezary Zdun, *Sprawozdanie z konferencji w RFN.*

### Rok 1984, 3 kwietnia

Seminarium # 500

Referat wygłosił pan doc. dr hab. Roman Ger nt. *Drugi obszar badawczy.*

Pan dr Andrzej Smajdor kierował pracami Seminarium do dnia 2 października 1984 r., kiedy to miało miejsce Seminarium # 506. Wygłoszone na nim zostały dwa referaty:

- Dr Witold Jarczyk, *Sprawozdanie z Summer School on Dynamical Systems, Račkova Dolina (CSRS)*;
- Dr Wilhelmina Smajdor, *Pewna wersja twierdzenia Banacha-Steinhaus.*

9 października 1984, na Seminarium # 506a, na życzenie pana profesora Marka Kuczmy, wraz z nową kadencją władz Uczelni, odbyły się **wybory** zastępcy kierownika Zakładu Równań Funkcyjnych. W mocy pozostawała decyzja profesora Kuczmy, iż jednym z obowiązków wybranego przez pracowników Zakładu Równań Funkcyjnych zastępcy kierownika Zakładu, jest prowadzenie Seminarium. W wyniku przeprowadzonych wyborów zastępcą kierownika ZRF został doc. dr hab. Roman Ger.

#### 4. Lata 1984/1985 do 1999/2000

# 507 - 951

Pierwsze Seminarium pod kierownictwem pana doc. dra hab. Romana Gera nosiło # 507 i odbyło się dnia 16 października 1984 r. Referat wygłosił pan doc. dr hab. Marek Cezary Zdun nt. *Grupy iteracji homeomorfizmów okręgu* (1/6).

Z nową kadencją władz Uczelni, rozpoczynającą się w październiku 1987 r., pan doc. dr hab. Roman Ger mianowany został kierownikiem Zakładu Równań Funkcyjnych. Sam przebywał w tym czasie w University of Central Florida (U.S.A.). Po powrocie do kraju w roku 1988, kierował pracami Seminarium przez niecały semestr zimowy roku akad. 1988/1989. 17 stycznia 1989 roku, na

Seminarium # 634

ustalono nowe zasady pracy Seminarium. Uczestnicy Seminarium zadeklarowali wolę, by pan doc. dr hab. Roman Ger objął kierownictwo Seminarium na stałe.

#### 5. 23 maja 2000 roku na

Seminarium # 950

referat wygłosił pan Prof. Dr. Peter Volkmann nt. *On perturbing homomorphisms between square symmetric operations.*

Autor tego artykułu kierował pracami Seminarium przez 16 lat (seminaria 507-591). Na 951 posiedzeniu (ostatnim w roku akademickim 1999/2000) oświadczył,

że w jego odczuciu zastrzyk “świeżej krwi”, nowe pomysły i świeżość spojrzenia są niezbędne dla dalszego istnienia Seminarium. W tej sytuacji, z początkiem nowego roku akademickiego, w październiku 2000 roku, zorganizowano wybory w wyniku których kierownictwo prac Seminarium objął pan dr hab. Maciej Sablik, ostatni z 13 doktorów wypromowanych przez profesora Marka Kuczmę.

## 6. Lata 2000/2001 do 2002/2003

# 952 - 1036

Po raz pierwszy pan Maciej Sablik przewodniczył posiedzeniu

Seminarium z Równań Funkcyjnych

w dniu 24 października 2000 r. (seminarium # 955). Referat wygłosił pan prof. dr hab. Zenon Moszner mówiąc *O operatorach Hyersa*.

**Rok 2002, 8 kwietnia,**

Seminarium # 1000

Referaty wygłosili panowie:

- prof. dr hab. Roman Ger, *Najważniejsze daty w historii Seminarium*
- dr hab. Maciej Sablik, *O Konkursie im. Marka Kuczmy*
- mgr Tomasz Szostok, *Trochę statystyki*.

Ostatnie w roku akademickim 2002/2003 posiedzenie Seminarium odbyło się 3 czerwca 2003 r. i nosiło #1036. Referat wygłosił pan mgr Arkadiusz Lisak nt. *Rozszerzanie równań funkcyjnych przy użyciu bisymetrii*.

