(III)

Wiedza: teorie, komunikowanie, przekazywanie informacji

[**Czym jest wiedza**] Co to takiego wiedza? To pytanie od zawsze było, jest nadal i zawsze będzie intrygującym oraz żywotnym problemem. Pytanie to nigdy nie doczekają się zadowalających odpowiedzi. Wiedział to już Platon. Dla potwierdzenia tego przytoczmy fragment z dialogu „*Teajtet”*.

Sokrates: *Uważaj no, rozejrzyj się, aby ktoś niewtajemniczony nie podsłuchiwał. A tacy są ci, którzy uważają, że nie istnieje nic innego, jak tylko to, co mogą mocno w ręce uchwycić, a wcale nie wierzą, żeby istniały jakieś tam działania, powstania i w ogóle cokolwiek, czego się nie widzi.*

Z wypowiedzi Sokratesa wnioskujemy, że do wiedzy zaliczamy niewątpliwie to, co potrafimy weryfikować przy pomocy zmysłów: dotyku – „co mogą mocno w ręce uchwycić", wzroku – „cokolwiek, czego się nie widzi". Dochodzą do tego pozostałe zmysły słuch, smak i zapach. Kontynuując w tym duchu, do wiedzy należy dodać fakty, które umiemy mierzyć lub weryfikować przy pomocy instrumentów pomiarowych. Taki zakres wiedzy nie wszystkich zadawala. Potrzebne są jeszcze związki przyczynowo skutkowe – „wcale nie wierzą, żeby istniały jakieś tam działania, powstania ". Związki przyczynowo skutkowe nie są obiektywne. Są podporządkowywane przeróżnym celom. W zasadność jakiegokolwiek celu, w tym sens jego istnienie, trzeba wierzyć. Wierzenia to zawsze coś subiektywnego, coś podporządkowanego dominującemu światopoglądowi.

[Potrzeba usystematyzowania] Czy wiedza musi być usystematyzowana teorią? Ważnymi jej atrybutami są sposoby przetwarzania, zasady komunikowania oraz przekazywania informacji. Zespoły, które nie potrafią zharmonizować swojej strategii - cele zespołu, z taktyką - indywidualne cele zawodników, są skazane na dotkliwe porażki. Dotyczy to także całych narodów. Bywają narody, które w oficjalnej propagandzie „scementowane" są wspólnym „chceniem", np. jakąś odmianą ideologii religijnej. Takie chcenie to tylko dodatkowy balast. Okazuje się, że za przyczyną wadliwego komunikowania się - wszyscy mówią to samo, a każdy po cichu robi swoje. Wtedy strategia i taktyka zamiast harmonicznie wspomagać się w unikaniu błędów, wzajemnie wspomagają się w nie reagowaniu na pomyłki. Skoro tak, to zastanówmy się nad zasadami budowy teorii. Nad przyczynami tego, że wiele popularnych teorii – w szczególności tych, co zawierają tezy natury ideologicznej, ma niewiele wspólnego z rzeczywistością. Są werbalnie akceptowane oraz w praktyce odrzucane, albo są demonstrowane jako rytualne czyny i gesty. Innymi słowy, wszyscy przestrzegają zasad tzw. poprawności politycznej, będąc jednocześnie przekonanym, że ta poprawność jest dla nich jedynie udręką.

[**Właściwości teorii**] Jakiś fragment wiedzy powinien być obowiązującym kanonem dla wszystkich. To, co od czasów Platona przetrwało w tym zakresie dobrze odzwierciedla inny cytat z „*Teajteta*".

Sokrates: *A to posłuchaj, co znowu mnie się śniło. Zdawało mi się, że słyszałem od kogoś tam, jak mówiono, że pierwsze składniki proste czegokolwiek, z których i my się składamy, i wszystko inne, ująć się ściśle nie dają. Każdy taki pierwiastek sam w sobie można tylko nazwać a nic innego więcej nie można o nim powiedzieć; ani że jest, ani że go nie ma. Bo to by znaczyło doczepiać mu istnienie lub nieistnienie, a tu nic mu nie wolno dodawać, skoro ktoś tylko sam pierwiastek wymienia. Zatem ani że to jest to samo, ani że tamto, ani każde, ani jedno, ani to tutaj, tego mu doczepiać nie można, ani wielu innych takich określeń. Bo te słowa, będące w powszechnym obiegu, przysługują wszystkim rzeczom i są czymś innym niż to, czemu przysługują. Atu, jeśli by to było możliwe, trzeba, żeby taki pierwiastek miał swoje*

