OMÓWIENIE WYNIKÓW PRACY BADAWCZEJ UCZESTNIKÓW SEMINARIUM Z FUNKCJI UOGÓLNIONYCH I TEORII ZBIEŻNOŚCI PRZY ODDZIALE IM PAN W KATOWICACH.

Piotr Antosik, Krystyna Skórnik

1. Krótka historia Oddziału. W 1960 roku prof. Jan Mikusiński przeniósł się z Warszawy do Katowic. Jego przyjście do Katowic zostało przyjęte z wielkim zadowoleniem przez tutejsze środowisko matematyczne. Był pierwszym o światowej sławie matematykiem mieszkającym na Górnym Śląsku. Od początku swego pobytu włączył się w działalność matematyczną: wygłaszał odczyty na zebraniach PTM; prowadził seminarium w Wyższej Szkole Pedagogicznej; organizował spotkania w swoim domu w Piotrowicach. Wielokrotnie spontaniczne jego kontakty z miejscowym środowiskiem matematycznym służyły konsolidacji tego środowiska i dały impuls do powołania w Katowicach w 1966 roku Oddziału Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk.

2. Ogólne informacje.

Pracownikami etatowymi oddziału byli:

Jan Mikusiński, Piotr Antosik, Wilhelmina Smajdor, Marek Kuczma, Władysław Kierat, Krystyna Skórnik, Piotr Hallala, Zygmunt Tyc, Alicja Lewandowska, Andrzej Kamiński, Piotr Urss, Piotr Mikusiński, Józef Burzyk, Jan Pochciał, Bohdan Aniszczyk, Czesław Kliś, Jacek Uryga, Cezary Ferenic, Zbigniew Sadlok, Ryszard Rudnicki, Krzysztof Łoskot. Sprawami administracyjnymi zajmowały się: Stefania Krasińska, Joanna Jalita, Grażyna Kuc–Mikusińska, Barbara Smołka.

W Oddziale IM PAN w Katowicach było prowadzone jedno seminarium pod nazwą *Funkcje uogólnione i Teoria Zbieżności.* Miejscem seminarium była ul. Wieczorka 8 w Katowicach. Kierownikami seminarium byli: prof. Jan Mikusiński od 1966 do 1985 roku; doc. dr hab. Piotr Antosik od 1985 do 1994 roku; doc. dr hab. Andrzej Kamiński od 1988 do 1991 roku w zastępstwie P. Antosik; doc. dr hab. Ryszard Rudnicki od 1994 roku i nadal.

Problematyka badawcza była ściśle związana z zainteresowaniami prof. J. Mikusińskiego. Należały do niej: rachunek operatorowy; ciągowa teoria dystrybucji; teoria zboeżności; metoda twierdzenia o przekątnej; teoria całki Bochnera i Lebesgue'a.

Uczestnicy seminarium opublikowali za okres od 1966 roku nowych 11 opracowań książkowych. W tym czasie ukazało się również 9 zagranicznych wznowień wcześniej wydanych książek. Poza tym opublikowali łącznie ponad 300 prac.

Uczestnicy seminarium mieli liczne kontrakty naukowe z wieloma instytucjami matematycznymi na całym świecie. W szczególności w: Argentynie, Turcji, USA, ZSRR, Jugosławii, Niemczech, Czechosłowacji, Bułgarii. Wielu przedstawicieli tych krajów wizytowało Oddział IM PAN w Katowicach. Wielu członków seminarium było krótko i długo terminowymi pracownikami lub stażystami w uniwersytetach w Argentynie, Turcji, USA, ZSRR.

Osobliwością seminarium były tzw. seminaria górskie. Były to w większości tygodniowe wyjazdy członków seminarium do górskich miejscowości. Średnio rocznie miały miejsce dwa takie seminaria z uczestnikami matematyków zagranicznych. W 1966 roku została zorganizowana, po Kongresie Moskiewskim, międzynarodowa konferencja z teorii dystrybucji. Zapoczątkowała ona długą i owocną serię międzynarodowych konferencji – organizowanych w różnych krajach – które stały się forum wymiany osiągnięć we wspomnianych dziedzinach.

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

3. Promocje naukowe.

1. Prof. Jan Mikusiński został wybrany członkiem korespondencyjnym PAN w 1965 zaś w 1971 roku na rzeczywistego członka Polskiej Akademii Nauk; w 1975 roku przyznano prof. Mikusińskiemu honorowe członkowstwo Serbskiej Akademii Nauk i Sztuki; w 1970 roku nadano profesorowi Mikusińskiemu tytuł honorowego doktora Uniwersytetu w Rostoku.
2. Pior Antosik doktoryzował się na UMCS w 1964 r. Promotorem był prof. Jan Mikusiński. Stopnień doktora habilitowanego otrzymał w IM PAN w Warszawie w 1973 roku. Tytuł profesora nadzwyczajnego został mu nadany uchwałą Rady Państwa z dnia 15 września 1988 roku.
3. Andrzej Kamiński doktoryzował się w IM PAN w 1975 roku. Promotorem był prof. Jan Mikusiński. Temat pracy: *Całkowanie i operacje nieregularne.* Stopień doktora habilitowanego otrzymał w IM PAN w 1989 roku. Tytuł profesora został mu nadany uchwałą Rady Państwa w 1994 roku.
4. Krystyna Skórnik doktoryzowała się na UŚl. w 1971 roku. Promotorem był prof. Jan Mikusiński. Temat pracy: *Dystrybucja periodyczna zredukowana*, [S3].
5. Władysław Kierat doktoryzował się W IM PAN w roku 1968. Promotorem był prof. Jan Mikusiński.
6. Józef Burzyk doktoryzował sie w IM PAN w 1981 r. Promotorem był doc. dr hab. Piotr Antosik.
7. Czesław Kliś doktoryzował się w IM PAN w 1981 r. Promotorem był doc. dr hab. Piotr Antosik.
8. Piotr Mikusiński doktoryzował się w IM PAN w 1983 r. Promotorem był doc. dr hab. Piotr Antosik.
9. Jan Pochciał doktoryzował się w IM PAN w 1984 r. Promotorem był prof. Jan Mikusiński. Temat pracy *O przestrzeniach ze zbieżnością.*
10. Jacek Uryga dotoryzował się w IM PAN w 1989 r. Promotorem był doc. dr hab. Andrzej Kamiński. Temat pracy: *Operacje w przestrzeniach funkcji uogólnionych typu Gelfanda-Szyłowa.*
11. Roman Wituła doktoryzował się na UŚl. w 1997 r. Promotorem był doc. dr hab. Andrzej Kamiński. Temat pracy: *O zbieżnych i rozbieżnych permutacjach.*

4. Rachunek operatorów Mikusińskiego.

Historia rachunku operatorowego sięga końca XIX wieku i wiąże się z pracami angielskiego inżyniera Oliviera Heaviside'a, który stosował metody operatorowe w elektrotechnice nie troszcząc się o ich matematyczny sens. Częściowe wytłumaczenie jego postępowania uzyskano później na gruncie tranmsformaty Laplace'a, która jednak nakładała ograniczenia na wzrost funkcji w nieskończoności. Dopiero algebraiczna teoria, stworzona przez Jana Mikusińskiego, przyniosła pełne matematyczne uzasadnienie tych metod, nawiązujące bezpośrednio do rachunków Heaviside'a.

Teoria ta miała swe początki w czasach drugiej wojny światowej, kiedy to na tajnych seminariach prof. Ważewskiego w Krakowie jej autor prezentował swoje idee, spisane następnie w książeczce *Hyperliczby* wydanej przez niego własnym sumptem, przy użyciu klisz rentgenowskich, w niezwyczajnym nakładzie siedmiu egzemplarzy, rozprowadzonych między uczestników seminarium.

Natomiast prezentacja rozwiniętej teorii nastąpiła w książce profesora Mikusińskiego *Rachunek operatorów* [I]. Książka ta, wydana po raz pierwszy w Polsce w 1953 r., miała wśród książek polskich matematyków rekordową liczbę wydań w kraju i za granicą. Od tego czasu ukazało się wiele publikacji dotyczących rachunku operatorów i jego zastosowań. Tematyką tą zajmowali się, między innymi: P. Antosik, L. Berg, A. Bleyer, T.K. Boehme, R. Bittner, J. Bunyk, J.M. Dimovski, V.A. Ditkin, A. Erdejyi, E. Gesztelyi, H.–J. Glaeska, L. Korevaar, G.L. Krabbe, W. Kierat, A.P. Prudnikov, D. Przeworska–Rolewicz, Cz. Ryll–Nardzewski, K. Skórnik, W. Słowikowski, R. Struble, A. Száz, J. Wloka, K. Yosida.

