Topologia i teoria mnogości w Katowicach

Aleksander Błaszczyk i Władysław Kulpa

czerwiec 2003

Streszczenie

Topologia i teoria mnogości powstaje i rozwija się na Górnym Śląsku od chwili przybycia Profesora Jerzego Mioduszewskiego do Katowic. Jemu i jego współpracownikom poświęcony jest ten artykuł. Zawiera on zarys głównych kierunków badań w zakresie topologii i teorii mnogości prowadzonych w ośrodku górnośląskim.

I. Profesor Jerzy Mioduszewski i jego uczniowie.

Rozwój topologii na Górnym Śląsku rozpoczyna się w roku 1966 od momentu przybycia Profesora Jerzego Mioduszewskiego do Katowic. W roku akademickim 1966/67 Profesor Mioduszewski prowadził seminarium z topologii dla studentów czwartego roku filii Uniwersytetu Jagiellońskiego (przekształconej w 1968 roku wraz Wyższa Szkołą Pedagogiczną w Uniwersytet Śląski). Wśród uczestników tego seminarium był także Władsław Kulpa, jeden z autorów tego artykułu. Jako seminarium studenckie trwało ono jeszcze kilka następnych lat. Później jednak, gdy pierwsi wychowankowie stali się pracownikami Uniwersytetu, przekształciło się w seminarium naukowe i w tej formie trwało do końca lat 90-tych. Obecnie seminarium to jest kontynuowane przez Profesora Mioduszewskiego i jego uczniów już jako kilka oddzielnych seminariów dla pracowników i studentów. W latach 1966 - 69 Profesor Mioduszewski wygłosił trzy wykłady monograficzne z topologii: *Topologia ogólna ze wstępem do teorii kategorii*, *Topologia algebraiczna* oraz *Teoria homotopii.* W latach późniejszych tradycja to była kontynuowana. Oprócz topologii Profesor Mioduszewski wykładał także teorię mnogości. Topologię w Katowicach wykładali także profesorowie z innych ośrodków: w roku akademickim 1969-70 z wykładem *Odwzorowania i przestrzenie* przyjeżdzał z Warszawy Profesor Ryszard Engelking, a w roku akademickim 1973-74 z wykładami o topologii różniczkowej przyjeżdżał z Wrocławia Profesor Roman Duda. Wiele lat później, w roku akademickim 1994-95 teorię forsingu wykładał w Katowicach Profesor Jacek Cichoń z Wrocławia.

Profesorowi Jerzemu Mioduszewskiemu jako twórcy na Śląsku ośrodka badawczego z topologii chcemy poświęcić znaczną część tego artykułu.

Jerzy Mioduszewski urodził się 25 grudnia 1927 roku w miejscowości Ołtarze, pow. Ostrów Mazowiecka. W 1947 roku ukończył Liceum Ogólnokształcące w Łomży. Jego studia matematyczne na Uniwersytecie Wrocławskim w latach 1947–1952 zostały zakończone pracą magisterską z zakresu topologii na temat kontinuów nieprzywiedlnych. Promotorem był Profesor Bronisław Knaster, uczeń Wacława Sierpińskiego.

Pierwsze prace, które powstały pod kierunkiem prof. Knastera, dotyczyły topologii płaszczyzny. Z topologią płaszczyzny były także związane prace z dziedziny funkcji analitycznych inspirowane przez Profesora Witolda Wolibnera. W jednej z nich [?] pokazano, w jaki sposób każde kontinuum płaskie może być realizowane jako dziedzina nieoznaczoności pewnej funkcji analitycznej.

Promotorem pracy doktorskiej Jerzego Mioduszewskiego, obronionej na Uniwersytecie Wrocławskim w 1959 roku, był także Profesor Bronisław Knaster. Praca zawierała inne ujęcie teorii funkcji ciągłych o stałej krotności, pozwalające na badanie tych funkcji w szerszym zkresie, nie jak dotąd dla rozmaitości. Dorobek Profesora Mioduszewskiego w zakresie odwzorowań o skończonej krotności jest bardzo obszerny; patrz [?], [?], [?], [?]. Jeden z wyników głosi, że nie istnieją funkcje ciągłe dwukrotne określone na kontinuum Knastera. Tematyka odwzorowań małej krotności była kontynuowana w Katowicach w pracach [?], [?], [?] napisanych wspólnie z Wojciechem Dębskim i Joe Heath. Nawiązując do prac Hurewicza (1933) i Siekluckiego (1962) autorzy pokazali [?], [?], że odwzorowania krotności nie większej niż dwa nie podnoszą wymiaru dendrytów, oraz nie podnoszą wymiaru krzywej trójkątowej Sierpińskiego, o ile obraz jest płaski.

Habilitację Jerzy Mioduszewski otrzymał w roku 1964 na Uniwersytecie Wrocławskim za cykl prac [?], [?], [?] przedstawiających teorię kontinuów łańcuchowych w ujęciu funkcyjnym poprzez granice odwrotne, Teoria ta oparta jest na pewnym lemacie o uniformizacji pochodzącym od Hommy (1952) oraz Sikorskiego i Zarankiewicza (1954). Metoda polegająca na stosowaniu lematu o uniformizacji a także pewnego lematu Mioduszewskiego o odwzorowaniach między granicami odwrotnymi [?], stała się później środkiem ogólnie przyjętym w teorii kontinuów. Stosowali ją między innymi: Rogers, Tymchatyn, Oversteegen, Fearnly, Watanabe, Kawamura i inni.