własne ścisłe ujęcie i żeby się w jego nazwie obywać bez wszystkiego innego. Otóż nie ma możliwości, żeby którykolwiek z pierwiastków ściśle ująć słowami, bo on nie ma ścisłego ujęcia, on się tylko nazywa i koniec. Ma jedynie tylko nazwę. Dopiero rzeczy z tych pierwiastków złożone tak, jak same są układami, splotami, taki nazwy ich stanowią ujęcia złożone. Bo splecenie wyrazów stanowi istotę ścisłego ujęcia. W ten sposób pierwiastki nie nadają się do ścisłego ujmowania i poznawać ich nie można; można je tylko spostrzegać. Dopiero układy pierwiastków można poznawać i wypowiadać i w sądach prawdziwych je oceniać. A kiedy ktoś uchwyci o czymś sąd prawdziwy, ale bez ścisłego ujęcia, wtedy jego dusza dotyka prawdy w tym przedmiocie, ale go nie poznaje. Bo kto nie potrafi dać i przyjąć ścisłego ujęcia czegoś, ten nie posiada wiedzy o tym. Dopiero gdy się do tego dołączy ścisłe ujęcie, może się to wszystko zrobić i człowiek staje się doskonalszy, bo osiąga wiedzę. Czyś ty tak ten sen słyszał, czy inaczej?
Według Sokratesa istota poznania to ścisłe ujęcie. Najściślejszego ujęcia nie ma, a więc można jedynie ścisłość ujęcia doskonalić. Innymi słowy, można jedynie przybliżać się do prawdy.

[**Elementy Euklidesa**] W rozwoju dowolnej gałęzi wiedzy - dowolnej teorii, każda definicja, pojęcie lub relacja pociąga za sobą inne definicje, pojęcia lub relacje. Za wyjątkiem szkoły cyników: uczniów i naśladowców Antystenasa; powszechnie przyjmuje się, że jest naturalna droga, która pozwala uniknąć wyjaśnień na zasadzie błędnego koła. Błędne koło polega na objaśnianiu podmiotu przy pomocy podmiotów, przy objaśnianiu których używaliśmy objaśniany podmiot. Taka droga polega na przyjęciu *podstawowych* - niektórzy autorzy piszą *pierwotnych*; pojęć i relacji bez podawania ich definicji. Także niektóre podstawowe twierdzenia, zwane *aksjomatami*, muszą być przyjęte bez dowodu. Pierwszym pisemnym traktatem naukowym, który taką drogą podąża to „*Elementy*" Euklidesa z Aleksandrii. Traktat „*Elementy*" zawiera trzynaście ksiąg. O pierwszych sześciu z nich można powiedzieć, że zajmują się odpowiednio trójkątami, prostokątami, okręgami, wielokątami, proporcją i podobieństwem. Następne cztery księgi dotyczą teorii liczb – między innymi Euklides dowodzi tam, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych oraz, że 2 nie jest kwadratem liczby wymiernej. Kolejna księga jest wprowadzeniem do geometrii brył. Księga przedostatnia zajmuje się ostrosłupami, stożkami i walcami. Księga ostatnia, tj. trzynasta, zajmuje się wielościanami foremnymi. W ostatniej księdze Euklides dowodzi, że jest tylko pięć wielościanów foremnych: czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan oraz dwudziestościan. Euklides nie wyszczególnił przyjętych przez siebie podstawowych pojęć i relacji, ale zadowolił się ich objaśnianiem w języku potocznym, przy pomocy powszechnie używanych nazw.

[**Język powszechnie zrozumiały**] Byłoby przesadą utrzymywać, że „*Elementy*" przy objaśnianiu podstawowych pojęć i relacji używają języka zrozumiałego dla każdego. Przecież intuicje niezbędne dla korzystania z liczb mogą powstać jedynie u osoby, która nauczyła się posługiwać pieniędzmi lub styka się z potrzebami i wymaganiami pracy zespołowej. Także dowolna osoba, która nie ma doświadczeń w zakresie pracy warsztatu rzemieślniczego, lub przynajmniej z towarami produkowanymi maszynowo, może w całym swoim życiu nie zobaczyć idei jakiejkolwiek figury lub bryły rozważanej w „*Elementach*". Potwierdza to regułę, iż przy wyróżnianiu logiki: fragmentu wiedzy, który przyjmujemy jako oczywisty; zwykle możemy spodziewać się jakiejś drobnej wady. Nawet jeśli logice przyporządkujemy prawdopodobieństwo zaufania jeden, to wszystko to co przy pomocy logiki rozpoznamy będzie miało prawdopodobieństwo braku wad mniejsze niż jeden!