Szczegółowy wykaz wygłoszonych referatów za ostatnie dwa lata akademickie (daty, autorzy i tytuły) można znaleźć pod adresem:

[www.math.us.edu.pl/nowe/institut/zrf/sem-zrf-sl.html](http://www.math.us.edu.pl/nowe/institut/zrf/sem-zrf-sl.html)

W roku 1976, bezpośrednio po przeniesieniu się do ówczesnej Filii Politechniki Łódzkiej w Bielsku-Białej, profesor (wówczas docent) Janusz Matkowski uruchamia tam Seminarium, którego pracami kierował przez ponad 20 lat. W okolicznościowym materiale wydanym z okazji **600. Seminarium Katedry Matematyki** czytamy m.in. *Tematyka poruszana na Seminarium związana jest głównie z równaniami i nierównościami funkcyjnymi,*



teorię punktów stałych, funkcjami wielowartościowymi oraz analizą wypukłą. Przedstawiane są również sprawozdania z konferencji naukowych, w których uczestniczyli pracownicy Katedry.

W czasie 26 lat pracy Seminarium w jego posiedzeniach uczestniczyło ponad 170 matematyków z wielu ośrodków akademickich kraju i zagranicy.

Liderami pod względem ilości obecności są: dr L. Ogiński (583), dr W. Ogińska (581) i prof. J. Matkowski (517).

Najwięcej referatów wygłosili: prof. J. Matkowski (104), prof. K. Nikodem (57), dr J. Miś (34) i dr W. Ogińska (27).

Wśród gości zagranicznych, którzy mieli odczyty na Seminarium byli m.in. matematycy z Austrii, Chin, Czechosłowacji, Indii, Jugosławii, Kanady, Niemiec, Rumunii, Szwajcarii, Wenezueli, Węgier, Wietnamu, Włoch i ZSRR.

Od roku 1997 do chwili obecnej pracami Seminarium kieruje pan prof. dr hab. Kazimierz Nikodem.

Z początkiem roku 1982 autor tego artykułu doszedł do przekonania, że w ośrodku katowickim sytuacja dojrzała do tego, by stworzyć bardziej wyspecjalizowane forum prezentacji wyników, zwłaszcza młodszych matematyków, i powziął decyzję o uruchomieniu

### **Seminarium z Równań i Nierówności Funkcyjnych o Wielu Zmiennych.**

Nie z myślą o jakiegokolwiek formie konkurencji dla Seminarium wtorkowego, które nabrało coraz bardziej środowiskowego charakteru, ale, wręcz przeciwnie, z ideą pewnej formy jego uzupełnienia. Pierwsze posiedzenie tego Seminarium odbyło się w poniedziałek, 8 października 1982 roku i miało kameralny klimat nie tylko ze względu na wąskie grono jego uczestników (mgr Irena Adamaszek, mgr Zbigniew Gajda, dr Joanna Ger, doc. dr hab. Roman Ger, dr Kazimierz Nikodem i dr Maciej Sablik) ale i na jego locum: mieszkanie Joanny i Romana Gerów, w którym przez pierwsze dwa lata się odbywało. Na swój sposób stanowiło też dla tego zespołu jakąś formę “pracy organicznej” alternatywną dla mrocznej rzeczywistości stanu wojennego i powszechnie dominującej atmosfery zniechęcenia. Z upływem czasu ów kameralny klimat Seminarium szybko się zatracił: posiedzenia przeniesiono do Instytutu Matematyki UŚl., a liczba uczestników systematycznie rosła by dojść dzisiaj do ok. 25 osób (nie tylko z Katowic, ale i Bielska-Białej, Częstochowy i Rzeszowa). Nie zmienił się jedynie termin: poniedziałek, godz. 16:15, i dlatego przez niektórych uczestników nazywane jest “poniedziałkowym”. Ostatnie w roku akademickim 2002/2003 posiedzenie Seminarium z Równań i Nierówności Funkcyjnych opatrzone jest numerem 569 i kończy 21 rok jego istnienia.