Impulsem do stworzenia teorii operatorów była dla prof. Mikusińskiego chęć znalezienia prostych metod rozwiązywania równań różniczkowych. Podstawowym faktem, na którym ta teoria została oparta, jest twierdzenie Titchmarsha dotyczące splotu funkcji ciągłych f, g na półprostej dodatniej definiowanego wzorem:

$$(f \cdot g)(t) = \int_0^1 f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Przestrzeń $\mathcal{C}$ funkcji ciągłych na półprostej $[0, \infty)$ ze zwykłym działaniem dodawania i z mnożeniem w sensie określonego wyżej splotu jest pierścieniem algebraicznym, a twierdzenie Titchmarsha mówi, że jest to pierścień bez dzielników zera, tzn. $f \cdot g = 0$ implikuje, że $f = 0$ lub $g = 0$.

Twierdzenie Titchmarsha pozwala na określenie ciała ułamków elementów pierścienia $\mathcal{C}$, nazywanego obecnie *ciałem operatorów Mikusińskiego*, $\mathfrak{M}$. . Ciało to zawiera funkcje ciągłe f na $[0,\infty)$, bo mogą być one reprezentowane przez ułamki fg/g, gdzie g jest dowolną niezerową funkcją ciągłą na $[0,\infty)$. Zawiera także wszystkie elementy α wyjściowego ciała liczbowego, które można identyfikować z ułamkami postaci $\{\alpha\}/\{1\}$, gdzie $\{f(t)\}$ oznacza funkcję o wartości $f(t)$ w punkcie t, a więc $\{\alpha\}$ i $\{1\}$ są funkcjami stałymi równymi odpowiednio α i 1 na $[0,\infty)$.

Funkcja $l = \{1\}$ może być interpretowana jako operator całkowania, ponieważ

$$l\{f(t)\} = \left\{ \int_0^t f(\tau)d\tau \right\}.$$

Z drugiej strony operator $s = 1/l$ pełni rolę operatora różniczkowania, bowiem dla dowolnej funkcji $x = \{x(t)\}$ o ciągłej pochodnej $x' = \{x'(t)\}$ na $[0,\infty)$ zachodzi

$$sx = x' + x(0).$$

Ostatni wzór łatwo przenosi się na przypadek funkcji z klasy $\mathcal{C}^\infty$ na $[0,\infty)$:

$$s^n x = x^{(n)} + x^{(n-1)}(0) + sx^{(n-2)}(0) + \ldots + s^{n-1}x(0). \tag{1}$$

Powyższa zależność umożliwia rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach oparte na czysto algebraicznych rachunkach.

Równie prosto można sprawdzić rozwiązanie układu równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach do rozwiązania układu równań algebraicznych.

Rachunek operatorów Mikusińskiego można również stosować do rozwiązania problemu Cauchy'ego dla równań cząstkowych dwóch zmiennych o stałych współczynnikach w $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. W tym przypadku różniczkowe równanie cząstkowe zastępujemy równaniem

$$a_n x^{(n)}(\lambda) + a_{n-1}x^{(n-1)}(\lambda) + \ldots + a_o x'(\lambda) = f(\lambda), \tag{2}$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{C}$(lub $\lambda \in \mathbb{R}$), $a_k = p_k(s), p_k(k = 0, 1, ..., n)$ są wielomianami o współczynnikach zespolonych. Rozwiązaniami są funkcje $x(\cdot)$) określone na $\mathbb{C}$ (lub $\mathbb{R}$) i przyjmujące wartości w ciele $\mathfrak{M}$. Teoria równania (2) jest teorią równań różniczkowych o stałych współczynnikach nad ciałem $\mathfrak{M}$. Ta teoria różni się w istotny sposób od teorii równań różniczkowych o stałych współczynnikach nad ciałem $\mathbb{C}$ (lub $\mathbb{R}$).

W tym celu rozwiązania równania jednorodnego

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_o x' = 0 \tag{3}$$

szukamy w postaci funkcji wykładniczej $x = e^{\lambda\omega}$ ([I], str. 254), gdzie ω jest pierwiastkiem równania charakterystycznego

$$a_n\omega^n + a_{n-1}\omega^{n-1} + \ldots + a_0 = 0. \tag{4}$$

Ogólnie rozwiązanie równania (3) jest postaci

$$x(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda\omega_k}, \tag{5}$$

gdzie c_k są stałymi, ω_k $(k = 1, \dots, n)$ pierwiastkami równania (4) ([6], str. 259). Może się zdarzyć, że funkcja $e^{\lambda\omega_k}$ nie istnieje, gdyż przy pewnych operatorach ω_k jedynym rozwiązaniem równania różniczkowego $x' = \omega_k x$ jest funkcja identycznie równa zeru; wskutek tego warunek dodatkowy $x(0) = 1$, który ma spełniać każda funkcja wykładnicza, nie może być spełniony ([I], str. 255, [13], str. 217). Jeżeli istnieje funkcja wykładnicza $e^{\lambda\omega_k}$, to operator ω_k nazywa się logarytmem. Rozwiązanie ogólne (5) równania (3) zawiera tyle stałych dowolnych, ile wynosi liczba pierwiastków logarytmów równania charakterystycznego.

W praktyce stosujemy tę metodę do rozwiązania równań ciepła, struny, telegrafistów.

Motodą rachunku operatorów znajduje się rozwiązania równań różniczkowych w całej ogólności, podczas gdy przy użyciu transformaty Laplace'a rozwiązania znajduje się w klasie funkcji spełniających pewne ograniczenia na wzrost w nieskończoności.

W przypadku, gdy $a_n = 1$, a pozostałe współczynniki a_i są funkcjami ciągłymi określonymi na przedziale (α, β), to z klasycznej teorii równań różniczkowych wiemy, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie z równania (3) spełniające warunki początkowe

$$x(t_0) = x_0, \quad x^{(1)}(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \quad t_0 \in (\alpha, \beta), \quad x_i \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Profesor Mikusiński zauważył, że analogiczne twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych jest prawdziwe, gdy funkcje rzeczywiste zastąpimy funkcjami o wartościach z pierścienia całkowitego i odpowiednio określimy operację różniczkowania tych funkcji. Mianowicie, niech $\mathcal{R}$ będzie pierścieniem całkowitym oraz niech zbiór $\mathcal{A}^*$ wszystkich funkcji $x : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$ ze względu na zwykłe działanie dodawania i mnożenia funkcji jest pierścieniem przemiennym. Dla każdego $\mu \in \mathbb{R}$ określamy operację τ_μ na funkcjach $x \in \mathcal{A}^*$ przyjmując

$$(\tau_\mu x)(\lambda) = x(\mu - \lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Niech $\mathcal{A}$ będzie pewnym podpierścieniem pierścienia $\mathcal{A}^*$ niezmienniczym ze względu na operację $\tau_\mu, \mu \in \mathbb{R}$. Na pierścieniu $\mathcal{A}$ określamy operację $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mającą następujące własności:

1^o $\quad D(x + y) = Dx + Dy, \quad D(xy) = (Dx)y + x(Dy)$;
2^o $\quad D(\tau_\mu x) = -\tau_\mu(Dx), \quad \mu \in \mathbb{R}$;
3^o $\quad Dx = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest funkcją stałą.

Prawdziwe są następujące twierdzenia

Twierdzenie 1. ([M1]). *Jeżeli operacja D ma własności 1^o–3^o, to równanie (3), gdzie $a_i \in \mathcal{R}$ $(a_n = 1)$, ma w algebrze $\mathcal{A}$ co najwyżej jedno rozwiązanie spełniające warunki początkowe (6).*

Twierdzenie 2. ([M2]). *Jeżeli $\mathcal{A}$ jest pierścieniem całkowitym i D jest operacją różniczkowania tego pierścienia spełniającą warunek 1^o i warunek*

$$(Dx)y - x(Dy) = 0 \Rightarrow x, y \text{ są liniowo zależne nad } \mathcal{A}_0, \tag{α}$$

to równanie (3) o współczynnikach z $\mathcal{A}$ $(a_n = 1)$ ma co najwyżej n rozwiązań liniowo niezależnych nad $\mathcal{A}$, gdzie $\mathcal{A}_0$ oznacza zbiór elementów $x \in \mathcal{A}$ takich, że $Dc = 0$.

