Andrzej Lasota

”Na pograniczu probabilistyki i równań różniczkowych”

(wystąpienie na Sesji Naukowej z okazji 50-lecia Oddziału Górnośląskiego PTM
w dniu 13 grudnia 2003 roku)

1. Wstęp

Długa jest historia badań wiążących rachunek prawdopodobieństwa i teorię równań różniczkowych. Badania te wyrosły z potrzeb fizyki, chemii, ekonomii, biomatematyki i niemal każdej dziedziny przyrodoznawstwa. Do dnia dzisiejszego nie zakończyły się badania nad wyjaśnieniem roli założeń probabilistycznych niezbędnych do wprowadzenia równania Boltzmanna - fundamentu dynamiki gazów.

Dla matematyków szczególnie interesujące okazały się dwa fakty. Po pierwsze generatory półgrup określonych przez najważniejsze procesy stochastyczne, proces Wienera i proces Poissona są prawymi stronami, ciekawych z punktu widzenia analizy matematycznej, równań różniczkowych. Po drugie obliczając wartości średnie pewnych procesów stochastycznych możemy efektywnie wyznaczać rozwiązania równań różniczkowych.

Stosunkowo niedawno okazało się, że metody probabilistyczne, a dokładniej operatory Markowa mogą służyć jako narzędzie badania stabilności równań różniczkowych i różniczkowo-całkowych. Dotyczy to zarówno klasycznych równań deterministycznych, jak i równań stochastycznych.

Przypomnijmy najpierw ogólnie, co to są operatory Markowa. Wyobraźmy sobie następującą sytuację. W przestrzeni X porusza się punkt zajmując w chwilach $0, 1, 2, ...$ położenia $x_0, x_2, x_2, ...$ Jeżeli znając położenie x_n naszego punktu w chwili n, możemy wyznaczyć dokładnie położenie x_{n+1} w chwili $n + 1$ stosując jedną i tę samą transformację $S : X \to X$, to

$$x_n = S^n(x_0) \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, ... \tag{1}$$

Para (X, S) jest przykładem najprostszego układu dynamicznego z czasem dyskretnym.

Możemy też rozważyć sytuację ogólniejszą, w której położenia x_n nie są ustalone. Punkty x_n są elementami losowymi i znane są tylko prawdopodobieństwa

$$\text{prob}(x_n \in A) = \mu_n(A) \tag{2}$$

dla dostatecznie dużej klasy podzbiorów przestrzeni X. Miary μ_n nazywamy rozkładami elementów x_n. Przypuśćmy teraz, że dane jest odwzorowanie P z przestrzeni miar określonych na X w tę samą przestrzeń miar takie, że $\mu_{n+1} = P\mu_n$. Wówczas

$$\mu_n = P^n \mu_0 \qquad \text{dla} \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

Operator P nazywamy operatorem *przejścia* dla procesu (x_n). Jest to prototyp operatora Markowa. Widać, że jest to uogólnienie układu dynamicznego. Sytuację opisaną wzorem (1) możemy otrzymać z (3) przyjmując

$$P\mu(A) = \mu(S^{-1}(A)). \tag{4}$$

Rozważania te były oczywiście nieprecyzyjne, nieformalne. Nie podaliśmy, w szczególności, jakie rozważamy przestrzenie miar i na jakich podzbiorach $A \subset X$ miary te są określone. Precyzyjne teorie idą w trzech kierunkach.

1° Przyjmuje się, że dana jest przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{A}, m)$, i rozpatruje się operatory działające na $L^1(X, \mathcal{A}, m)$ ([2], [7]).

2° Rozpatruje się przestrzeń metryczną (X, ρ) i operatory działające na miarach borelowskich, w tej przestrzeni ([7]).

3° Zakłada się, że dana jest przestrzeń mierzalna $(X, \mathcal{A})$, i rozpatruje się operatory działające na miarach określonych na $\mathcal{A}$ ([8]).