Prace Seminarium ogniskowały się wokół następujących zagadnień: istnienie i jednoznaczność rozwiązań z akcentem na minimalizację założeń regularnościowych, własności

rozwiązań, wypukłość zbiorów i odwzorowań (w szczególności wypukłość w sensie Jensena i rozmaite jej warianty), stabilność w sensie Hyersa-Ulana (dominujący nurt w ostatnim dziesięcioleciu), ortogonalność (zazwyczaj zadawana aksjomatycznie), kongruencje funkcyjne, charakteryzacja odwzorowań i przestrzeni, związki równań i nierówności funkcyjnych z analizą funkcjonalną, geometrią, algebrą i analizą harmoniczną (w tym, w szczególności teoria średnich niezmienniczych skalarnych i wektorowych), średnie i związane z nimi równania funkcyjne oraz odwzorowania wielowartościowe.

Ostatnie w roku akademickim 2002/2003 posiedzenie Seminarium z Równań i Nierówności Funkcyjnych o Wielu Zmiennych opatrzone jest numerem 569 i kończy 21 rok jego istnienia.

Szczegółowy wykaz wygłoszonych referatów (daty, autorzy i tytuły) można znaleźć pod adresem:

[www.math.us.edu.pl/seminaria/zrf/sem-rnfwz.html](http://www.math.us.edu.pl/seminaria/zrf/sem-rnfwz.html)

Kierując się podobnymi przesłankami (własne grono uczniów, akcent na badania z zakresu iteracyjnych równań funkcyjnych, własna wizja rozwoju wybranych aspektów dyscypliny) pan profesor Karol Baron uruchamia w roku akademickim 1986/1987

### **Seminarium z Analizy Rzeczywistej.**

Pierwsze jego posiedzenie miało miejsce 8 października 1986 roku; referat wygłosił pan doc. dr hab. Karol Baron na temat równania Cauchy'ego modulo  $\mathbb{Z}$ , a pierwszymi uczestnikami byli: doc. dr hab. Karol Baron, mgr Bolesław Gawęł, dr Witold Jarczyk, dr Zygfryd Kominek, dr Andrzej Nowak, dr Andrzej Smajdor, dr Wilhelmina Smajdor i mgr Wiesław Wójcik.

Tematyka prac Seminarium, które po objęciu przez profesora Barona, rok później, kierownictwa Zakładu Analizy Rzeczywistej (funkcję tę pełni do dziś) stało się, naturalną kolejną rzeczą, seminarium "zakładowym", obejmuje wszakże przede wszystkim zagadnienia teorii równań funkcyjnych, a m.in. równania i nierówności funkcyjne o jednej zmiennej, dyskretne układy dynamiczne i teorię iteracji, podstawowe równania i nierówności i kongruencje funkcyjne o wielu zmiennych. Ewoluuując także w innych kierunkach tematyka ta objęła także zagadnienia teorii miary i mierzalności, multifunkcje typu Caratheodory'ego, funkcje o wartościach losowych, przestrzenie funkcyjne, operatory Markowa i iterowane układy funkcyjne oraz punkty stałe odwzorowań.

Ostatnie w roku akademickim 2002/2003 posiedzenie Seminarium z Analizy Rzeczywistej opatrzone jest numerem 569 i kończy 17 rok jego istnienia.

Szczegółowy wykaz wygłoszonych referatów (daty, autorzy i tytuły) można znaleźć pod adresem:

W latach akademickich 1991/1992 - 2000/2001 pan dr hab. Stefan Czerwik prowadził

### **Seminarium z Równań Funkcyjnych i Różniczkowych**

w Instytucie Matematyki Politechniki Śląskiej w Gliwicach.

Tematyka prac tego Seminarium obejmowała równania funkcyjne o jednej i wielu zmiennych z akcentem na operatory i funkcjonały kwadratowe, wybrane zagadnienia analizy funkcjonalnej, odwzorowania wielowartościowe oraz równania różniczkowe i ich uogólnienia.