Profesor Mikusiński zdefiniował pochodną algebraiczną w ciele operatorów (abstrakcyjny odpowiednik operacji różniczkowania operatorów) w następujący sposób (zob. [M4]):

$$Df = D\{f(t)\} = \{-tf(t)\} \qquad \text{dla} \quad f \in \mathcal{C},$$

$$D\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{(Dp)q - p(Dq)}{q^2}\right) \qquad \text{dla} \quad p, q \in \mathcal{C},\ q \neq 0.$$

W pracy [AKS] rozważane są różne koncepcje pochodnej, między innymi pochodna algebraiczna. Korzystając z ogólnych własności operatorów Mikusińskiego pokazano, że w ciele Mikusińskiego $\mathfrak{M}$, z tak zdefiniowaną pochodną algebraiczną spełniony jest warunek (α) oraz udowodniono

Twierdzenie 3. ([AKS]). *Zbiór wszystkich rozwiązań równania (3) w* $\mathfrak{M}$ *(*$a_i \in \mathfrak{M}$*,* $a_n = 1$*) jest co najwyżej* n*–wymiarową przestrzenią nad* $\mathbb{C}$*.*

Praca P. Antosika, W. Kierata i K. Skórnik ([AKS]) zawiera nowe zastosowanie rachunku operatorów Mikusińskiego w teorii liniowych równań różniczkowych o współczynnikach wielomianowych. Operatory Mikusińskiego znajdują rozliczne zastosowania, niekiedy w dziedzinach bardzo od siebie odległych, takich jak teoria sterowania ([5]), elektrotechnika, statyka belek czy chromatografia ([12], str. 273). Jednocześnie teoria operatorów dostarcza wielu interesujących problemów w różnych działach matematyki.

W. Kierat i K. Skórnik przedstawili nowe zastosowanie rachunku operatorów do badania funkcji specjalnych [SK1], [S?], jak również do badania układów dynamicznych, [KS4]. Udowodnili

Twierdzenie 4. ([KS4]) *Układ dynamiczny określony układem równań różniczkowych z opóźnionym argumentem*

$$x'(t) = Ax(t-\tau) + Bu(t),$$

gdzie $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n, A$ *– jest stałą* n*–wymiarową macierzą kwadratową,* B *– stałą macierzą wymiaru* $[n,m]$*,* $m \le n, n \in \mathcal{C}$ *– przestrzeń sterowań,* τ *– stałe opóźnienie argumentu,*
jest niesterowalny na przedziale $[0,k\tau]$ *i jest sterowalny dla* $t > k\tau$ *wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy* $[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] < n$*, a rząd macierzy* $[B, AB, \ldots, A^kB] = n$*, (*$k < n$*).*

Graniczny przypadek, gdy $\tau \to 0$ jest opisany przez twierdzenie R.E. Kalmana z 1960 r. (zob. [R], str. 268, Tw. 6.2.1).

Z punktu widzenia algebry interesująca jest struktura ciała operatorów Mikusińskiego, a w szczególności fakt, że ciało to jest formalnie rzeczywiste i można w nim wprowadzić porządek liniowy.

Bardzo interesująca jest także tematyka związana z *pochodną algebraiczną*. Stosując rachunek operatorów Mikusińskiego oraz własności pochodnej algebraicznej, otrzymujemy rozwiązanie równania Laguerra [4], rozwiązanie równania Bessela [14].

Dla analizy ciekawy jest fakt, że rachunek operatorów stanowi istotne uogólnienie metody transformaty Laplace'a. Dla każdego operatora postaci f/g, gdzie $f, g \in C$ są funkcjami transformalnymi w sensie Laplace'a, można w naturalny sposób zdefiniować transformatę Laplace'a tego operatora. Istnieją jednak operatory, np. operator reprezentowany przez funkcję $\exp(t^2)$, które nie dają się przedstawić w postaci ilorazu splotowego funkcji transformalnych w sensie Laplace'a.

Z drugiej strony interesujące jest porównanie operatorów Mikusińskiego i dystrybucji Sobolewa–Schwartza. Oba pojęcia są uogólnieniem funkcji lokalnie całkowalnych: na półprostej w przypadku operatorów, na prostej w przypadku dystrybucji. Okazuje się, że istnieją dystrybucje nie będące operatorami np. funkcja stała 1 na $(-\infty,\infty)$, ale i odwrotnie, istnieją operatory nie będące dystrybucjami np. operator $e^{\sqrt{s}}$.

W celu zdefiniowania ciągłości, pochodnej czy całki funkcji operatorowej konieczne jest określenie zbieżności ciągu operatorów. Możliwe są dwie definicje:

(I) $x_n \to x$, jeżli $x_n = f_n/g$, $x = f/g$ $(f_n, f, g \in C)$ oraz $f_n \to f$ niemal jednostajnie,
(II) $x_n \to x$, jeżli $x_n = f_n/g_n$, $x = f/g$ $(f_n, f, g_n, g \in C)$ oraz $f_n \to f, g_n \to g$ niemal jednostajnie.

Zdefiniowane powyżej zbieżności noszą nazwę zbieżności typu I i II. Są one ciekawe z topologicznego punktu widzenia, ponieważ – nimo naturalnych definicji zbieżności – w ciele operatorów nie da się wprowadzić topologii w taki sposób, by zbieżność przez nią generowana była zbieżnością typu I lub II. Wynika to z faktu, że oba typy zbieżności nie spełniają warunku Urysohna ([B2]), który wraz z pewnymi oczywistymi warunkami charakteryzuje zbieżności topologiczne. Warunke ten formułuje się następująco:

Jeżli każdy podciąg y_n *ciągu* x_n *zwiera podciąg* z_n*, taki że* $z_n \to z$*, to* $x_n \to x$*.*

Głębokie twierdzenie dotyczące obu typów zbieżności zostały otrzymane przez J. Burzyka ([B1], [B2]). W szczególności udowodnił on, że

każda ograniczona rodzina operatorów jest prezwarta ([B2] oraz [13], str. 149).

W swej późniejszej pracy badawczej J. Burzyk uzyskał wiele innych ważnych wyników w zakresie rachunku operatorów Mikusińskiego. Praca [B6] zawiera twierdzenia o charakteryzacji ciągłych i różniczkowalnych funkcji operatorowych, tzn. funkcji określonych na przedziale o wartościach w ciele operatorów Mikusińskiego. Za najważniejszą jego pracę w tym dziale można uznać [B12], w której dowodzi się twierdzenia typu Paleya-Wienera dla operatorów o nośniku ograniczonym. Pokazuje się, że przestrzeń takich operatorów jest izomorficzna (poprzez transformatę Fouriera) z przestrzenią funkcji całkowitych typu eksponencjalnego spełniających nierówność:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |log|f(t)||(1+t^2)^{-1}dt < \infty.$$

Tego rodzaju funkcje często występują w teorii funkcji całkowitych i ich teoria ma głębokie zastosowanie w analizie harmonicznej, znalezione przez Beurlinga i Malliavina.

Rachunek operatorów Mikusińskiego szybko stał się teorią znaną w całym świecie i był przez kolejne lata intensywnie rozwijany w licznych ośrodkach przez wielu autorów. Ilość publikacji związanych temetycznie z tą teorią była tak duża, że redaktorzy Mathematical Reviews postanowili utworzyć oddzielny dział klasyfikacyjny oboejmujący tę teorię pod numerem 44A40. Warto skonstatować na koniec, że "Mikusiński" jest jednym z niewielu polskich nazwisk, które na stałe weszły do światowej terminologii jako nazwiska twórców teorii matematycznych.

5. Dystrybucje

Teoria dystrybucji w opracowaniu Schwertza oparta jest na zaawansowanych wynikach analizy funkcjonalnej co czyni ją trudną do opanowania przez inżynierów chcących z niej skorzystać w praktyce. Profesor Mikusiński wspólnie z profesorem R. Sikorskim opublikowali drugą część elementarnej teorii dystrybucji (II). Autorami trzeciej książki z ciągowej teorii dystrybucji byli: D. Antosik, J. Mikusiński i R. Sikorski, [V].

Idea ciągowej definicji dystrybucji jest oparta na aproksymacji dystrybucji funkcjami ciągłymi lub gładkimi (tj. funcjami z klasy $\mathcal{C}^\infty$).