W roku 1967 ze stanowiska docenta w Instutucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego, Jerzy Mioduszewski został przeniesiony do filii UJ w Katowicach, która jak wiadomo w rok później przekształciła się w Uniwersytet Śląski. W 1976 otrzymał tytuł profesora nadzwyczajnego.

W 1969 Mioduszewski wraz z Ludwikiem Rudolfem opublikowali rozprawę [?], która zawiera teorię przestrzeni i rozszerzeń H-domkniętych oraz teorię nakryć ekstremalnie niespójnych w ujęciu teorii kategorii. Występujące w rozprawie pojęcie odwzorowań szkieletowych znalazło uznanie w pracach wielu autorów (V. V. Fiedorczuk, J. Porter, D. Harris i in.). Dr Ludwik Rudolf w latach 1969–1971 uczestniczył w katowickim seminarium z topologii, a przestrzenie extremalnie niespójne często omawiane były na seminarium. Tematykę Mioduszewskiego-Rudolfa podejmuje jeden z autorów tego artykułu, Aleksander Błaszczyk, który we wspólnej pracy z Mioduszewskim [?] doprowadził do ujęcia rozszerzenia Katětova jako funktora. Z kolei, funktorialne traktowanie nakryć ekstremalnie niespójnych (nakryć Gleasona) zostało doprowadzone przez Błaszczyka [?] do końcowej formy, nie wymagającej żadnych warunków oddzielalności. Niezależnie badania w tej dziedzinie prowadzone były na Uniwersytecie Moskiewskim przez S.Iliadisa, W.Ponomariowa, W.Ulianowa i L.Szapiro.

W pracach [?], [?] Mioduszewski podjął się pionierskiej tematyki polegającej na badaniu za pomocą ultraproduktów kompozant w $\beta[0,\infty)\setminus[0,\infty)$. Sformułowana przez niego w pracy [?] hipoteza orzekająca, że przy pewnych dodatkowych aksjomatach dotyczących teorii mnogości kontinuum to ma tylko jedną kompozantę zostało później potwierdzona przez A. Blassa (1987). W związku z badaniami struktury topologicznej przestrzeni $\beta[0,\infty)\setminus[0,\infty)$, powstała potrzeba zbadania produktu odcinka prze zbiór Cantora. Przestrzeń ta, oznoczona symbolem $\mathbb{M}$, nazwana została prze topologów przestrzenią Mioduszewskiego i nazwa ta przyjęła się w topologii.

Nawiązując do pracy Gruenhage'a i Schoenfelda Mioduszewski udowodnił twierdzenie [?], według którego istnienie przestrzeni nieośrodkowych zwartych Hausdorffa z dwoma typami topologicznymi wśród swoich podzbiorów otwartych jest niezależne od aksjomatów ZFC. Sformułowana została hipoteza dotąd nie rozstrzygnięta, że istnienie takich przestrzeni implikuje negację hipotezy Suslina.

Z uwagi na fakt, że niezależność (w sensie Hamela) zbiorów liczb rzeczywistych jest niezależnością względem wszystkich charakterów ciągłych okręgu jednostkowego, Mioduszewski wspólnie z Anzelmem Iwanikiem [?] zbadali pojęcie niezależności zbiorów ze względu na podrodziny nieskończone charakterów. Okazało się, że jedynie zbiory miary zero i zbiory niemierzalne mogą być w ten sposób niezależne, a ich istnienie w przypadku zbiorów miary zero zostało uzyskane metodą Mycielskiego. W przypadku zbiorów niemierzalnych rozwiązanie zostało otrzymane przez zastosowanie procedury Bernsteina. Iwanik zastosował później metodę uogólnionych zbiorów niezależnych do konstrukcji nowych funkcji chaotycznych. Znacznie mocniejsze wyniki w tym kierunku otrzymał niedawno Sławomir Turek.

Profesor Mioduszewski ma wielu uczniów. Pod jego kierunkiem doktoraty uzyskało 12 matematyków. W kolejności chronologicznej są to: Władysław Kulpa (1973), Aleksander Błaszczyk (1974), Andrzej Szymański (1975), Anna Kucia (1976), Marian Turzański (1978), Adam Emeryk (1979),Ryszard Frankiewicz (1980), Andrzej Gutek (1981), Adam Mysior (1978),Witold Bula (1984), Wojciech Dębski (1985), Iwona Krzemińska (2001). Kilku spośród nich osiągnęło już dalsze etapy kariery naukowej: Władysław Kulpa (habilitacja 1981, tytuł profesora 1993), Aleksander Błaszczyk (habilitacja 1984, tytuł profesora 1996), Andrzej Szymański (habilitacja 1985), Ryszard Frankiewicz (habilitacja 1987, tytuł profesora 1998), Marian Turzański (habilitacja 1998).