Oczywiście podejście 3° jest najbardziej ogólne, będę jednak mówił o operatorach z punktu 1°. Mają one bowiem liczne zastosowania i, co dla matematyka najważniejsze, można dla nich sformułować proste i jednocześnie zaskakujące twierdzenia. Ponadto w przypadku operatorów Markowa działających na L^1 pojawiają się w naturalny sposób obok iteracji $\{P^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, półgrupy $\{P^t\}$, $t \in [0, \infty)$, z czasem ciągłym.

2. Operatory Markowa na przestrzeni L^1

W rozdziale tym omówione są następujące zagadnienia:

1) twierdzenie typu Markowa o ograniczoności od dołu,
2) twierdzenie o asymptotycznej okresowości,
3) alternatywa Foguela.

Niech $(X, \mathcal{A}, m)$ będzie przestrzenią z miarą σ-skończoną i niech $L^1 = L^1(X, \mathcal{A}, m)$. Przez D oznaczymy podzbiór L^1 zawierający gęstości, tj.

$$D = \{f \in L^1 : \ f \geq 0, \ \|f\| = 1\}, \tag{5}$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę w L^1.

Operator $P : L^1 \to L^1$ nazywamy *operatorem Markowa*, jeśli jest liniowy oraz

$$P(D) \subset D. \tag{6}$$

Operator Markowa $P : L^1 \to L^1$ będziemy nazywali *asymptotycznie stabilnym*, jeżeli istnieje funkcja $f_* \in D$ taka, że

$$\lim_{n\to\infty} \|P^n f - f_*\| = 0 \qquad \text{dla} \quad f \in D. \tag{7}$$

Oczywiście funkcja f_* spełniająca warunek (7) jest jedyna oraz $Pf_* = f_*$.

Przyjmijmy oznaczenia

$$a^+ = \max\{0, a\}, \qquad a^- = \max\{0, -a\}.$$

Mamy następujące twierdzenie o ograniczeniu od dołu.

Twierdzenie 1. *Jeżeli $P : L^1 \to L^1$ jest operatorem Markowa i istnieje funkcja $h \in L^1$ taka, że*

$$h \geq 0, \qquad \|h\| > 0 \tag{8}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \|(P^n f - h)^-\| = 0 \qquad \textit{dla} \quad f \in D, \tag{9}$$

to P jest asymptotycznie stabilny.

Dowody tego twierdzenia nie są trudne. Szczególnie prosty dowód, jeśli chodzi o myśl przewodnią, podał J. Yorke, [6]. Zauważył on, że zbiór funkcji $\mathcal{H} \subset L^1$, które są nieujemne i spełniają warunek (9), ma element największy. Co więcej, ów element największy, jeśli tylko nie jest zerem, musi już spełniać warunek asymptotycznej stabilności (7). Warunek (8) gwarantuje, że zbiór $\mathcal{H}$ jest niepusty i w konsekwencji największy element zbioru $\mathcal{H}$ nie jest zerem ([6], [7]).

Mimo swej prostoty twierdzenie 1 znalazło liczne zastosowania. Wymienię trzy z nich.

1) Uprościło badanie ergodycznych własności odwzorowań lokalnie rozszerzających, (twierdzenia Rényi'ego i Krzyżewskiego–Szlenka).

2) Dało ciekawe wyniki dotyczące iterowania operatorów całkowych, w szczególności operatorów Volterry z wyprzedzającym argumentem, [1].

3) Pozwoliło na uzyskanie nowych wyników w zakresie asymptotyki równań ewolucyjnych postaci

$$u_t = Au - \lambda u + \lambda P u,$$

gdzie P jest operatorem Markowa, zaś A jest generatorem ciągłej półgrupy operatorów Markowa. Do tego typu równań prowadzi na przykład linearyzacja równań Boltzmanna, równanie ciepła ze źródłami zewnętrznymi i wiele innych [9], [11], [3].