Ciąg $\{\varphi_n\}$ funkcji gładkich na $\mathbb{R}^1$ jest *ciągiem podstawowym*, jeśli dla każdego otwartego skończonego przedziału I w $\mathbb{R}^1$ istnieją: nieujemna liczba całkowita k i ciąg funkcji gładkich $\{\psi_n\}$ taki, że $\Phi_n = \varphi_n$ w I oraz $\{\phi_n\}$ jest jednostajnie zbieżny w I. Dwa podstawowe ciągi $\{\varphi_n\}$ i ϕ_n są równoważne ($\varphi_n \sim \phi_n$), jeśli ich ciąg przeplatany $\varphi_1, \phi_1, \varphi_2, \phi_2, \dots$ jest podstawowy. Relacja $\sim$ jest relacją rówoważności. Dystrybucjami są klasy ciągów równoważnych. Zapis $f = [\varphi_n]$ oznacza, że dystrybucja f jest klasą równoważności zawierającą ciąg podstawowy φ_n.

Podana definicja dystrybucji jest elementarna i zrozumiała dla każdego kto zna pojęcie pochodnej i jednostajnej zbieżności. Zaletą ciągowego ujęcia teorii dystrybucji jest łatwość rozszerzania na dystrybucje operacji zdefiniowanych dla funkcji gładkich. *Operacja A* zdefiniowana dla każdego systemu $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ funkcji gładkich *jest regularna*, jeśli zastosowana do dowolnych ciągów podstawowych $\{\varphi_{1n}\}, \dots, \{\varphi_{kn}\}$ w wyniku daje ciąg podstawowy. $\{A(\varphi_{1n}, \dots, \varphi_{kn})\}$. Jeśli $f_1, \dots, f_k$ są dystrybucjami wyznaczonymi przez ciągi podstawowe $\{\varphi_{an}\}, \dots, \{\varphi_{kn}\}$ wtedy przyjmujemy, że

$$A(f_1, \dots, f_k) = [A(\varphi_{1n}, \dots, \varphi_{kn})]$$

Należy zauważyć, że wśród operacji ważnych w zastosowaniach są operacje regularne takie jak dodawanie, mnożenie przez liczbę, różniczkowanie oraz są operacje nieregularne takie jak iloczyn i splot funkcji.

Profesor Mikusiński zaproponował ogólną metodę definiowania operacji nieregularnych za pomocą ciągów–deltowych, którymi są ciągi $\{\delta_n\}$ funkcji gładkich takich, że $\int \delta_n = 1$ i $\delta_n(x) = 0$ dla $|x| = \alpha_n$ gdy $\alpha_n \to 0$.

Niech A będzie operacją określoną na funkcjach gładkich i niech $f_1, \ldots, f_k$ będą dystrybucjami. Mówimy, że $A(f_1, \ldots, f_k)$ istnieje, gdy dla dowolnego ciągu deltowego $\{\delta_n\}$ ciąg

$$\{A(f_1 * \delta_n, \ldots, f_n * \delta_k)\}$$

jest ciągiem podstawoweym; wtedy przyjmujemy, że

$$A(f_1, \ldots, f_k) = [A(f_1 * \delta_n, \ldots, f_k * \delta_k)].$$

Na przykład, iloczyn dystrybucji f_1 i f_2 można wyrazić w postaci

$$f_1 \cdot f_2 = \lim_{n\to\infty} (f_1 * \delta_n)(f_2 * \delta_k).$$

W literaturze matematycznej jest znanych wiele innych definicji dystrybucji. Współzależności między tymi definicjami przeanalizował Andrzej Kamiński i swoje wyniki opublikował w pracach ([K1], [K2]).

Innym ważnym przykładem operacji na dystrybucjach jest splot

$$f_1 * f_2 = \lim_{n\to\infty} (f_1 * \delta_n)(f_2 * \delta_n).$$

Ciągowa teoria splotu jest opracowana w [V].

W tejże książce opracowane są: dystrybucje temperowane, dystrybucje periodyczne, rozwinięcia dystrybucji w szereg Fouriera i Hermite'a, transformacje Fouriera i Hilberta; zastosowanie tych transformacji, podany jest elementarny dowód równoważności ciągowej i funkcjonałowej teorii dystrybucji.

Dystrybucje temperaturowe definiuje J. Mikusiński jako pochodne pewnego rzędu k ($k \in \mathbb{N}$) funkcji całkowalnych z kwadratem [M10], [V]. Pojęcie pochodnej temperowanej D^k rzędu naturalnego wprowadził J. Mikusiński w [M10], zaś całki temperowanej S^k ($k \in \mathbb{N}$) w [V]. Pojęcie pochodnej temperowanej i całki temperowanej na dowolny nieujemny rząd rozszerzyła Krystyna Skórnik w pracy [S4]. W pracy tej przedstawiła klasę dystrybucji mającą tę własność, że operacja odwrotna do różniczkowania jest jednoznaczna. Pokazała, że w klasie dystrybucji o tej własności, pochodna temperowana może być rozszerzona na pochodne temperowane dowolnego nieujemnego rzędu z zachowaniem własności

$$D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f, \qquad S^\alpha S^\beta f = S^{\alpha+\beta} f,$$

dla wszystkich $\alpha, \beta \geq 0$.

Na szczególną uwagę w opracowaniu teorii splotu, iloczynu i transformacji Fouriera dystrybucji zasługują wyniki Andrzeja Kamińskiego przedstawione w około 19–tu publikacjach, np. [AK1]. Wyniki A. Kamińskiego dotyczą również splotu ultradystrybycji. Cechą charakterystyczną jego badań jest dogłębne wyjaśnienie współzależności pomiędzy wielorakimi definicjami, iloczynu, splotu i transformacji Fouriera [K6].

Obok przestrzeni D' dystrybucji Schwartza i przestrzeni S' dystrybucji temperowanych A. Kamiński zajmował się także przestrzeniami $K'\{M_p\}$ funkcji uogólnionych Gelfanda-Szyłowa i przestrzeniami ultradystrybucji. W przestrzeniach funkcji uogólnionych typu Gelfanda - Szyłowa operacjami, takimi jak zbieżność, iloczyn tensorowy i splot funkcji uogólnionych zajmował się również Jacek Uryga. Podał warunek zgodności nośników funkcji uogólnionych, przy których istnieje ich splot (zob. [KU$_1$], [KU$_2$], [U1], [U2], [U3]). Wykazał, że iloczyn tensorowy przestrzeni Gelfanda-Szyłowa jest również, przy pewnych założeniach, przestrzeniaą tego typu (zob. [U4]).

Wiele przestrzeni funkcji próbnych, które pojawiają się w teorii funkcji uogólnionych ma strukturę skali przestrzeni Hilberta. W pracy [K1] W. Kierat rozważał skale przestrzeni Hilberta H_k, które są uzupełnieniem pewnych funkcji gładkich względem morm generowanych przez formy kwadratowe potęg operatora Sturma–Liouvilla. W pracy tej badał rozwinięcia elementów H_k, H, H'_k i H' w szeregi Fouriera względem funkcji własnych operatorów Sturma–Liouvilla, gdzie H jest granicą projektywną przestrzeni H_k. Dla oscylatora harmonicznego otrzymujemy skale przestrzeni Hilberta S_k, a przestrzeń Schwartza S jest granicą projektywną przestrzeni S_k. W. Kierat rozważał przestrzenie $A(\mathbb{R}^q)$, które są wyposażone w lokalnie wypukłą topologię beczkową o następującej własnościach:

(a) $D(\mathbb{R}^q) \subset A(\mathbb{R}^q) \subset S(\mathbb{R}^q)$;
(b) $D(\mathbb{R}^q)$ jest gęsta w $A(\mathbb{R}^q)$, topologia indukowana na $D(\mathbb{R}^q)$ z $A(\mathbb{R}^q)$ jest słabsza niż topologia naturalna przestrzeni $D(\mathbb{R}^q)$.

Przykład przestrzeni typu $A(\mathbb{R}^q)$ został podany w pracy [K3].W pracy [K4], W. Kierat pokazał, że jeżeli

$$x^\mu \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x^\nu} f \in L^2(\mathbb{R}^q),$$

dla $|\mu + \nu| \leq k, \quad k > q/2$, to $(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})f(x) = f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}^q$, gdzie $\mathcal{F}f$ i $\mathcal{F}^{-1}f$ oznaczają odpowiednio całkę Fouriera i odwrotną całkę Fouriera f.

6. Twierdzenie o przekątnej.

Jednym z założeń autorów przy pisaniu książki [XI] było unikanie topologicznych metod w definiowaniu i dowodach twierdzeń. Wiadomo, że jednymi z silnych środków dowodowych jest twierdzenie Beare'a o kategorii. Twierdzenie to ze względu na swój charakter topologiczny nie pasowało do ciągowej teorii. Była więc potrzeba nowego środka dowodowego wypowiedzianego w terminach ciągów. Środkiem tym okazało się twierdzenie Mikusińskiego o przekątnej [M3].