[**Nie definiujemy pojęć pierwotnych**] O „Elementach” wiadomo na pewno jedynie tyle, że zostały napisane około 300 roku p. n. e. Zgromadzono w nich wiele wyników Eudoksosa oraz udoskonalono liczne twierdzenia znane ówczesnym matematykom, dowodząc bezspornie te z nich, których dowody były wcześniej zaledwie naszkicowane. Gdyby przyjąć, iż była to praca zbiorowa, to wtedy Euklides z Megary [filozof współczesny Platonowi i jeden z uczestników dialogu „*Teajtet*”] mógłby być pierwowzorem dla zbiorowego autora „Elementów”. Jednakże co do spraw, które miały miejsce XXIII wieki temu nie ma bezspornych dowodów, a więc możliwe, że Euklides z Aleksandrii nigdy nie był w Megarze. Także priorytet – w zakresie traktatów pisanych; Platona co do wyżej omówionej drogi unikania błędnego koła nie jest oczywisty. Był tego świadom Platon, gdyż stosowny fragment zaczyna się zdaniem „A to posłuchaj, co znowu mnie się śniło”. W niektórych tekstach religijnych pojęcie boga bywało używane tak, jakby było pojęciem podstawowym, które nie ma nawet nazwy. Precedensem być może jest drugie przykazanie Dekalogu [autorstwa Mojżesza?]: *Nie będziesz wzywał imienia Pana, Boga twego, do rzeczy czczych* (...); i fragmenty „*Biblii*”, w których imię Boga zostało zastąpione słowem *Jahwe*.

[**Bryły platońskie**] Znajdź w literaturze – lub wymyśl sam; a następnie powtórz dowód następującego twierdzenia Euklidesa. *Jest tylko pięć różnych brył platońskich*. Innymi słowy, poza czworościanem, sześcianem, ośmiościanem, dwunastościanem oraz dwudziestościanem nie ma wielościanów o własnościach: każda ściana ma tyle samo krawędzi; z każdego wierzchołka wychodzi tyle samo krawędzi. **Pytania dla „dociekliwych”.** Według mistycznych związków przypisywanych bryłom platońskim cztery z nich są powiązane z czterema żywiołami: ogniem, ziemią, powietrzem oraz wodą. Jak te bryły odpowiadają żywiołom? Która z brył została pominięta? Jaka mogłaby być „dusza” wiążąca bryły platońskie z żywiołami?

[Bryły platońskie – dowody] Bryły platońskie to wielościany takie, że każda ściana ma tyle samo krawędzi oraz z każdego wierzchołka wychodzi taka sama ilość krawędzi. Najważniejszym elementem teorii brył platońskich jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Bryłami platońskimi są: czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan oraz dwudziestościan.*

Na okręgu zaznaczamy wierzchołki sześciokąta foremnego. Łączymy je odcinkami ze środkiem okręgu. Dostajemy sześć trójkątów równobocznych. Fragmenty takiego sześciokąta użyjemy do konstruowania trzech brył platońskich.

[Czworościan] Trzy kolejne trójkąty sklejamy skrajnymi bokami wychodzącymi ze środka okręgu. Dostajemy powierzchnię boczną czworościanu, którego podstawą jest także trójkąt równoboczny. W tym czworościanie każda ściana jest trójkątem równobocznym, ma on cztery wierzchołki, a w każdym z tych wierzchołków schodzą się trzy krawędzie.

[Ośmiościan] Sklejamy cztery kolejne trójkąty skrajnymi bokami wychodzącymi ze środka okręgu. Dostajemy powierzchnię boczną ostrosłupa o podstawie będącej kwadratem. Dwa takie ostrosłupy sklejamy podstawami i dostajemy ośmiościan, którego ściany są trójkątami, zaś w każdym z sześciu wierzchołków schodzą się cztery krawędzie.

[Dwudziestościan] Gdy skleimy pięć kolejnych trójkątów skrajnymi bokami wychodzącymi ze środka okręgu oraz do wolnego boku każdego z tych trójkątów dokleimy bok przystającego do niego trójkąta, to dostaniemy siatkę złożoną z dziesięciu trójkątów. Dwie takie siatki sklejamy, dolepiając wierzchołki doklejanych trójkątów do wierzchołków wyjściowego sześciokąta, w którym w wyniku wcześniejszego sklejenia zanikł jeden z wierzchołków.

Dostaniemy dwudziestościan, którego ściany są trójkątami oraz w każdym z dwunastu wierzchołków schodzi się pięć krawędzi.

[Sześcian] Pozostały do opisania jeszcze dwie bryły platońskie. Ale zasady ich konstrukcji zaczynają się klarować. Zauważmy, że każdy wierzchołek bryły platońskiej tworzy kąt bryłowy, który powstaje z siatki położonej na płaszczyźnie. Dla otrzymania sześcianu zaznaczamy kwadrat. Do każdego boku tego kwadratu doklejamy bok kwadratu do niego przystającego. Gdy skleimy po dwa boki z doklejonych kwadratów, ale wychodzące z tego samego wierzchołka, to pozostanie nam dokleić szósty kwadrat w postawie. Dostajemy sześcian, którego ściany to kwadraty, zaś w każdym z ośmiu wierzchołków schodzą się trzy krawędzie.