Pozwolę sobie nieco szerzej omówić przypadek 2), ponieważ prowadzi do dosyć zaskakujących rezultatów. Rozpatrzmy równanie

$$f(x) = \int_0^{\lambda x} K(x,y) f(y)\, dy, \tag{10}$$

gdzie jądro $K : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest daną funkcją ciągłą, λ stałą dodatnią, a $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ poszukiwaną funkcją. Równanie to w przypadku $\lambda = 1$ bada się na początku każdego niemal podręcznika równań całkowych i dowodzi się, że jedynym jego rozwiązaniem jest $f \equiv 0$. To samo dotyczy oczywiście przypadku $0 \le \lambda < 1$. Natomaist dla $\lambda > 1$ równanie może mieć nietrywialne rozwiązanie. Co więcej, przy $\lambda > 1$ dla pewnych klas jąder K operator $P : L^1(\mathbb{R}_+) \to L^1(\mathbb{R}_+)$ dany wzorem

$$Pf(x) = \int_0^{\lambda x} K(x,y) f(y)\, dy$$

jest operatorem Markowa asymptotycznie stabilnym. Dowód otrzymuje się przy użyciu twierdzenia 1. Mianowicie dzięki założeniu, że $\lambda > 1$ iteracje $P^n f(x)$ dla dużych n są w otoczeniu punktu $x = 0$ dodatnie, co po pewnych rachunkach prowadzi do znalezienia funkcji h.

Warto dodać, że równania postaci (10) pojawiły się przy próbach matematycznego modelowania cyklu komórkowego.

Skoro pewne oszacowania od dołu ciągów $(P^n f)$ decydują o ich asymptotyce, powstaje naturalne pytanie, co się dzieje w przypadku, gdy ciągi te są ograniczone od góry. Zaczniemy od definicji.

Mówimy, że ciąg (f_n), $f_n \in L^1$, jest *asymptotycznie okresowy*, jeśli istnieje ciąg okresowy $(\tilde{f}_n)$, $\tilde{f}_n \in L^1$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - \tilde{f}_n\| = 0.$$

Zachodzi następujące

Twierdzenie 2. *Jeżeli $P : L^1 \to L^1$ jest operatorem Markowa i istnieje funkcja $g \in L^1$, $g \geq 0$ taka, że*

$$\lim_{n\to\infty} \| (P^n f - g)^+ \| = 0 \qquad \textit{dla} \quad f \in D, \tag{11}$$

to dla każdego $f \in D$ ciąg $(P^n f)$ jest asymptotycznie okresowy o okresie nie większym niż $\|g\|$.

W odróżnieniu od poprzedniego, dowód twierdzenia 2 nie jest prosty. Pierwszą wersję dla dość specjalnych klas operatorów podali F. Hoffbauer i G. Keller w 1982 roku. Znacznie ogólniejszy rezultat, z którego twierdzenie 2 natychmiast wynika, podał w pięć lat później, tj. w 1987 roku J. Komornik ([4], [5]).

Warto prześledzić, na czym polegało uogólnienie podane przez Komornika. Otóż wiadomo, że dla $g \in L^1$, $g \geq 0$ zbiór funkcji

$$\{f \in L^1 : \ |f| \leq g\}$$

jest słabo zwarty w L^1. Założenie (11) mówi więc, że wyrazy ciągu $(P^n f)$ dla $f \in D$ zbliżają się przy $n \to \infty$ do pewnego zbioru słabo zwartego. Komornik pokazał, że założenie (11) można zastąpić przez warunek następujący.

Istnieje liczba $0 \leq \lambda < 1$ oraz zbiór $G \subset L^1$ słabo zwarty, takie że

$$\limsup_{n\to\infty} d\,(P^n f, G) \ \leq \ \lambda \qquad \text{dla} \quad f \in D, \tag{11'}$$

gdzie $d(f, G)$ oznacza odległości funkcji f od zbioru G, tj.

$$d(f,G) = \inf\{\|f - \tilde{f}\| : \tilde{f} \ \in \ G\}.$$

Bardzo piękną ilustracją twierdzenia Komornika jest fakt, że nawet małe perturbacje układów dynamicznych powodują, że generowane przez te układy ciągi gęstości są asymptotycznie okresowe. Rozpatrzmy mianowicie w przestrzeni $\mathbb{R}^d$ sperturbowany układ dynamiczny postaci

$$x_{n+1} = S(x_n) + \xi_n \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Zakładamy, że $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ jest odwzorowaniem borelowskim a (ξ_n) ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, które mają gęstość q. Niech f_n oznacza gęstość zmiennej losowej x_n (dla $n \geq 1$). Zakładamy również, że ciąg (ξ_n) jest niezależny od x_0. Wówczas, jak można sprawdzić,