Twierdzenie o przekątnej. *Niech X będzie przestrzenią Banacha, $x_{i,j} \in X$ dla $i, j = 1, 2, \dots$, $\|x_{ii}\| > 0$ i niech $\lim_{j\to\infty} x_{ij} = 0$ dla $i = 1, 2, \dots$. Wtedy istnieją nieskończony zbiór I liczb dodatnich i jego podzbiór J takie, że*

$$\sum \|x_{ij}\| < \infty \quad \text{i} \quad \left\| \sum_{j\in J} x_{ij} \right\| > \frac{1}{2}m \quad \text{dla } i \in I.$$

Twierdzenie o przekątnej okazało się wielce użyteczne w dowodach twierdzeń z analizy funkcjonalnej i teorii miary. Z jego pomocą zostały udowodnione twierdzenia: Banacha–Steinhausa o jednostajnej ograniczoności; o słabej i mocnej ograniczoności; Orlicza–Petliza, Vitali–Hahna–Saksa; Nikodyma i wielu innych twierdzeń ([A2], [A3]).

W procesie zastosowań twierdzenia o przekątnej wystarczały prostsze sformułowania twierdzenia, których również dowody były prostsze i prowadziły do ogólniejszych wyników. Ta problematyka była głównie uprawiana przez P. Antosika. P. Antosik jest autorem lub współautorem około 26 publikacji związanychy z tym tematem i współautorem jednej publikacji książkowej ([XI]).

Stosując metodę twierdzenia o przekątnej P. Antosik zauważył, że w wielu twierdzeniach założenie zupełności może być zastąpione prostym następującym warunkiem

(K) Każdy ciąg zbieżny do zera ma szeregowo zbieżny podciąg.

Przestrzenie Banacha, zupełne, quasi–normowe grupy i inne przestrzenie ze zbieżnością mają własność (K). Zupełność przestrzeni Banacha implikuje własność (K).

W naturalny sposób powstaje pytanie o implikacje zbieżności przez własność (K). Czesław Kliś podał przykład podprzestrzeni l^2 z własnością (K) bez zupełności [K]. Nieco silniejszy warunek od warunku (K) był wypowiedziany przez L.S. Sobolewa.

(N) Każdy ciąg zbieżny do zera ma podciąg, którego każdy podciąg jest szeregowo zbieżny.

J. Burzyk podał przykład, przy pewnym dodatkowo teorio–mnogościowym warunku, że warunek (N) nie musi implikować zupełności ([B4]).

Dla chcących bliżej poznać metodę twierdzenia o przekątnej i warunek (K) polecamy ([XI]).

7. Teoria zbieżności.

Prof. Jan Mikusiński w swojej pracy badawczej korzystał głównie ze zbieżności ciągów i ich własności. Dał temu wyraz w rachunku operatorowym, teorii dystrybucji, teorii całki. Definicje i twierdzenia występujące w zastosowaniach metody przekątniowej i warunku (K) dają się wypowiedzieć w terminach zbieżności ciągów. Okoliczności te były sprzyjające powstaniu aksjomatycznej teorii zbieżności ciągów. Zagadnienia te i im pokrewne są rozpatrywane w publikacjach: [MB], [MF], [PM3], [PM2], [A5], [K7].

W teorii zbieżności postuluje się, że dana zbieżność spełnia naturalne warunki:

(F) Jeżeli $x_n \to x$, to $x_{p_n} \to x$ dla każdego podciągu (x_{p_n}) ciągu (x_n).
(L) Jeżeli $x_n \to x, y_n \to y, a_n \to a$ i $b_n \to b$, to $a_n x_n + b_n y_n \to ax + by$.
(U) Jeżeli każdy podciąg ciągu (x_n) zawiera podciąg (x_{q_n}), taki że $x_{q_n} \to x$, to $x_n \to x$ (warunek Urysona).
(S) Jeżeli $x_n = x$ dla $n = 1, 2, ...$, to $x_n \to x$.
(H) Jeżeli $x_n \to x$ i $x_n \to y$, to $x = y$.

Wprowadza się również operację przyporządkowującą zbieżności G jej tzw. ugwiazdkowienie, tzn. najmniejszą zbieżność zawierającą G i spełniającą warunek Urysona. Przestrzeniami ze zbieżnością zajmował się J. Pochciał. Podał warunki konieczne i wystarczające na to, by przestrzeń ze zbieżnością była metryzowalna (zob. [P1- P5]). Rozważał także kilka warunków typu diagonalnego ((P) i (A) zob. [P6]). Używając jedynie tych elementarnych pojęć i warunków podał charakteryzację zbieżności generawanej przez pewną dowolną funkcję rzeczywistą oraz przez funkcję posiadającą pewne dodatkowe własności, takie jak symetria czy warynek trójkąta. W efekcie uzyskał charakteryzację zbieżności metryzowalnych, jak również charakteryzację topologii metryzowalnych w zakresie przesytrzeni parazwartych. Tą drogą można także uzyskać charakteryzację różnych przestrzeni będących uogólnieniami przestrzeni metrycznych, takich jak przestrzenie quasi-metryzowalne, symetryzowalne, semimetryzowalne czy γ- przestrzenie. Jako wnioski uzyskuje się dowody dostateczności w przypadku klasycznych twierdzeń metryzowalnych (np. twierdzeń Aleksandrowa-Urysona, Nagaty-Smirnowa, Moore'a). J. Pochciał podał przykład przestrzeni liniowej ze zbieżnością spełniającą warunek (K) i nie spełniającej warunku (M) ([P?]). Przykład ten uzupełnia wyniki dotyczące niezależności aksjomatów (K) i (M) zawarte w pracach [?], [?]. Podał także przykład przestrzeni liniowej ze zbieżnością spełniającą warunki (F), (L), (U), (S), (H), (P) i nie generowaną przez żadną topologię liniową [P?].

Abstrakcyjną teorią zbieżności zajmowali się również Piotr Mikusiński, Andrzej Kamiński i Józef Burzyk. A. Kamiński ([K?], [K?], [K?]) podał charakteryzację zbieżności wielowartościowych (multizbieżności), które są indukowane przez topologię. W pracy [BM] J. Burzyk i P. Mikusiński podali dowód twierdzenia o metryzowalności grupy ze bieżnością generowaną przez funkcję. Z twierdzenia tego wynika w łatwy sposób klasyczne twierdzenie o metryzowalności grup topologicznych z przeliczalną bazą otoczeń zera. W pracy [BKL] udowodniono twierdzenie, które mówi, że każda przestrzeń unormowana z własnością (K) jest II kategorii Baire'a. Problem istnienia niezuełnych przestrzeni unormowanych typu (N) został rozstrzygnięty w pracy [B]. W pracy [?] podana jest konstrukcja rozbicia przestrzeni liniowo-metrycznych na sumę prostą przestrzeni o własnościach (N) i (K) oraz dowód, że każda podprzestrzeń F_σ zupełnej i ośrodkowej przestrzeni liniowo-metrycznej ma rozszerzenie do właściwej podprzestrzeni typu (K).

8. Całka Lebesgue'a i Bochnera.

Następnym obszarem zainteresowań prof. J. Mikusińskiego, i tym samym kierowanym przez niego seminarium była teoria całki Lebesgue'a i Bochnera. (zob. [VII]). W literaturze matematycznej znanych jest wiele ujęć całki Lebesgue'a. Definicja całki Lebesgue'a i Bochnera podane przez Mikusińskiego jest szczególnie prosta i poglądowa. Definicja ta jest następująca:

Funkcję f z $\mathbb{R}^q$ w ustaloną przestrzeń Banacha X (w szczególności z $\mathbb{R}^1$ w $\mathbb{R}^1$) nazywamy *całkowalną w sensie Bochnera (Lebesgue'a)*, jeżeli istnieje ciąg przedziałów $I_n = [a_{1n}; b_{1n}) \times \cdots \times [a_{kn}; b_{kn})$ w $\mathbb{R}^k$ oraz ciąg elementów przestrzeni X (liczb) λ_n takie, że

1^o $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| vol(I_n) < \infty$,

2^o $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi_{I_n}(x)$ dla punktów x, w których szereg jet bezwzględnie zbieżny; χ_{I_n} oznacza tu funkcję charakterystyczną przedziału I_n.