Do grona uczniów Profesora Mioduszewskiego trzeba także zaliczyć tych matematyków, którzy wyrośli w środowisku matematycznym przez niego stworzonym i tam powstawały ich rezultaty naukowe, a uzyskali doktoraty pod kierunkiem jego uczniów. Są to: Szymon Plewik (doktorat w 1985 pod kierunkiem Władysława Kulpy, habilitacja 1997), Jan Kleszcz (doktorat 1994 pod kierunkiem Władysława Kulpy), Sławomir Turek (doktorat 1995 pod kierunkiem Aleksandra Błaszczyka), Kim Dok Yong (doktorat 1989 pod kierunkiem Aleksandra Błaszczyka), Jerzy Krzempek (doktorat 1998 pod kierunkiem Władysława Kulpy), Wiesław Kubiś (doktorat 2000 pod kierunkiem Aleksandra Błaszczyka), Andrzej Kucharski (doktorat 2000 pod kierunkiem Aleksandra Błaszczyka), Michał Machura (doktorat 2003 pod kierunkiem Szymona Plewika). Nie wszyscy uczniowie Profesora Mioduszewskiego pozostali w Katowicach. Andrzej Szymański jest od 1986 roku profesorem na Slippery Rock University of Pennsylvania (USA), Andrzej Gutek, od 1981 roku w USA, jest obecnie profesorem na Tennessy Technical University, Ryszard Frankiewicz od 1979 roku pracuje w Instytucie Matematycznym PAN, Wojciech Dębski od 1983 roku w Kanadzie, Witold Bula od 1984 w Kanadzie, obecnie na Brock University, St.Catherines, Ontario, Marian Turzański od 2000 jest profesorem na Uniwersytecie Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie. Jakkolwiek od momentu przejścia do innego ośrodka ich dorobek naukowy nie jest już liczony do osiągnięć matematyki śląskiej, to jednak pozostaje faktem, że jako matematycy zostali oni ukształtowani w ośrodku, który stworzył na Śląsku Profesor Mioduszewski.

II. Tematyka badawcza.

Tematyka badawcza w zakresie topologii uprawiana w Katowicach od początku inspirowana była zarówno przez Profesora Mioduszewskiego jak i poprzez kontakty naukowe z ośrodkami w Warszawie i Wrocławiu. Liczne były także kontakty z ośrodkami zagranicznymi realizowane głównie przez odwiedziny gości zagranicznych; wyjazdy zagraniczne katowickich matematyków były wówczas nieczęste. Bardzo wiele tych odwiedzin miało miejsce w latach 70-tych kiedy kształtowała się tematyka badawcza. W tym okresie odwiedzili Katowice między innymi następujący matematycy: Jürgen Flachsmayer, Harry Poppe, David Bellamy, Zdenek Frolik, Jan van Mill, James Dugundji, Philip Zenor, David Lutzer, Siergiej Antonian, Miroslav Husek, Zigfried Lotz. Profesor David Bellamy spędził w roku 1976 w Katowicach cały semestr. Bardzo wielu wybitnych matematyków uprawiających topologię i teorię mnogości odwiedziło Uniwersytet Śląski w drugiej połowie lat osiemdziesiątych i w latach 90-tych gdy osiągnięcia grupy topologów z Katowic były już szerzej znane w gronie specjalistów. Między innymi do Katowic przyjechali wówczas: Sabine Koppelberg (dwukrotnie), Jan van Mill (ponownie), Sakae Fuchino, David Fremlin, Alan Dow, Scott Williams, Juris Steprans, Horst Porst, Lutz Heindorf, Bohuslav Balcar, Johannes Vermeer, Peter Vojtas (dwukrotnie), Petr Simon (dwukrotnie), Jan Pelant, William Lindgren, Alexandr Shostak, Bernt Voigt, Kristopher Bandt, Hans-Christian Reichel.

Na początku lat 70-tych uczniowie Profesora Mioduszewskiego zajmowali się głównie zagadnieniami topologii ogólnej. Jednym z ważniejszych zagadnień był wóczas problem przestrzeni superzwartych zdefiniowanych przez de Groota. Jedno z najważniejszych twierdzeń w tej dziedzinie rozwiązali Andrzej Szymański i Marek Strok [?] dowodząc, że kożda przestrzeń metryczna zwarta jest superzwarta. Obszerną rozprawę na temat przestrzeni superzwartych opublikowali Andrzej Szymański i Marian Turzański [?]. Tematyka ta jest nadal żywa zarówno w Katowicach jak i w innych ośrodkach. Niedawno nowe wyniki w tej dziedzinie uzyskali Wiesław Kubiś i Andrzej Kucharski.

Kontynuowane były także badania zapoczątkowane przez Profesora Mioduszewskiego w momencie jego przybycia do Katowic. Sam Profesor te badania inspirował i w tych badaniach bardzo aktywnie uczestniczył. Między innymi były to przestrzenie H-domknięte badane przez Jerzego Mioduszewskiego oraz Aleksandra Błaszczyka i Urszulę Lorek; patrz np. [?] i [?]. Intensywnie uprawianą tematyką były także przestrzenie jednostajne, w których istotne wyniki uzyskali Władysław Kulpa [?] i Anna Kucia [?].