$$f_{n+1} = P f_n \qquad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

gdzie P jest operatorem Markowa danym wzorem

$$Pf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)q(x - S(y))\, dy.$$

Bardzo łatwo podać warunki, przy których spełnione jest założenie (11) lub (11'). Najprostsze, ale w miarę sensowne są takie, że funkcja q jest ograniczona, o nośniku zwartym i zbiór $S(\mathbb{R}^d)$ jest ograniczony. Wówczas jako funkcję g z warunku (11) wystarczy przyjąć

$$g(x) = \begin{cases} \sup q & \text{dla} \quad x \in K, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin K, \end{cases}$$

gdzie $K \subset \mathbb{R}^d$ jest dostatecznie dużą kulą (zawierającą nośniki f_n).

Przejdziemy teraz do ostatniego zagadnienia dotyczącego asymptotyki operatorów Markowa działających na L^1, to jest do alternatywy Foguela. Została ona sformułowana w dosyć specjalnej sytuacji przez S.R. Foguela w 1966 roku. Najogólniej rzecz biorąc mówi ona, że przy pewnych założeniach operator Markowa musi być albo asymptotycznie stabilny albo wymiatający.

Tym razem dla urozmaicenia wykładu zajmiemy się półgrupami operatorów Markowa z czasem ciągłym.

3. Operatory na L^1, asymptotyczna stabilność

Rodzinę P^t, $t \geq 0$, operatorów Markowa nazywa się *półgrupą*, jeżeli spełnia warunki

$$P^0 f = f \quad \text{dla} \quad f \in L^1, \tag{12}$$

$$P^{t_1+t_2} f = P^{t_2}(P^{t_1}) \quad \text{dla} \quad f \in L^1; \quad t_1, t_2 \geq 0. \tag{13}$$

Jednym z ważnych problemów dotyczących półgrupy $(P^t)_{t\geq 0}$ operatorów Markowa jest zachowanie się gęstości $P^t f$ przy $t \to \infty$ dla $f \in D$. W związku z tym przyjmujemy następującą definicję, analogiczną do definicji wprowadzonej w rozdziale 2.

Półgrupę operatorów $(P^t)_{t\geq 0}$ nazywamy *asymptotycznie stabilną*, jeżeli istnieje funkcja $f_* \in D$ taka, że

$$P^t f_* = f_* \quad \text{dla} \quad t \geq 0 \tag{14}$$

oraz

$$\lim_{t\to\infty} \|P^t f - f_*\| = 0 \qquad \text{dla} \quad f \in D. \tag{15}$$

Funkcja f spełniająca warunek $P^t f = f$ dla $t \geq 0$ nosi nazwę *niezmienniczej* lub *stacjonarnej.* Z warunków (14), (15) wynika, że asymptotycznie stabilna półgrupa posiada dokładnie jedną gęstość stacjonarną. Jest rzeczą zaskakującą i specyficzną dla półgrup operatorów Markowa, że stwierdzenie to daje się w pewnym sensie odwrócić. Mianowicie, jak zobaczymy później, istnienie jedynej gęstości niezmienniczej implikuje, przy pewnych dodatkowych założeniach, asymptotyczną stabilność półgrupy.

Warunki wystarczające dla asymptotycznej stabilności są szczególnie proste w przypadku, gdy operatory P^t są określone przy pomocy całek. Wprowadzimy więc następującą definicję.

Operator Markowa P nazywamy *całkowym*, jeśli dany jest wzorem

$$Pf(x) = \int_X K(x,y) f(y) m(dy) \quad \text{dla} \quad f \in D, \quad x \in X, \tag{16}$$

gdzie K jest daną funkcją mierzalną w przestrzeni $X \times X$ i dodatnią. Funkcję K nazywamy *jądrem operatora* P.

Definicja ta jest nieco inna, bardziej restryktywna od oryginalnej, przyjętej w pracy R. Rudnickiego i K. Pichór, [10]. Pozwala za to na bardzo proste sformułowanie ich głównych wyników, zawartych w twierdzeniach 3 i 4.