Całkę funkcji spełniającej warunki 1^o i 2^o określamy jako

$$\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n vol(I_n).$$

Powyższa definicja (zob. [VII], [...]) jest równoważna klasycznym definicjom całek Bochnera i Lebesgue'a.

W oparciu o zacytowaną wyżej definicję, w książce [X] została rozwinięta teorii całki Bochnera. W szczególności dowodzi się następujących własności przestrzeni U funkcji całkowalnych i własności całki $\int$:

H. Jeżeli $f \in U$ i $\lambda \in \mathbb{R}^1$, to $\lambda f \in U$ i $\int \lambda f = \lambda \int f$;

A. Jeżeli $f, g \in U$, to $f + g \in U$ i $\int (f + g) = \int f + \int g$;

M. Jeżeli $f \in U$, to $|f| \in U$ i $|\int f| \leq \int |f|$;

E. Jeżeli $f_n \in U (n = 1, 2, ...), \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty$ oraz $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ w punktach x bezwzględnej zbieżności szeregu, to $f \in U$ i $\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$.

Z własności **E**, w przypadku funkcji rzeczywistych, wynika

E^o. Jeżeli $f_n \in U, f_n \geq f_{n+1} (n = 1, 2, ...)$ oraz $f_n \to 0$, to $\int f_n \to 0$.

Podane wyżej własności można przyjąć za aksjomaty nakładane na przestrzeń U funkcji (z $\mathbb{R}^k$ w przestrzeń Banacha X) oraz na funkcjonał $\int$ na tej przestrzeni. Takie aksjomatyczne ujęcie jest ogólne i pozwala zbadać wzajemne związki między różnymi znanymi ujęciami całki, jak całka Daniela czy całka względem miary.

Dla danej całki, tzn pary $(U, \int)$, spełniającej aksjomaty $\mathbf{HAME}_o$ można określić całkę Daniela jako majmniejsze rozszerzenie spełniające aksjomaty **HEM** (zob. [121?]. Z drugiej strony okazuje się, że całka względem dowolnej miary jest całką spełniającą **HEM** i pewne dodatkowe aksjomaty (związane z pojęciem mierzalności funkcji), a więc jest mniej ogólna niż aksjomatyczna całka **HEM**, której teoria przedstawiona jest w książce [VII].

Z innych ciekawych zagadnień przedstawionych w książce [VII] należy wymienić różne pojęcia pochodnej. Pojęcie *pochodnej pełnej* wprowadził J. Mikusiński w [119?], zaś w książce [VII] wykorzystał to pojęcie do bardzo ogólnego twierdzenia o podstawianiu w całce Lebesgue'a (zob. [VII], str. 158). Następną pochodną rozważeaną w [VII] jest *pochodna lokalna* funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Wcześniej K. Skórnik w [S1] wprowadziła pojęcie pochodnej lokalnej funkcji q zmiennych o wartościach w przestrzeni Hilberta, a w przestrzeni Banacha w pracy [S..?]. Udowodniła, że lokalna pochodna i pochodna Sobolewa są równoważen (zob. [S9]). Podała ogólną postać funkcji f określonej w $\mathbb{R}^q$ i o wartościach w przestrzeni Banacha, całkowalnej w sensie Bochnera, która spełnia równanie różniczkowe $f^{(m)} = 0$, gdzie pochodna rozumiana jest w sensie Sobolewa (zob. [S10]).

Jak wiemy podtawowym faktem, na którym opiera się rachunek operatorów jest twierdzenie Titchmarsha. W książce [VII] J. Mikusiński dowodzi mocniejszą, tak zwaną lokalną wersję tego twierdzenia, którą można sformułować następująco:

Jeżeli $f, g \in [0;T]$ *i* $fg = 0$ *na* $[0;T]$, *to* $f = 0$ *lub* $g = 0$ *na* $[0; \frac{1}{2}]$

W dowodzie tego twierdzenia korzysta J. Mikusiński z tzw. twierdzenia o momentach, które formułuje i uzasadnia dla funkcji całkowalnych w sensie Bochnera.

Twierdzenie Titchmarsha w formie książkowej było przedstawione po raz pierwszy w 1953 r. (zob. [I]). Pierwszy dowód podał sam jego autor w 1926 r. Dowód był trudny i skomplikowany. Prostsze dowody podali M.M. Crum w 1941 r. oraz J. Dufresnoy w 1947 r. i 1948 r. W 1953 r., korzystając z pewnego twierdzenia o momentach (zob. [J.M&Cz.R.N.] bez funkcji analitycznych i harmonicznych, J. Mikusiński podał [...] (piąty z kolei) dowód twierdzenia Titchmarsha. Kolejne dowody, zmodyfikowane lub uproszczone podali kolejno S. Świerczkowski, K. Yosida i S. Matsuura, C.K. Kalisch.

Twierdzenie Titchmarsha związane jest z twierdzeniem Foiaşa (zob. [...]), które zostało udowodnione w 1961 r. Zastosowania podane przez T. Boehmego i J. Burzyka ([B1], [B2]), zwróciły uwagę na jego przydatność i spowodowały powstanie nowych dowodów. Dwa dowody podał T.K. Boehme. W pracy [M4] J. Mikusiński podał kolejny dowód twierdzenia Foiaşa o slocie funkcji całkowalnych. W. Kierat i K. Skórnik ([SK], [K5]) podali następne dowody tego twierdzenia bez użycia metod nieskończonych i bez twierdzenia o reprezentacji funkcjonału na L^1

9. Matematyka stosowana.

Jedną z pasji prof. J. Mikusińskiego była matematyka stosowana. Przykładem tego jest *Rachunek Operatorów.* Jednym z jego zastosowań była teoria elektyrczności i chromatografii. J. Mikusiński wspólnie z K. Skórnik opracowali matematyczną teorię systemów optycznych (zob. [X], [MS_1], [MS_2]). Opublikowali na ten temat 6 prac. Rozwinięta we wspomnianych pracach teoria pozwoliła na wyjaśnienie defektów soczewek o zmiennej gęstości. Warto zauważyć, że rozważania te doprowadziły do równania funkcyjnego

$$f(x+y)[f(x+y) - f(x) - f(y)] = 0,$$

które otrzymało nazwę równania Mikusińskiego.

Uczestnicy seminarium opracowali metodę estymacji zanieczyszczeń powietrza wydzielanych przez zakłady przemysłowe (zob. [A-T]).

W pracy [KC], W. Kierat i A. Cichocka zastosowali rozwinięcie Fouriera dystrybucji z D'_{L^p} względem funkcji Wienera w celu wyznaczenia funkcji harmonicznej w górnej półpłaszczyźnie, która przyjmuje daną dystrybucję jako wartość brzegową na osi rzeczywistej.

W pracy [KS_4], W. Kierat i K. Skórnik, przy użyciu elementarnych metod, podali rozwiązanie problemu początkowego dla równania ciepła, gdzie warunek początkowy jest dystrybucją temperowaną.

W pracy [SD], K. Skórnik i I. Dimovski podali konstrukcję rachunku operatorów dla dowolnej klasy funkcji średnio-okresowych względem danego funkcjonału w zbiorze funkcji ciągłych. Otrzymane wyniki zostały zastosowane do znalezienia średnio-okresowych rozwiązań równań różniczkowych liniowych ze stałymi współczynnikami, tzn. równań postaci

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)u = f,$$

gdzie $P(\lambda) = a_o\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ jest danym wielomianem, f – funkcją średnio-okresową względem zadanego funkcjonału Φ.

10. Spis publikacji.

Książki.

[I.] J. Mikusiński, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1953.

[II.] J. Mikusiński, *Una introduecion de la integral sin la nociòn de medida*, Uniw. de Buenos Aires, Dep. de Mat., Buenos Aires 1963.

[III.] J. Mikusiński & R. Sikorski, *Elementarna teoria dystrybucji*, PWN, Warszawa 1964.

IV. J. Mikusiński, *An introduction to the theory of Lebegue and Bochner integral*, Uniw. of Florida, Dept. of Math., Gainesville 1964.

[V.] J. Mikusiński, *Lecture an the constructive theory of distributions*, Uniw. of Florida Dept. of Math., Gainesville 1969.

[VI.] P. Antosik & J. Mikusiński & R. Sikorski, *Theory of distributions. Sequential approach*, Elzewier and PWN, Amsterdam–Warszawa 1973.

[VII.] J. Mikusiński, *The Bochner Integral*, Birkhäuser, Basel–Stuttgart 1978. Academic Press, New York–San Francisco 1978.