W Instytucie Matematyki (od roku akad. 1998/1999 - Instytucie Matematyki i Informatyki) Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie

### **Seminarium z Równań Funkcyjnych**

istnieje od roku 1979, choć w dość różnych formach. Początkowo funkcjonowało jako seminarium w Zakładzie Analizy Matematycznej (kierowanym przez pana docenta Czesława Ginalskiego), a później - jako seminarium Zakładu Analizy Funkcjonalnej kierowanego przez pana prof. dra hab. Janusza Matkowskiego, który pracował w Instytucie w latach 1976-1993. Tematyka prac tego Seminarium, utworzonego i kierowanego przez pana profesora Matkowskiego w latach 1979-1990 obejmowała równania funkcyjne typu iteracyjnego, rozwiązania o wahaniu skończonym, rozwiązania różniczkowalne z pochodną spełniającą warunek Lipschitza, rozwiązania hölderowskie, operatory Niemyckiego, operatory lokalnie określone w przestrzeni funkcji różniczkowalnych w sensie Whitneya, równania funkcyjne ze złożeniami funkcji niewiadomej oraz twierdzenia o punktach stałych.

Z początkiem roku akademickiego 1991/1992 do Instytutu powraca autor tego artykułu (uprzednio pracował w tym Instytucie w latach 1981-1987) obejmując kierownictwo Zakładu Równań Funkcyjnych, którą to funkcję pełni do dziś. Po odejściu pana profesora Matkowskiego z Instytutu (w roku 1993) Seminarium prowadzone teraz przez profesora Romana Gera okresowo kontynuowało pracę, a jego tematyka koncentrowała się na równaniach i nierównościach funkcyjnych o wielu zmiennych z akcentem na zagadnienia stabilnościowe. Zmienne koleje losu tego Seminarium związane są nie tylko z osobą kierującą jego pracami, ale przede wszystkim faktem, że z powodów formalno-administracyjnych nie może ono obecnie odbywać się tak systematycznie jak w innych ośrodkach.

**6. Kontakty naukowe i osiągnięcia organizacyjne.** Jednym z bardzo istotnych czynników składających się na istnienie "szkoły" jest mnogość kontaktów naukowych zarówno personalnych, jak i mających charakter współpracy między całymi ośrodkami.

Świadomość wagi takich kontaktów miał nie tylko sam twórca śląskiej szkoły równań funkcyjnych - profesor Marek Kuczma, ale konsekwentnie wszczepiał ją swoim uczniom. Przejawiało się to zarówno w jego trosce o ułatwianie wyjazdów zagranicznych nawet bardzo młodym matematykom (nawet jeśli klimat polityczny temu nie sprzyjał) i to do ośrodków, czy też na konferencje najbardziej prestiżowe, jak i w skutecznych staraniach, by ośrodek katowicki odwiedzali wybitni specjaliści zagraniczni. Z wizytami naukowymi i odczytami przyjeżdżali do Katowic i/lub Bielska-Białej matematycy z ponad 20 krajów świata. w tym z najbardziej znanych zagranicznych centrów teorii równań funkcyjnych (z Węgier, Kanady, Austrii, Niemiec i U.S.A.). W wymiarze krajowym najściślejsza, i to od samego początku, jest współpraca ze środowiskiem krakowskim. Bardzo żywe, choć nieco asymetryczne są kontakty z matematykami Uniwersytetu Rzeszowskiego. Do bardzo cenionych należy coraz głębsza, zwłaszcza w ostatnim dziesięcioleciu, współpraca naukowa z matematykami Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu (tamtejszą szkołą profesorów Orlicza i Musielaka).

W katowickim ośrodku równań funkcyjnych roczne lub półroczne staże naukowe odbywało ok. 20 matematyków, w tym dwu zagranicznych (z Czech i U.S.A.).