Pojawiały się także nowe tematy badawcze. Jednym z nich były przestrzenie z topologią wyznaczoną przez porzadek liniowy. Władysław Kulpa z Adamem Emerykiem [?] rozwiązali negatywnie problem van Douvena o istnieniu spójnej kompaktyfikacji prostej Sorgenfreya. Z kolei we wspólnej pracy Emeryka, Frankiewicza i Kulpy [?] pokazano, że prosta Sorgenfeya, która jest podprzestrzenią przestrzeni liniowo uporzadkowanej, sama nie jest topologicznie liniowo porządkowalna. Pozytywny wynik w tym kierunku uzyskał Władysław Kulpa z Miroslavem Huškiem [?]: uogólnione przestrzenie liniowo uporządkowane są obrazami przestrzeni liniowo uporządkowanych przezodwzorowania ciągłe otwarte. Wynik ten rozwiązywał problem van Wouwe'a i był wzmacniany przez innych matematyków. Nieco później do tych badań dołączył Witold Bula. W pracy wspólnej Witolda Buli z Marianem Turzańskim [?] podana została charakteryzacja ciągłych obrazów przestrzeni topologicznych liniowo uporządkowanych. Bula kontynuował także badania zapoczątkowane przez Profesora Mioduszewskiego nad przestrzeniami o skończonej liczbie niehomeomorficznych zbiorów otwartych.

Jednym z głównych nurtów szybko rozwijającej sie w latach 70-tych topologii była przestrzeń $\beta\mathbb{N}$ czyli rozszeżenie Čecha-Stone'a zbioru liczb naturalnych. Katowicka grupa topologów bardzo aktywnie uczestniczyła w tych badaniach naukowych. Istotne rezultaty w tej dziedzinie uzyskali wówczas w Katowicach między innymi: Szymański, Kucia, Frankiewicz i Błaszczyk. Bardzo ważne dla rozwoju tej dziedziny topologii okazały się rezultaty Szymańskiego o tym, że każdy punkt w $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ jest ω-punktem, patrz [?], także [?] . Duże znaczenie ma także wynik Kulpy i Szymańskiego zawarty w pracy [?] o nigdziegęstych podzbiorach przestrzeni $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Był on inspiracją dla Balcara, Simona i Vojtasa w ich badaniach nad strukturą przestrzeni $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Ważnym w teorii rozszerzenia Čecha-Stone'a okazało się postawione na Seminarium pytanie Mariana Turzańskiego, a spopularyzawane przez Szymańskiego, Frankiewicza i Comforta pytanie pyanie czy przestrzeń ω^* jest homeomorficzna z przestrzenią ω_1^*.

Istotne wyniki dotyczące przestrzeni $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ zawarte są także w pracach Anny Kuci [?] i [?] oraz we spólnych pracach Kuci i Szymańskiego [?] i [?]. Aleksander Błaszczyk wraz z Andrzejem Szymańskim znaleźli nową charakteryzację przestrzeni $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, która w szczególności daje nową metodę dowodzenia twierdzenia Parovičenki. Metodę tą później znacznie wzmocnił Ryszard Engelking. Rozważając tzw. luki Hausdorffa Błaszczyk z Szymańskim konstruowali także nową klasę punktów nienormalności w przestrzeni $\beta\mathbb{N}$; prace [?] i [?]. Przestrzeń $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ nadal jest obiektem badań w Katowicach. Ostatnio, badając tą przestrzeń w kontekście pewnych kombinatorycznych własności zbioru liczb naturalnych ciekawe wyniki w tej dziedzinie uzyskali Szymon Plewik i Michał Machura.

Przestrzeń $\beta\mathbb{N}$ jest przestrzenią Stone'a algebry Boole'a wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Stąd badania prowadzone nad przestrzenią $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ stały się dla wielu odskocznią do zajmowania się teorią mnogości. Wśród uczniów Profesora Mioduszewskiego są to: Aleksander Błaszczyk, Ryszard Frankiewicz, Szymon Plewik i Andrzej Szymański, a wśród młodszych matematyków Wiesław Kubiś, Andrzej Kucharski i Michał Machura. Wśród najważniejszych i często cytowanych wyników w tej dziedzinie trzeba wymienić rezultaty Szymańskiego [?] wiążące problem produktowalności przestrzeni ekstremalnie niespójnych z liczbami kardynalnymi mierzalnymi, a także wspomniany już wynik Błaszczyka i Szymańskiego [?] o lukach Hausdorffa. W roku 1982 Błaszczyk opublikował na Uniwersytecie Śląskim małą monografię zatytułowaną "Aspekty topologiczne algebr Boole'a", która jeszcze teraz służy jaka źródło informacji o tych ważnych strukturach mnogościowych. Od połowy lat dziewięćdziesiątych Błaszczyk zajmuje sie także własnościami topologicznymi obiektów występujących w teorii forsingu. We wspólnej pracy z Saharonem Shelahem [?], a następnie w pacy wspólnej z Andrzejem Szymańskim [?] badał algebry Boole'a zupełne, które są sumami przeliczalnie wielu ultrafiltrów, a nie zawierają w sposób regularny algebry bezatomowej przeliczalnej. W pracy wspólnej z Shelahem Błaszczyk pokazał, że istnienie takich algebr jest równoważne z pewnym warunkiem kombinatorycznym (dotyczącym podzbiorów zbioru liczb naturalnych) zależnym od aksjomatów teorii mnogości. W ostatnich trzech latach bardzo interesujące wyniki w dziedzinie teorii mnogości uzyskał także Wiesław Kubiś. Na szczególną uwagę zasługuje jego praca z Saharonem Shelahem [?] o partycjach zbioru $[X]^n$, gdzie X jest zbiorem analitycznym. Duże uznanie zyskały także jego prace na temat wypukłości, która jest dziedziną leżącą na pograniczu topologii, geometrii i teorii mnoości; patrz ,[?],[?],[?],[?].