[VIII.] T.K. Bochner & J. Mikusiński, *Operational Calculus*, Vol. II, PWN and Pergamon Press, Warszawa–Oxford 1987.

[IX.] J. Mikusiński & P. Mikusiński, *From Number to Integral,*

[X.] J. Mikusiński & K. Skórnik, *On Axially symmetric Optical Instruments*, Zakłady Naukowe im. Osolińskich, Wydawnictwo PAN, 1979.

[XI.] P. Antosik & C. Swierz, *Matrix Metody in Analysis*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1119, Heidelberg 1985.

[XII.] P. Antosik & A. Kamiński, *Generalized Functions and Convergence*, Memorial Volume for Protessor Jan Mikusiński 13–18 June 1988 Katowice, Poland, World Scientific, Singapore, New Jersey. London Hong Kong, 1990.

[XIII.] K. Skórnik & S. Krasińska, *Zarys teorii rachunku operatorów J. Mikusińskiego oraz pewne jego zastosowania*, Wydawnictwo Pol. Śl., Gliwice, 1992.

[XIV.] K. Skórnik & S. Krasińska, *Wybrane zagadnienia z ciągowej teorii dystrybucji*, Wydawnictwo Pol. Śl., Gliwice 1994.

[XV.] W. Kierat & U. Sztaba, *Distributions Integral Transforms and Applications*, w serii: *Analitical Methods and Special Functions*, Taylor & Francis, London and New York, 2003.

Wybrane punblikacje z czasopism

[A1] P. Antosik, *On izomorphism of norm .... of operators*, Studia Math., **25**, 1 (1965).

[A2] P. Antosik, *On the Mikusiński Diagonal Theorem*, Rull. Acad. Polon. Sci., **19**, (1971).

[A3] P. Antosik, *Mappings from L–Groups into topological group I*, Bull Acad. Polon. Sci., **21** (1973), 155–160.

[A4] P. Antosik, *A lemma on matrics and its applications*, Contemporary Math., **52** (1986), 89–95.

[A5] P. Antosik, *On K, M and KM–sequences and uniform convergence*, Proceedings of the Conference on Convergence Spaces, Bechyne, 1984.

[AB_1] P. Antosik & J. Burzyk, *Sequential conditions for barrelledness and bornology*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. **35** (1985), 457 - 459.

[AB_2] P. Antosik & J. Burzyk, *A theorem on continuous convergence*, Zeszyty Nauk. Pol. Śl. Mat. - Fiz. **64** (1991), 21 - 25.

[AKS] P. Antosik & W. Kierat & K. Skórnik, *Some Algebraic Properties of Derivatives*, Transform Methods and Special Functions, Solia (1994), 8–17.

[AM] P. Antosik & J. Mikusiński, *The Kernel Theorem for Kötke Echelon Spaces*, Bull. Acad. Polon. Sec, **32** (1975).

[AS] P. Antosik & C.S. Swartz, *The Schner and Phillips Lemmas for Topological Groups*, J.

Math. Anal. Appl. **98** (1984).

[A-T] P. Antosik & P. Hallala & W. Kierat & Cz. Kliś & S. Lewandowska & J. Mikusiński & Z. Sadlok & k. Skórnik & Z. Tyc, *Wpływ charakterystyki emitora na częstość przekroczeń najwyższych dopuszczalnych stężeń zmierzonego poziomu tła*, PAN, Centrum Badań Naukowych w woj. katowickim, Katowice 1973.

[B1] J. Burzyk, *On convergence in the Mikusiński operational calculus*, Studia Math. **75** (1983), 313–333.

[B2] J. Burzyk, *On typ II convergence in the Mikusiński operational calculus*, Studia Math. **77** (1981), 17–27.

[B3] J. Burzyk, *On matrix properties of convergences*, w tomie: *Proc. of the Conference on Convergence*, Bechyne 1984, Academie - Verlag, Berlin 1985, 55 - 63.

[B4] J. Burzyk, *On continuous and differentiable operator functions*, Bull. Pol. Acad. Sci. Ser. Math. **34** (1986), 405 - 412.

[B3] J. Burzyk, *A paley–Wiener type theorem for regular operation of bounded suppont*, Studia Math. **93** (1989), 187–200.

[B4] J. Burzyk, *An example of a non-complete normed N-space*, Bull. Pol. Acad. Sci.Ser. Math. **35** (1987), 447 - 455.

[K5] J. Burzyk, *An example of a non–complete normed N–spaces*, Bull. Polish Acad. Sci, **35** (1987), 449–455.

[B6] J. Burzyk, *Decompositions of F-spaces into spaces with properties K, N, or κ*, w tomie: *Generalized Functions and Convergence, Memorial Volime for Professor Jan Mikusiński*, World Scientific, Singapore 1990, 317 - 329.

[B7] J. Burzyk, *On k - sequences*, Czechoslovak Math. J. **43** (1993), 1 - 6.

[B8] J. Burzyk, *An example of a group convergence with unique sequential limits which cannot be associed with a Hausdorff Topology*, Czechoslovak Math. J. **43** (1993), 7 - 14.

[BPM] J. Burzyk & B. Aniszczyk & A. Kamiński, *Borel and monotone hierarchies and extensions of Rényi probability spaces*, Colloq. Math. **51** (1987), 9 – 25.

[BPM] J. Burzyk & P. Mikusiński, *On normability of semigroups*, Bull. Acad. Polon. Sci, **28** (1980), 33–35.

[BKL] J. Burzyk & C. Kliś & Z. Lipecki, *On metrizability obelian groups with a complerness–type property*, Collq., Math., **49** (1984), 33–39.

[K1] A. Kamiński, *On convolution product and Fourier transforms of distributions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér, Aci. Math. Astrom. Phys. **25** (1977).

[K2] A. Kamiński, *Remarks on delta and unit sequences*, Bull. Acad. Polon. Sci. **25** (1978).

[K3] A. Kamiński, *Distributions and Renyi's theory of conditional probabilities*, w tomie: *Generalized Functions and Operational Calculus*, Proc. Conf., Varna 1975, Publishing House of the. Bulg. Acad. Sci. Sofia 1979, 111-121.

[K4] A. Kamiński, *On multialned topological convergence*, Bull. Acad. Polon. **29** (1981).

[K5] A. Kamiński, *Om multivalued convergence*, Bul.. Acad. Polon. Sci. **29** (1981).

[K6] A. Kamiński, *On the product of distributions*, Wiss. Beitr. IH Wismar **7** (1982), 99-102.

[K7] A. Kamiński, *Remark on $K'\{M_p\}$-spaces*, Studia Math. **77** (1984), 499-508.

[K8] A. Kamiński, *On the Rényi theorem of conditional probability spaces*, Colloq. Math. **49** (1985), 265 - 294.

[K9] A. Kamiński, *On axioms of convergence in linear spaces*, Ann. Math. Silesianae **1** (1985), 130 - 144.

[K10] A. Kamiński, *On distributional solutions of the generalized entropy equation*, w tomie: *Generalized Functions and Convergence, Memorial Volime for Professor Jan Mikusiński*, World Scientific, Singapore 1990, 141 - 156.

[K11] A. Kamiński, *Remarks on the convolution of distributions with compatible supports*, Zeszyty Nauk. Pol. Śl. Mat.-Fiz. **64** (1990), 107 - 122.

[KKP] A. Kamiński & D. Kovaćevic & S. Pilipoviś, *The equivalence of varions definitions of the convolution of ultradistributions.*

[KM] A. Kamiński & J. Mikusiński, *On the entropy equation*, Bul.. Acad. Polon. Sci. **22** (1974), 319 - 323.

[KR] A. Kamiński & R. Rudnicki, *A note on the convolution and the product in D' i S'*, Inter. J. Math. Sci **14** (1991), 275 - 282.

[KS] A. Kamiński & K.Skórnik, *Fakty z życia i twórczości Profesora Jana Mikusińskiego*, Wiadom. Mat. **28**(1988), 35-52, 56-64.

[KU_1] A. Kamiński & J. Uryga, *Criteria of the existence and the associativity of the convolution of generalized functions in the space $K\{M_p\}'$ of Gel'fand-Shilov*, Abstracts Amer. Math. Soc. **42** (1986), 93.

[KU_2] A. Kamiński & J. Uryga, *Convolution in $K\{M_p\}'$-spaces*, w tomie: *Generalized Functions, Convergence Structures and Their Applications*, Proc. of the Conf., Dubrovnik 1987, Plenum Press, New York-London 1988, 187-198.