Twierdzenie 3. *Niech $(P^t)_{t\geq 0}$ będzie półgrupą operatorem Markowa, taką że dla pewnego $t_0 > 0$ operator P^{t_0} jest całkowy. Wówczas istnienie gęstości stacjonarnej dla półgrupy $(P^t)_{t\geq 0}$ implikuje jej asymptotyczną stabilność.*

Podamy teraz przykład zastosowania twierdzenia 3 w teorii równań różniczkowych. Występujące w mim równanie stochastyczne, dane wzorami (17), (18), potrzebne nam jest tylko dla biologicznej interpretacji rozpatrywanego procesu. Interesuje nas głównie ewolucja gęstości określona równaniem (19).

Przykład 1. Najprostszym, w miarę realistycznym modelem wzrostu populacji jest tak zwane równanie logistyczne postaci

$$\frac{dx}{dt} = x(c_1 - x). \tag{17}$$

W równaniu tym $x(t)$ oznacza wielkość populacji w chwili t. Interesują więc nas tylko rozwiązania leżące w półpłaszczyźnie $x > 0$. Przyjrzyjmy się przebiegowi rozwiązań w przypadku, gdy c_1 jest stałą dodatnią. Wówczas wszystkie rozwiązania zmierzają do c_1, przy $t \to \infty$. Oznacza to, że wielkość populacji ustala się i nic tego ustalonego poziomu nie zmienia. Można na to spojrzeć jeszcze inaczej. Z równania (17) wynika, że względny przyrost populacji na jednostkę czasu $(dx/dt)/x$ równy jest $c_1 - x$ i przy ustalonej wartości x jest zawsze taki sam. Żadne zewnętrzne czynniki takie, jak chwilowy niedobór pokarmu lub pojawienie się naturalnych wrogów, tego przyrostu nie zmieniają. Jest to sytuacja bardzo wyidealizowana i pojawia się pytanie, jak zachowuje się wielkość populacji, gdy współczynnik c_1 jest zaburzony przez proces losowy. Przyjmijmy na przykład, że

$$c_1 = c + \sigma\xi, \tag{18}$$

gdzie c i σ są stałymi dodatnimi, a ξ jest procesem białego szumu. Wówczas oczywiście rozwiązaniami równania (17) są procesy losowe.

Procesom tym odpowiada równanie Fokkera-Plancka postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2(x^2 u)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(x(c-x)u) \quad \text{dla} \quad t > 0,\ x > 0. \tag{19}$$

Rozpatrujemy je z warunkiem początkowym

$$u(0,x) = f(x) \quad \text{dla} \quad x > 0, \tag{20}$$

gdzie f jest zadaną funkcją. Równania (17) i (19) związane są w sposób następujący. Jeżeli x jest rozwiązaniem (17) takim, że $x(0)$ ma gęstość rozkładu f, a u jest rozwiązaniem problemu początkowego (19), (20), to dla każdego $t \geq 0$ funkcja $x \to u(t,x)$ jest gęstością rozkładu $x(t)$.

Kładąc

$$P^t f(x) = u(t,x), \tag{21}$$

gdzie u jest rozwiązaniem (19), (20), określamy półgrupę operatorów Markowa na przestrzeni $L^1\big((0,\infty)\big)$. Wiadomo z teorii równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, że wartości rozwiązań $u(t,x)$ przy każdym $t > 0$ dane są całką, w której jądrem jest nieujemna funkcja zwana funkcją Greena. Półgrupa (21) jest więc całkowa.

Łatwo sprawdzić przez różniczkowanie, że dla dowolnej stałej k funkcja f_* dana wzorem

$$f_*(x) = u(x) = kx^\gamma e^{-x/\sigma^2} \quad \text{dla} \quad x > 0, \tag{22}$$

gdzie $\gamma = 2c/\sigma^2 - 2$, jest rozwiązaniem stacjonarnym równania (19). W konsekwencji $P^t f_* = f_*$ dla $t \geq 0$. Dla $\gamma > -1$, to jest w przypadku

$$c > \frac{1}{2}\sigma^2, \tag{23}$$

funkcja f_* jest całkowalna na półprostej $(0, \infty)$ i stałą k można dobrać tak, aby f_* była gęstością. Z twierdzenia 3 wynika, że półgrupa $(P^t)_{t\geq 0}$ generowana przez równanie (19) (dana wzorem (21)) jest wówczas asymptotycznie stabilna.