Wspólnie z matematykiem praskim Balcarem Błaszczyk rozwiązał problem van Douvena pokazując, że jeśli na przestrzeni zwartej działa grupa liczb całkowitych w sposób minimalny, to algebra Boole'a zbiorów regularnie otwartych tej przestrzeni jest izomorficzna z algebrą Cohena mocy continuum; [?]. Ten wynik dał kolejny impuls dla badania mnogosciowych zagadnień topologii dynamicznej zapoczątkowanych już wczesniej pracami Andrzeja Gutka [?] i Jana Kleszcza [?] na temat orbit homeomorfizmów działających na zbiorze Cantora. Najsilniejsze wyniki w tej dziedzinie uzyskał Sławomir Turek [?] wykazując między innymi, że każda abelowa grupa przeliczalna działa w sposób minimalny na kostce Cantora wagi continuum.

Jedną z cech charakterystycznych dorobku naukowego katowickich matematyków jest szerokie wykorzystywanie metody granic odwrotnych. Została ona wprowadzona do arsenału środków dowodowych przez Profesora Mioduszewskiego, który jak to wcześniej zostało wspomniane wykorzystał granice odwrotne do opisu kontinuów łańcuchowych (patrz [?], [?], [?]). Metoda ta została przejęta przez jego uczniów także do konstrukcji i opisu przestrzeni topologicznych zwartych. Wymienić tu można prace Błaszczyka, Kubisia, Kucharskiego, Kulpy, Szymańskiego, Turka; patrz [?], [?], [?], [?]......

Systemy dynamiczne pojawiły sie także w kontekście badań pewnych zagadnień kombinatorycznych z kręgu teorii Ramseya. We wspólnej pracy Aleksander Błaszczyk, Szymon Plewik i Sławomir Turek [?] podali, wzmacniając wynik B.Weissa, topologiczną wersję twierdzenia van der Waerdena o postępach arytmetycznych, z której ono (a także pewne jego uogólnienia) bezpośrednio wynika. Wykorzystano przy tym własności przestrzeni $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, co zostało później podjęte przez innych badaczy. Pokrewne zagadnienia, a dotyczące twierdzenia Halesa-Jaweta bada także Jan Kleszcz. Nieco inny rodzaj zagadnień kombinatorycznych pojawił się w pracy Aleksandra Błaszczyka i Kim Dok Yonga [?]. Przeniesiono tam na grunt topologii znane twierdzenie Erdösa i de Bruijna o tzw. zbiorach wolnych dla funkcji bez punktów stałych uzyskując jako wniosek równie znane twierdzenie Frolika o tym, że zbiór punktów stałych homeomorfizmu przestrzeni zwartej ekstremalnie niespójnej jest domknieto-otwarty. Wynik Błaszczyka i Kima został później wzmacniany i uogólniany w różnuch kierunkach przez Krawczyka i Stepransa oraz Aartsa, van Milla i Vermeera, a także innych.

Inny nieco typ zagadnień kombinatorycznych bada Szymon Plewik i Michał Machura[?]. Plewik [?] wskazał między innymi na związek między addytywnością ideału zbiorów nigdziegęstych w topologii Ellentucka, a wysokością matrycy bazowej w przestrzeni $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Z kolei w pracy [?] posługując się metodami kombinatorycznymi na zbiorze podzbiorów zbioru wszystkich liczb naturalnych wzmocnił kilka rezultatów na temat zbiorów uniwersalnie miary zero. Prace Plewika są często cytowane, a w szczególności autorzy książek Rosłanowski i Shelah oraz Bartoszyński i Judah szczegółowo omawiają jego wyniki. Kombinatoryka uogólnionej kostki Cantora jest kolejnym nurtem uprawianym w Katowicach. Do głównego nurtu badań w tej dziedzinie należą twierdzenia Mariana Turzańskiego o przestrzeniach diadycznych, i o silnych ciągach; patrz [?], [?], [?], [?]. W szczególności otrzymane zostały znane w teorii przestrzeni diadycznych twierdzenia Marczewskiego, Szanina, Jesienina-Volpina, a także słynne twierdzenia kombinatoryczne Erdösa-Rado; patrz wspólna praca Kulpy, Plewika i Turzańkiego [?]. Leżące także w tym kręgu zagadnień wyniki o zbiorach niezależnych w algebrach Boole'a uzyskali niedawno Błaszczyk i Kucharski [?].