Formalne ramy umowy o współpracy przyjęła ponad trzydziestoletnia kooperacja naukowa z matematykami Uniwersytetu im. Karola-Franciszka w Grazu (Austria). Stała się ona również zaczynem oficjalnych kontaktów naukowych między Uniwersytetem Śląskim i Uniwersytetem w Grazu w wymiarze ogólnouczelnianym. Poza wspólnymi publikacjami i wymianą wizyt (w tym także z dłuższymi pobytami), w latach 1986, 1991 w Austrii a w roku 1994 - w Polsce, zorganizowane zostały *Katowice-Graz Seminars* z licznym udziałem specjalistów z obu ośrodków, każdorazowo zwieńczone edycją *Proceedings* zawierających kompletne, oryginalne i recenzowane artykuły naukowe.

W podobnym duchu i jako równie owocne naukowo postrzegane są organizowane od niedawna coroczne *Katowice-Debrecen Winter Seminars on Functional Equations and Inequalities*:

- w 2001 r. - w Cieszynie,
- w 2002 r. - w Hajdúszoboszló (Węgry),
- w 2003 r. - w Będlewie k. Poznania.

*Proceedings* publikowane są kolejnych tomach *Annales Mathematicae Silesianae* i, równolegle, na stronach internetowych Uniwersytetu w Debreczynie (Węgry): <http://riesz.math.klte.hu/> Ośrodek ten uważany jest za jedno z najsilniejszych centrów równań funkcyjnych na świecie.

Do najpoważniejszych przedsięwzięć należy zaliczyć organizację trzech sympozjów z cyklu dorocznych Międzynarodowych Sympozjów z Równań Funkcyjnych (ISFE) - najbardziej prestiżowej imprezy naukowej z tej dyscypliny w świecie:

- 27-th ISFE (sierpień, 1989), Bielsko-Biała - Katowice - Kraków;
- 34-th ISFE (czerwiec, 1996), Wisła-Jawornik;
- 40-th ISFE (sierpień-wrzesień, 2002), Gronów k. Zielonej Góry.

Wszystkie one zostały w opinii uczestników z kilkunastu krajów świata uznane za sukces organizacyjny, choć w przypadku pierwszej z nich brano zapewne pod uwagę katastrofalną sytuację ekonomiczną kraju w przełomowym roku 1989.

Dodajmy, że w przeddzień 34. Sympozjum, z licznym udziałem uczestników ISFE odbyła się uroczystość nadania tytułu Doctora Honoris causa Uniwersytetu Śląskiego panu profesorowi Jánosowi Aczélowi, światowemu liderowi teorii równań funkcyjnych, *spiritus movens* tych sympozjów, potocznie acz powszechnie nazywanych “aczélowskimi”.

Do już prawie historycznych, bo tak odległych w czasie, przedsięwzięć organizacyjnych na skalę krajową kwalifikuje się cykl *Ogólnopolskich Konferencji Naukowych z Teorii Równań Funkcyjnych*:

- w Bielsku-Białej - Wapienicy (październik, 1969 r.);
- w Zawoi (maj, 1970 r.);
- w Ustroniu-Jaszowcu (maj, 1973 r.).

Organizowane z inicjatywy profesora Kuczmy miały, zasadniczo, szkoleniowy charakter i przez to wysoko cenione były zwłaszcza przez młodych adeptów dyscypliny; do nich w głównej mierze były adresowane. Nieco podobny charakter miała też *Ogólnopolska Konferencja Naukowa “Równania funkcyjne w naukach niematematycznych”* zorganizowana na Uniwersytecie Śląskim w Katowicach w listopadzie 1973 roku, choć formalnie nie wchodziła już do omówionego wyżej cyklu.

Ogólnopolski charakter mają również znacznie “młodsze” Krajowe Seminaria pt. *Wy-pukłe Funkcje Wielowartościowe*, organizowane przez ośrodek bielski pod przewodnictwem pana prof. dra hab. Kazimierz Nikodema. Gromadzą one coraz bardziej reprezentatywne gremia specjalistów z wielu polskich ośrodków naukowych. Odbywają się w jako biennale. Oto ich historia:

- I, w Bielsku-Białej (1993);
- II, w Bielsku-Białej (1995);
- III, w Bielsku-Białej - Mikuszowicach (1997);
- IV, w Bystrej k. Bielska-Białej (1999);

- V, w Bystrej k. Bielska-Białej (2001);
- VI, w Bystrej k. Bielska-Białej (2003),

zawsze w październiku. Dominują wielowartościowe aspekty teorii równań i nierówności funkcyjnych.