Zgodnie z naszą interpretacją biologiczną oznacza to, że po upływie dostatecznie długiego czasu wielkość populacji jest zmienną losową o gęstości rozkładu danej wzorem (22). Pozostaje naturalne pytanie, co dzieje się z populacją, gdy nierówność (23) nie jest spełniona. Odpowiemy na nie po zapoznaniu się z dalszą częścią teorii.

Powróćmy do naszej ogólnej sytuacji, w której dana jest przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{A}, m)$.

Niech $(P^t)_{t\geq 0}$ będzie półgrupą operatorów Markowa. Mówimy, że półgrupa $(P^t)_{t\geq 0}$ jest *ciągła*, jeżeli

$$\lim_{t\to 0} \|P^t f - f\| = 0 \qquad \text{dla} \quad f \in L^1.$$

Ciągłość jest bardzo naturalną własnością. W szczególności półgrupy generowane przez równania różniczkowe są z reguły ciągłe. Jest jednak rzeczą godną podkreślenia, że w twierdzeniu 3 nie zakłada się ciągłości półgrupy.

4. Operatory na L^1, wymiatanie

Rozpatrzmy teraz pewną własność półgrup operatorów Markowa, która w pewnym stopniu jest przeciwieństwem asymptotycznej stabilności.

Niech A będzie ustalonym zbiorem mierzalnym. Mówimy, że półgrupa $(P^t)_{t\geq 0}$ jest *wymiatająca* z A, jeżeli

$$\lim_{t\to\infty} \int_A P^t f(x)\, m(dx) = 0 \quad \text{dla} \quad f \in D. \tag{24}$$

W interpretacji probabilistycznej warunek (24) oznacza, że bez względu na rozkład początkowy (dany przez gęstość f) prawdopodobieństwo znalezienia się w chwili t w zbiorze A zmierza do zera przy $t \to \infty$.

Jak widzieliśmy asymptotyczna stabilność jest istotnie związana z istnieniem gęstości stacjonarnej. Nieco podobny warunek dla funkcji niecałkowalnych jest związany z wymiataniem.

Mówimy, że funkcja mierzalna f jest *podniezmiennicza*, jeżeli

$$0 < f(x) < \infty \quad \text{oraz} \quad P^t f(x) \le f(x) \quad \text{dla} \quad x \in X,\ t \ge 0. \tag{25}$$

Warto podkreślić, że występująca w tym warunku funkcja f nie musi należeć do przestrzeni L^1, na której z definicji operatory Markowa są określone. Jednakże korzystając z monotoniczności operatora Markowa łatwo rozszerzyć jego obszar określoności o funkcje mierzalne nieujemne (przez aproksymacje od dołu funkcjami całkowalnymi podobnie, jak to się robi w definicji całki).

Jeżeli funkcja f jest podniezmiennicza i całkowalna, to jest również niezmiennicza. Wynika to z faktu, że operatory Markowa zachowują wartości całki. Następujące twierdzenie wiąże istnienie niecałkowalnej funkcji podniezmienniczej z wymiataniem.

Twierdzenie 4. *Niech $(P^t)_{t\ge0}$ będzie półgrupą operatorów Markowa, taką że dla każdego $t > 0$ operator P^t jest całkowy. Zakładamy, że półgrupa ta ma funkcję podniezmienniczą f_* i nie ma gęstości niezmienniczej. Wówczas półgrupa $(P^t)_{t\ge0}$ jest wymiatająca z każdego zbioru mierzalnego A, który spełnia warunek*

$$\int_A f_*(x)m(dx) < \infty.$$

Nie jest to możliwie najogólniejszy warunek wystarczający dla wymiatania, ale dla naszych celów bardzo przydatny.