Badaniem odwzorowań skończonej krotności zajmuje się także Jerzy Krzempek, który w pracy [?] udowodnił, że każde domknięte odwzorowanie ciągłe krotności nie większej niż k określone na n-wymiarowej przestrzeni metrycznej jest złożeniem $(n+1)k-1$ domkniętych odwzorowań prostych. Podał także przykład domknięto-otwartego odwzorowania ciągłego krotności nie większej niż 3 określonego na kostce Cantora nieprzeliczalnej wagi, które nie jest złożeniem skończenie wielu odwzorowań prostych. Zatem twierdzenia cytowanego wyżej nie można przenieść na przestrzenie niemetryczne.

W innej pracy [?] Krzempek podał dla każdego $n > 1$ konstrukcję ściśle n-krotnego nakrycia pomiędzy skończonymi grafami spójnymi, które nie jest złożeniem nakryć mniejszej krotności. Odwzorowania te odpowiadają również na pytania Borsuka i Molskiego, Baildona i Heath. Scharakteryzował także nierozkładalne nakrycia w terminach grupy podstawowej.

Obok teorii mnogości i nurtu mnogościowego w topologii ogólnej uprawiana jest w Katowicach także topologia geometryczna. Obok Profesora Mioduszewskiego tematykę tą uprawianał także Władysław Kulpa, Marian Turzański, Wojciech Dębski i Jerzy Krzempek. Wspólne wyniki Profesora Mioduszewskiego z jego współpracownikami

omawialiśmy już w pierwszej części tego opracowanaia. Dodajmy jeszcze, że bardzo interesujące wyniki na temat kontinuów nierozkładalnych uzyskał Adam Emeryk w pracach [?], [?], [?], a także we wspólnej pracy z Andrzejem Szymańskim [?]. Z kolei Wojciech Dębski w pracach [?], [?], [?] badał kompozanty komntinuów nierozkładalnych. W szczególności w pracy [?] rozwiązał problem Cooka. W pracy wspólnej z E. D. Tymchatynem [?] dowodzi, że każdy homeomorfizm regularny między dwoma kompozantami bez punktów końcowych leżącymi w kontinuach Knastera jest zacieśnieniem pewnego homeomorfizmu tych kontinuów. To jednak nie wyczerpuje całości dorobku ośrodka śląskiego w tej dziedzinie. W szczególności Władysław Kulpa i Marian Turzański zajmowali się zagadnieniami przestrzeni euklidesowych zwiazanymi z twierdzeniem Brouwera o punkcie stałym, patrz [?], [?], [?] [?], [?], [?].

Literatura

[1] B. Balcar, A. Błaszczyk, *On minimal dynamical systems on Boolean algebras*, Comment. Math. Univ. Carolinae **31** (1990), 7–11.

[2] A. Bella, A. Błaszczyk, A. Szymański, *On absolute retracts of* ω^*, Fund. Math. **145** (1994), 1–13.

[3] A. Bella, A. Błaszczyk, A. Kucharski, *Extension of Vladimirov's lemma*, Topology and its Applications (w druku).

[4] A. Błaszczyk, J. Mioduszewski, *On factorizations of maps through* τX, Colloq. Math. **23** (1971), 45–52.

[5] A. Błaszczyk, *A factorization theorem and its application to extremally disconnected resolution*, Colloq. Math. **28** (1973), 33–40.

[6] A. Błaszczyk, *Extremally disconnected resolution* T_0*-spaces*, Colloq. Math. **32** (1975), 57–68.

[7] A. Błaszczyk, *Souslin number and inverse limits*, Proceedings of the Conference "Topology and measure III", Greifswald (1982), 21-26

[8] A. Błaszczyk, *A construction of a rigid Boolean algebra*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences bf 35, (1987), 465-471

[9] A. Błaszczyk, U. Lorek, *A classification of H-closed extensions*, Colloq. Math. **39** (1978), 29–33.

[10] A. Błaszczyk, A. Szymański, *Concerning Parovičenko's Theorem*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **28** (1980), 311–314.

[11] A. Błaszczyk, A. Szymański, *Hausdorff's gaps versus normality*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **30** (1982), 371–378.

[12] A. Błaszczyk, Kim Dok Yong, *A topological version of a combinatorial theorem of Katětov*, Comment. Math. Univ. Carolinae **29** (1988), 657–663.

[13] A. Błaszczyk, Sz. Plewik, S. Turek, *Topological multidimensional van der Waerden theorem*, Comment. Math. Univ. Carolinae **30** (1990), 783–787

[14] A. Błaszczyk, A. Szymański, *Cohen algebras and nowhere dense ultrafilters*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **49** (2001), 15–25.

[15] A. Błaszczyk, S. Shelah, *Regular subalgebras of complete Boolean algebras*, The Journal of Symbolic Logic **66** (2001), 795–800.

[16] W. Bula , M. Turzański, *A characterization of continuous images of compact ordered spaces and the Hahn-Mazurkiewich problem* Topology Appl. **22** (1986), 7-17,

[17] W. Dębski, J. Mioduszewski, *Simple plane images of the Sierpiński triangular curve are nowhere dense* Colloq. Math. **59** (1990), 125–140.

