

## XII Śląski Konkurs Matematyczny

23 marca 2015 r.

zawody finałowe

czas: 120 minut

### Zadanie 1. (6 pkt.)

Dane są takie liczby rzeczywiste  $x$ ,  $y$  i  $z$ , że spełnione są równości

$$x + y = z + 2015 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 = z^2 + 2015^2.$$

Wykaż, że liczby  $x$ ,  $y$  i  $z$  spełniają też równość

$$x^3 + y^3 = z^3 + 2015^3.$$

### Zadanie 2. (6 pkt.)

Przekątne  $AC$  i  $BD$  czworokąta wypukłego  $ABCD$  przecinają się w punkcie  $O$ . Pola trójkątów  $ABO$ ,  $BCO$ ,  $CDO$  i  $DAO$  są równe odpowiednio  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  i  $S_4$ . Wykaż, że jeśli

$$\frac{S_1 + S_3}{2} = \sqrt{S_2 S_4},$$

to czworokąt  $ABCD$  jest trapezem.

### Zadanie 3. (6 pkt.)

Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , spełniające równanie

$$a^4 + b^4 + 444 = c^4.$$

### Zadanie 4. (6 pkt.)

Liczby  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  są nieujemne, a ich suma jest równa 1. Wykaż, że spełniona jest nierówność

$$x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_5 + x_4 x_5 x_6 + x_5 x_6 x_1 + x_6 x_1 x_2 \leq \frac{1}{27}.$$

### Zadanie 5. (6 pkt.)

Dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach  $B$  i  $C$  trójkąta  $ABC$  przecinają boki  $AC$  i  $AB$  w punktach odpowiednio  $B_1$  i  $C_1$ . Środek okręgu opisanego na trójkącie  $C_1 C B_1$  leży na prostej  $AB$ . Wyznacz miarę kąta  $ABC$ .

*Powodzenia!*

## XII Śląski Konkurs Matematyczny

23 marca 2015 r.

zawody finałowe

czas: 120 minut

### Zadanie 1. (6 pkt.)

Dane są takie liczby rzeczywiste  $x$ ,  $y$  i  $z$ , że spełnione są równości

$$x + y = z + 2015 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 = z^2 + 2015^2.$$

Wykaż, że liczby  $x$ ,  $y$  i  $z$  spełniają też równość

$$x^3 + y^3 = z^3 + 2015^3.$$

### Zadanie 2. (6 pkt.)

Przekątne  $AC$  i  $BD$  czworokąta wypukłego  $ABCD$  przecinają się w punkcie  $O$ . Pola trójkątów  $ABO$ ,  $BCO$ ,  $CDO$  i  $DAO$  są równe odpowiednio  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  i  $S_4$ . Wykaż, że jeśli

$$\frac{S_1 + S_3}{2} = \sqrt{S_2 S_4},$$

to czworokąt  $ABCD$  jest trapezem.

### Zadanie 3. (6 pkt.)

Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , spełniające równanie

$$a^4 + b^4 + 444 = c^4.$$

### Zadanie 4. (6 pkt.)

Liczby  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  są nieujemne, a ich suma jest równa 1. Wykaż, że spełniona jest nierówność

$$x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_5 + x_4 x_5 x_6 + x_5 x_6 x_1 + x_6 x_1 x_2 \leq \frac{1}{27}.$$

### Zadanie 5. (6 pkt.)

Dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach  $B$  i  $C$  trójkąta  $ABC$  przecinają boki  $AC$  i  $AB$  w punktach odpowiednio  $B_1$  i  $C_1$ . Środek okręgu opisanego na trójkącie  $C_1 C B_1$  leży na prostej  $AB$ . Wyznacz miarę kąta  $ABC$ .

*Powodzenia!*