Przykład 2. Kontynuujemy rozważania z przykładu 1 i zajmujemy się półgrupą $(P^t)_{t\ge0}$ generowaną przez równanie cząstkowe (19). Jak zauważyliśmy funkcja f_* dana wzorem (22) spełnia równanie $P^t f_* = f_*$ dla $t \ge 0$. W szczególności jest to więc funkcja podniezmiennicza (dla $k > 0$). W przypadku $\gamma < -1$ funkcja f_* nie jest całkowalna i jak łatwo sprawdzić, równanie (19) nie ma gęstości niezmienniczej.
Z drugiej strony z postaci funkcji f_* natychmiast wynika, że

$$\int_r^\infty f_*(x)dx < \infty \quad \text{dla} \quad r > 0.$$

Zgodnie z twierdzeniem 4 półgrupa $(P^t)_{t\ge0}$ jest więc wymiatająca z przedziałów (r, ∞) dla $r > 0$. Innymi słowy

$$\lim_{t\to\infty}\int_r^\infty P^t f(x)dx = 0 \quad \text{dla} \quad r > 0.$$

Wracając do naszej biologicznej interpretacji oznacza to, że w przypadku $\gamma \leq -1$, gdy nie jest spełniona nierówność (23), populacja wymiera. Zbyt duże wahania współczynnika c_1 prowadzą więc do śmierci populacji.

Jak już o tym mówiliśmy twierdzenia 3 i 4 nie są sformułowane w postaci możliwie ogólnej. Nie wyczerpują też wszystkich możliwości badania asymptotycznej stabilności i wymiatania. Dają jednak pewien obraz tego, co było przedmiotem naszych badań. Natomiast równanie (19) jest bardzo proste i omawiane tylko dlatego, że można było przy jego pomocy łatwo pokazać skuteczność działania ogólnych kryteriów. Znacznie ogólniejsze równania i układy równań różniczkowych i różniczkowo operatorowych badane były przez K. Pichór i R. Rudnickiego oraz M. Tyran-Kamińską w [11] i [12]. Równania tego typu występują przy opisie zjawisk z zakresu biomatematyki, fizyki a nawet astrofizyki.

Podziękowanie. Autor chciałby złożyć serdeczne podziękowanie Dr Krystynie Skórnik za pomoc w zredagowaniu tego wykładu.

Literatura

1. K. Baron, A. Lasota, *Asymptotic properties of Markov operators defined by Volterra type integrals*, Ann. Polon. Math. **58** (1993), 161–175.
2. S.R. Foguel, *The Ergodic Theory of Markov Processes*, Van Nostrand–Reinhold, New York, 1969.
3. D. Jama, *Asymptotic stability of an integro-differential equation of parabolic type*, Ann. Polon. Math. **47** (1986), 65–78.
4. J. Komornik, *Asymptotic periodicity of the iterates of weakly constrictive Markov operators*, Tohôku Math. J. **38** (1986), 15–27.
5. J. Komornik, A. Lasota, *Asymptotic decomposition of Markov operators*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **35** (1987), 321–327.
6. A. Lasota, J.A. Yorke, *Exact dynamical systems and the Frobenius–Perron operator*, Trans. Amer. Math. Soc. **273** (1982), 375–384.
7. A. Lasota, M.C. Mackey, *Chaos, Fractals and Noice, Stochastic Aspects of Dynamics*, Springer Verlag, New York, 1995.
8. E. Nummelin, *General Irreducible Markov Chains and Non–Negative Operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
9. K. Pichór, *Asymptotic stability of a partial differential equation with an integral perturbation*, Ann. Polon. Math. **68** (1998), 83–96.

10. K. Pichór, R. Rudnicki, *Asymptotic behaviour of Markov semigroups and applications to transport equations*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **45** (1997), 379–397.
11. K. Pichór, R. Rudnicki, *Continuous Markov semigroups and stability of transport equations*, J. Math. Anal. Appl. **249** (2000), 668–685.
12. R. Rudnicki, K. Pichór, M. Tyran-Kamińska, *Markov semigroups and their applications.* In *Dynamics of Dissipation*, (eds.: P. Garbaczewski, T. Olkiewicz) Lectures Notes in Physics **597** (2002), 215–238, Springer-Verlag, Berlin.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Śląski
Bankowa 14
40-007 Katowice