[K1] W. Kierat, *Applications of quadratic froms generated by Sturm–Liouville operators in the theory of generalized functions*, Prace Naukowe U.Śl. **388** (1980).

K2] W. Kierat, *Some Fourier transform inversion theorem*, Studia Math. **77** (1984), 485–488.

[KC] W. Kierat & A. Cichocka, *An application of the Wiener functions to the Dirichlet problem of the Laplace equation*, Integral Transforms and Special Functions, **7** (1998), no. 1-2, 13-20.

[KS1] W. Kierat & K. Skórnik, *A remark on the operational exponential functions*, Bull. Pol. Ac.: Math., **35** (1987), 383–386.

[KS2] W. Kierat & K. Skórnik, *A remark on solution of the Laguerre differental equation*, Dissertationes Math. **340** (1995), 137–141.

[KS3] W. Kierat & K. Skórnik, *An application of the Mikusiński operational calculus in the theory of controllability*, Integral Transforms and Special Functions, **7** (1998), 159–162.

[KS4] W. Kierat & K. Skórnik, *On generalized functions approach to the Cauchy problem for heat equation*, Integral Transforms and Special Functions, **2** (1994), no. 2, 107-116.

[Kl] Cz. Kliś, *An example of a non–complete normed (K) space*, Bull. Acad. Polon. Sci., **26** (1978), 415–420.

[M1] J. Mikusiński, *Un théoreme d'unicite pour quelques systems d'équations différentialles cosidérées dans les espaces abstracts*, Studia Math. **12** (1951), 80–83.

[M2] J. Mikusiński, *Sur la dérivée algebraique*, Fund. Math. **40** (1953), 99–105.

M3] J. Mikusiński, *Une simple démonstration du théoreme de Titchmarsh sur la connolution*, Bull. Pol. Ac.: Math. **7** (1959), 715–717.

[M4] J. Mikusiński, *Remarks on the algebraic derivative in the "Operational Calculus"*, Studia Math. **19** (1960).

[M6] J. Mikusiński, *Irregular operations on distributions*, Studia Math. **20** (1961), 163–169.

[M7] J. Mikusińki, *On weak convergence and strong convergence in the theory of distributions*, Bull. Acad. Polon Sci., **14** (1966), 431–434.

[M8] J. Mikusiński, *A theorem on vector matrices and its applications in measure theory and functional analysis*, Bull. Acad. Polon. Sci. **18** (1970).

[M9] J. Mikusiński, *On the Foiaş theorem on convolutions*, Bull. Acad. Polon. Sci. **33** (1985), 285–288.

[MB] J. Mikusiński & K. Bednarek, *Convergence and topology*, Bull. Acad. Polon. Sci. **17** (1969).

[MF] J. Mikusiński & C. Ferens, *Uryshosis condition and Cauchy sequences*, Trudy Sem–S.L. Sobolewa, No 1, 1978.

[MS_1] J. Mikusiński & K. Skórnik, *Modelowanie Matematyczne w optyce*, (część I) 158 XXVIII (1982), 131–139; (część II) 159 XXVIII (1982), 195–201, Fizyka w Szkole.

[MS_2] J. Mikusiński & K. Skórnik, *On the refraction of light in the water level*, Zeszyty Naukowe Pol. Sl., seria Mat.–Fiz., z. 42 (1983), 183–188.

[PM1] P. Mikusiński, *Convergence of Boehmians*, Japan. J. Math. Vol. **9** (1983).

[PM2] P. Mikusiński, *Boehomians as Generalized Functions.*

[PM3] P. Mikusiński, *On pseudonormability of some perticular classes of spaces.*

[PMP_1] P. Mikusiński & J. Pochciał, *On Mackey convergence*, Bull. Acad. Polon. Math. **31** (1983), 151 - 155.

[PMP_2] P. Mikusiński & J. Pochciał, *On bases of Convergence, Convergence Structure and Applications II*, Abh. Akad. Wis. DDR (1983), 177 - 179.

[P1] J. Pochciał, *An example of an M-space which is not a K-space*, Proc. Conf. on Convergence, Szczyrk 1979, PAN, Katowice 1980, 92 - 94.

[P2] J. Pochciał, *An example of $FLUSHK$-convergence semigropu without M- property*, ibidem, 95 - 96.

[P3] J. Pochciał, *On convergences with N-property*, Bull. Acad. Math. **31** (1983), 157 - 159.

[P4] J. Pochciał, *Sequential characterizations of metricability*, Czechslovak Nethematical Journal, **41** (116), 1991.

[P5] J. Pochciał, *On functional convergence*, Rend. Ins. Metem. Univ. di Trieste **17** (1985).

[P6] J. Pochciał, *An example of convergence linear space, Generalized Functions and Convergence, Memorial Volime for Professor Jan Mikusiński*, World Scientific, Singapore 1990, 361-364.

[R] , S. Rolewicz, *Functional Analysis and Control Theorem, Linear System*, PWN- Warszawa, D. Reidel Publishing Company, 1987.

[SaT] Z. Sadlok & Z. Tyc, *Remarks on Rapidly Increasing Distributions*, Bull. Pol. Ac.: Math., Vol XXVII, **11-12** (1979), 833 - 837.

[S1] K. Skórnik, *Postać funkcji lokalnie całkowalnej, której m-ta pochodna lokalna znika prawie wszędzie*, Zeszyty Naukowe WSP Katowice, **5** (1966), 127-152.

[S2] K. Skórnik, *An Estimation of Fourier Coefficients of Periodic Distributions*, Bull. Pol. Ac.: Math., Vol XVI, **7** (1968), 581-583.

[S3] K. Skórnik, *Hereditarily Periodic Distributions*, Studia Math., **43** (1972), 245-272.

[S4] K. Skórnik, *On Fractional Integrals and Derivatives of a Class of Generalized Functions*, Soviet Math. Dokl., **22** (1980), Nr 22, 541-543.

[S5] K. Skórnik, *On temperde integrals and derivatives of non-negative orders*, Ann. Pol. Math., **40** (1981), 47-57.

[S6] K. Skórnik, *On local derivatives*, Ann. Pol. Math., **41** (1983), 283-292.

[S7] K. Skórnik, *On full derivatives*, Ann. Po. Math., **43** (1983), 323-325.

[S8] K. Skórnik, *Sobolev's and local derivatives*, Studia math., **77** (1984), 509-517.

[S9] K. Skórnik, *On functions with vanishing local derivative*, Ann. Pol. Math., **47** (1987), 179-188.

[S10] K. Skórnik, *On Foiaş Theorem on Convolution*, Complex Analysis and Applications'87, Sofia (1989), 460-463.

[SD] K. Skórnik & I.H. Dimovski, *Mean-Periodic Operational Calculi*, Banach Center Publication, **53**, (2000), 105-112.

[SW_1] K. Skórnik & J. Wloka, *Factoring and Splitting od s-Differential Equations in the Field of Mikusiński*, Integral Transforms and Special Functions, **4**, no 3(1996), 263-274.

[SW_2] K. Skórnik & J. Wloka, *Some Remarks Concerning the Bessel Equation*, Integral Transforms and Special Functions, **4**, no 1-2(1997), 153-160.

[SW_3] K. Skórnik & J. Wloka, *M-Reduction of Ordinary Differential Equations*, Colloquium Math. **78**, no 2(1998), 195-212.

[SW_4] K. Skórnik & J. Wloka, *Reduction of Differential Equations*, Banach center Publiction, **53**, (20002), 199-204.

[U1] J. Uryga, *O pewnym kryterium istnienia splotu funkcji uogólnionych w przestrzeniach* $K'\{M_p\}$, IM PAN, Preprint 15, Ser. B, Warszawa 1986, str. 41.

[U2] J. Uryga, *On compatibility of supports of generalized functions of Gel'fand-Shilov type*, Bull. Po. Ac.: Math. **36** (1988), 5-6.

[U3] J. Uryga, *On representations of generalized functions of Gel'fand-Shilov type*, Bull. Pol. Ac.: Math. **36** (1988), 7-8.

[U4] J. Uryga, *On tensor product and convolution of generalized functions of Gel'fand-Shilov type*, w tomie: *Generalized Functions and Convergence, Memorial Volime for Professor Jan Mikusiński*, World Scientific, Singapore 1990, 251 -264.

[U5] J. Uryga, *On antiderivatives in the Gel'fand- -Shilov spaces* $K'\{M_p\}$, Zeszyt. Nauk. Pol. Śl., ser. Mat.-Fiz. 1989.