Znany w kraju (choć nie tylko) jest ogólnopolski *Konkurs na Najlepszą Polską Pracę z Równań Funkcyjnych*, nazwany od 1991 r., krótko po śmierci profesora Marka Kuczmy - jego imieniem. Była to inicjatywa profesora Kuczmy z przełomu lat 1974 i 1975. Pierwsze posiedzenie trzynastoosobowego jury, oceniające prace za te właśnie dwa lata, miało miejsce w Uniwersytecie Śląskim, w grudniu 1975 r. Jury wybierane jest co dwa lata przez uczestników Seminarium z Równań Funkcyjnych w Katowicach. To gremium jest też "mocodawcą" Konkursu, a za sprawy organizacyjne elekcji odpowiedzialna jest osoba kierująca pracami Seminarium. Edycje Konkursu są coroczne i nie miały żadnej przerwy mimo tzw. zakrętów historii. Pełną listę jurorów i laureatów Konkursu, jak i jego historię zawiera artykuł [17] autorstwa pana dra hab. Macieja Sablika. Listy laureatów zamieszczają też systematycznie "Wiadomości Matematyczne". Wszystkie fakty, daty, liczby i listy dotyczące Konkursu, a także jego Regulamin są także do wglądu na stronie internetowej [www.math.us.edu.pl/mkuczma/index.htm](http://www.math.us.edu.pl/mkuczma/index.htm)

## Literatura

- [1] J. Aczél and S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Monografie Matematyczne **39**, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1960.
- [2] K. Baron, *M. Kuczma's papers on iterative functional equations*, Grazer Mathematische Berichte **316** (1992), 1-6.
- [3] B. Choczewski, *Papers of Marek Kuczma written in the last decade of his life*, Grazer Mathematische Berichte **316** (1992), 7-16.
- [4] R. Ger, *Marek Kuczma, 1935-1991*, Aequationes Mathematicae **44** (1992), 1-10.
- [5] R. Ger, *Marek Kuczma's papers on functional equations in several variables*, Grazer Mathematische Berichte **316** (1992), 17-28.
- [6] R. Ger, *Matematyka na Górnym Śląsku*,
- [7] R. Ger, *Równania funkcyjne - zarys rozwoju i aktualny stan badań*, Referat plenarny na zaproszenie Komitetu Naukowego Zjazdu Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Nowy Sącz, 12 września 2001 r.
- [8] R. Ger, *An outline of the history and the scientific profile of the Seminar*, One thousand seminars on functional equations, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2002, 9-24.
- [9] M. Kucharzewski, *Elementy teorii obiektów geometrycznych*, Uniwersytet Śląski w Katowicach, Katowice 1969.
- [10] M. Kucharzewski, *Z historii Oddziału Górnośląskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, Uniwersytet Śląski w Katowicach, Katowice 1969.
- [11] M. Kucharzewski, *O matematyce w ośrodku górnośląskim* - maszynopis (niepublikowane).
- [12] M. Kucharzewski and M. Kuczma, *On the functional equation  $F(AB) = F(A)F(B)$* , Annales Polonici Mathematici **13** (1963), 1-17.
- [13] M. Kucharzewski and M. Kuczma, *Basic concepts of the theory of geometric objects*. [Rozprawy Mat., No.43]. IMPAN, Warsaw, 1964.
- [14] M. Kuczma, *Functional equations in a single variable*, Monografie Matematyczne **46**, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1968.
- [15] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*, Polskie Wydawnictwo Naukowe & Uniwersytet Śląski, Warszawa-Kraków-Katowice, 1985.

- [16] M. Kuczma, B. Choczewski and R. Ger, *Iterative functional equations*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, Cambridge-New York-Port Chester-Melbourne-Sydney, 1990.
- [17] M. Sablik, *Marek Kuczma contest for the best Polish paper on functional equations*, One thousand seminars on functional equations, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2002, 25-27.