[18] W. Dębski, J. Mioduszewski, *Conditions which ensure that a simple map does not raise dimension*, Colloq. Math. **63** (1992), 173–185.

[19] W. Dębski, J. Heath, J. Mioduszewski, *Exactly two-to-one maps from continua onto some tree-like continua*, Fund. Math. **141** (1992), 269–276.

[20] W. Dębski, J. Mioduszewski, *Multiplicites of Peano maps: on less known theorem by Hurewicz*, Ann. Math. Sil. **9** (1995), 11–15.

[21] W. Dębski, J. Heath, J. Mioduszewski, *Exactly two-to-one maps from continua onto arc-continua*, Fund. Math. **150** (1996), 113–126.

[22] W. Dębski, E. D. Tymchatyn *Composant-like decompositions of spaces*, Fund. Math. **140** (1991), 69–78.

[23] W. Dębski, *Note on a problem of H. Cook*, Huston J. Math. **17** (1991), 439–441.

[24] W. Dębski, E. D. Tymchatyn, *Homeomorphisms of composants in Knaster continua*, Topology. Proc. **12** (1987), 239–256.

[25] A. Emeryk, *Partitions of indecomposable continua into composants*, Proceedings of the International Conference on Geometric Topology (Warsaw 1978), 137-140

[26] A. Emeryk, *A hereditarily indecomposable non-metric Hausdorff continuum*, Fundamenta Mathematicae **92** (1976), 63-64

[27] A. Emeryk, *An atomic map onto an arbitrary metric continuum*, Fundamenta Mathematicae **77** (1972), 145-149

[28] A. Emeryk, W. Kulpa, *The Sorgenfrey line has no connected compactifications*, Comment. Math. Univ. Carolinae **18** (1977), 483–487.

[29] A. Emeryk, A. Szymański, *Continua with a connected set of points of indecomposability*,

Colloq. Math. **37** (1977), 185-193

[30] A. Emeryk, R. Frankiewicz, W. Kulpa, *Orderability of GO-spaces*, Topological Structures II, Mathematical Centre Tracts **115** (1979), 73-78,

[31] A. Gutek, *On biconnected spaces with dispersion points*, Commentationes Math. **21**, (1980), 63-70

[32] A. Gutek, Jan van Mill *Continua that are locally a boundle of arcs*, Topology Proc., bf 7 (1982), 63-69

[33] M. Hušek, W. Kulpa, *Open images of orderable spaces*, PAMS **88** (1983), 711–717

[34] A. Iwanik, J. Mioduszewski, *Independence with respect to a families of characters*, Colloq. Math. **56** (1988), 383–392.

[35] J. Kleszcz, *Orbits of homeomorphismes and independent sets*, Topology Appl. **40** (1991), 11-16,

[36] J. Kleszcz, *Extensions to maps on the Cantor set with dense orbits*, Topology Appl. **37** (1990), 201-211,

[37] J. Krzempek *Compositins of maps*, Fund. Math. **162** (1999), 149-162,

[38] J. Krzempek *Coverings maps that are not compositions of covering maps of lesser order*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 1867-1873,

[39] W. Kubiś, M. Kojman, R Schipperus *Convex decompositions in the plane and continuous pair colorings of the irrationals*, Israel J.Math.

[40] W. Kubiś, *Separation properties of convexity spaces*, J.Geom.

[41] W. Kubiś, *Extension theorems in axiomatic theory of convexity* Bull. Polish Acad. Sci. Math. **48** (2000), 89-96

[42] W. Kubiś, *Extension criterion for continuous convexity preserving maps*, Tatra Mt. Math. Publ. bf19, (2000), 167-175

[43] W. Kubiś, A. Kucharski, *Convexity structures in zero-dimensional compact spaces* Math. Pann. **12** (2001), 177–183.

[44] W. Kubiś, S. Shelah, *Analytic colorings*, Annals of Pure and Applied Logic **121** (2003), 147–161.

[45] A. Kucia, *On $P(m)$-ultrafilters on N*, Colloq. Math. **39** (1978), 233–242.

[46] A. Kucia, *On saturating ultrafilters on N*, Colloq. Math. **37** (1977), 23–27.

[47] A. Kucia, A, Szymanski, *There are absolute ultrafilters on N which are not minimal*, Colloq. Math. **37** (1977), 29–34.

[48] A. Kucia, A. Szymański, *Absolute points in $\beta N\backslash N$*, Czechoslovak Math. J. **26(101)** (1976), 381–387.

[49] A. Kucia, *On coverings of a uniformity*, Colloq. Math. **27** (1973), 73–74.

[50] W. Kulpa, Sz. Plewik and M. Turzański, *Applications of Bolzano-Weierstrass method*, Topology Proceedings **22** (1977), 237–245.

[51] W. Kulpa, *Factorization theorems and properties of the covering type*, Uniwersytet Slaski, Katowice 1980

[52] W. Kulpa, *On extensions of the domain invariance theorem*, Topology and its Applications **130** (2003), 253-258

[53] W. Kulpa, *Poincare and domain invariance theorem*, Acta Univ. Carol. Math. Phys. **32** (1988), 127-136

[54] W. Kulpa, *The Poincare-Miranda theorem*, Amer. Math.Monthly **104** (1997), 545-550

[55] W. Kulpa, *Intersection properties of Helly families*, Topology and its Applications **116**(2001), 227-233

[56] W. Kulpa, L. Socha, M. Turzański, *Parametric extension of the Poincaré theorem*, Acta. Univ. Carolin.Math. Phys. **41** (2000), 39-46,

[57] W. Kulpa, A. Szymański, *Decompositions into nowhere dense sets*, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Ser. Math. bf 25 (1977), 37-41

[58] M. Machura, Sz. Plewik, *Applications of base tree theorem*, Acta Univ. Carol., Math.Phys. **41** (2000), 61–68.

[59] J. Mioduszewski, *On k-to-one continuous functions on the closed interval and the stright line*, Prace Mat. **5** (1961), 79–93.

[60] J. Mioduszewski, *On two-to-one contiuous functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **9** (1961), 129–132.

[61] J. Mioduszewski, *On two-to-one continuous functions*, Rozprawy Mat. **24** (1961).

[62] J. Mioduszewski, *On two-to-one functions*, 1962 General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proc. Sympos., Prague, 1961), 272–274.

[63] J. Mioduszewski, *On the domains of indetermination of analitic functions*, Annales Polonici Mathematici **8** (1960), 135–140.

[64] J. Mioduszewski, *On a quasi-ordering in the class of continuous mappings of a closed interval on itself*, Colloq. Math. **9** (1962), 233–240.

[65] J. Mioduszewski, *A functional conception of snake-like continua*, Fund. Math. **51** (1962/1963), 179–189.

[66] J. Mioduszewski, *Mappings of inverse limits*, Colloq. Math. **10** (1963), 39-44.

[67] J. Mioduszewski, *Everywhere oscillating functions, extension of uniformization and homogeneity of the pseudo-arc*, Fund. Math. **56** (1964), 131–155.

[68] J. Mioduszewski, L. Rudolf, *H-closed and extremally disconnected Hausdorff spaces*, Disseratationes Math. Rozprawy Mat. **66** 1969.

[69] J. Mioduszewski, *Compact Hausdorff spaces with two open sets*, Colloq. Math. **39** (1978), 35–40.

[70] J. Mioduszewski, *On composants of $\beta R \setminus R$*, Proceedings of the Conference on Topology and Measure, I (Zinnowitz, 1974), Part 2, 257–283, Ernst-Moritz-Arndt Univ., Greifswald, 1978.

[71] J. Mioduszewski, *An approach to $\beta R \setminus R$*, Topology, Vol. II (Proc. Fourth Colloq., Budapest, 1978), 853–854, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **23** North-Holland, Amsterdam-New York, 1980.

[72] Sz. Plewik, *On completely Ramsey sets*, Fund. Math. **127** (1987), 127–132.

[73] Sz. Plewik, *Towers are universally measure zero and always of first category*, Proceedinds of the American Math. Soc., **119** (1993), 865-868

[74] Sz. Plewik, *Ideals of nowhere Ramsey sets are isomorphic*, J.Symbolic logic **59**, (1994), 662-667,

[75] Sz. Plewik, *On some problems of A. Rosłanowski*, Colloq.Math. **69**, (1995), 197-298,

[76] Sz. Plewik, *Ideal of the second category*, Fund. Math. **138**, 23-26

[77] M. Strok, A. Szymański, *Compact metric spaces have binary bases*, Fund. Math. **89** (1975), 81–91.

[78] A. Szymański, M. Turzański, *A characterization of cubes and spheres*, Dissertationes Math. (1976).

[79] A. Szymański, *Products and measurable cardinals*, Rend. Circ. Math. Palermo (2), Suppl. No. 11 (1985), 105–112

[80] A. Szymański, *On the existence of P_κ-points*, Proceedings of the American Mathematical Society **66** (1977), 128-133

[81] A. Szymański, *The existence of P_κ-points in $\mathbb{N}^*$ for $0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$*, Colloquium Mathematicum **37** (1977), 180-184

[82] S. Turek *A note on universal minimal dynamical systems* Comment. Math. Univ. Carolin. **32** (1991), 781–783.

[83] S. Turek *Minimal dynamical system for ω-bounded groups* Acta Univ. Carolin. Math. Phys. **35** (1994), 77–81.

[84] S. Turek, *Phase spaces of distal minimal flows* Acta Math. Hungar. **88** (2000), 185–191.

[85] S. Turek, *Minimal actions on Cantor cubes*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **51** (2003), 130–138.

[86] M. Turzański, *Equilibrium theorem as the consequence of the Steinhaus chessboard theorem*, Topology Proc. **25**, (2000), 645-653,

[87] M. Turzański, *Cantor cube: chain conditions*, Uniwersytet Śląski, Katowice, 1996

[88] M. Turzański, *Strong sequences and the weight of regular spaces*, Comment. Math.Univ.Carolinae **33**, (1992), 557-561.

[89] M. Turzański, *On generalizations of dyadic spaces*, Acta Univ. Carolin. Math.Phys. **30** (1989), 153-159,

[90] M. Turzański, *On thick spaces*, Colloq. Math. **34** (1975/76), 231-233.