[Dwunastościan] Wśród wielokątów foremnych pozostał tylko pięciokąt o własności takiej, że gdy w jednym punkcie płaszczyzny zechcemy zetknąć co najmniej trzy przystające wielokąty foremne, to pozostanie możliwość sklejenia boków tak, aby dostać kąt bryłowy. Trzy sześciokąty foremne nie dają możliwości na utworzenie kąta bryłowego, bo taki kąt musiałby być płaski. Zaś wielokątów o większej ilości kątów nie uda się ułożyć na płaszczyźnie tak, by stykały się co najwyżej bokami i trzy z ich miały wspólny wierzchołek. Gdy do każdego boku pięciokąta foremnego dokleimy pięciokąt przystający oraz zlepimy boki dolepionych pięciokątów wychodzące z tego samego wierzchołka, to dostaniemy siatkę złożoną z sześciu pięciokątów. Dwie takie siatki możemy skleić, doklejając wolne wierzchołki pięciokątów do wierzchołków, które powstały ze sklejenia przy tworzeniu siatki tylko dwu wierzchołków. Dostajemy dwunastościan, które ściany są pięciokątami oraz w każdym z dwudziestu wierzchołków schodzą się trzy krawędzie.

[Właściwości płaszczyzny] Dla płatnerza, który w czasach Platona zajmował się wytwarzaniem zbroi np. z brązowej blachy, a więc dla fachowca, który jest przekonany o poprawności użytych w powyższych rozważaniach własności płaszczyzny lub przestrzeni dowód twierdzenia można uznać za wystarczający, bo zostały wyczerpane wszelkie możliwości. Ale „na wszelki wypadek” dodajmy sprawdzenie wykorzystujące liczby.

[Bryły platońskie, dowód Eulera] Pomyślmy sobie bryłę platońską. Przyjmijmy, że $w > 2$ jest ilością jej wierzchołków, $k > 2$ ilością jej krawędzi, zaś niech s będzie ilością jej ścian.

[Wzór Eulera] Nazwijmy równanie $w + s = k + 1$ duszą siatki bryły. Równanie to w literaturze bywa nazywany wzorem Eulera i nietrudno przekonać się o jego prawdziwości. Mianowicie, pojedyncza ściana bryły jest wielokątem, w którym jest tyle samo wierzchołków co krawędzi. Dla takiej ściany $s = 1$, a więc dla niej równanie jest spełnione. Dowolna bryła to obszar ograniczony siatką złożoną ze ścian. Taka siatka powstaje z ciągu siatek: jest ostatnim wyrazem ciągu; którego kolejne wyrazy są tworzone następująco. Do jakiejś krawędzi siatki doklejamy krawędzią nową ścianę albo sklejamy dwie krawędzie siatki wychodzące z jednego wierzchołka tak, aby powstał kąt bryłowy. Gdy doklejamy nową ścianę, to dla nowej siatki s jest zwiększone o 1 oraz przybywa o jedną krawędź więcej niż wierzchołków. Jeśli jedynie sklejamy dwie krawędzie, tworząc kąt bryłowy, to ubywa jedna krawędź oraz jeden wierzchołek. W obu przypadkach równanie pozostaje spełnione. W konsekwencji musi być ono spełnione dla każdej bryły, która ma skończoną ilość ścian. Zauważmy, że w bryle jest o jedną krawędź mniej, niż w siatce jej ścian. Jest tak, dlatego że siatka powstaje, gdy bryłę rozetniemy wzdłuż jednej krawędzi. Czyli wzór Eulera dla bryły to $w + s = k + 2$.

[Dowód Eulera – ciąg dalszy] Skoro pomyślana przez nas bryła jest platońska, to możemy jej duszę poszerzyć o dwa nowe równania

$$w\,t = 2k = s\,p,$$

gdzie *t* oznacza liczbę krawędzi schodzących się w jednym wierzchołku, zaś *p* ilość boków w pojedynczej ścianie. Nowe równania dzielimy stronami przez *2k* i wyliczamy z nich wzory na ułamki *1/t* oraz *1/p*. Te ułamki wstawiamy do przekształconego wzoru Eulera, gdzie przekształcenie polega na dzieleniu stronami przez *2k* oraz skreśleniu ostatniego składnika z prawej strony. Dostajemy nierówność

$$1/t + 1/p > 1/2,$$

która może być spełniona, o ile z lewej strony mamy 1/3 + 1/3 lub 1/4 + 1/3 lub 1/5 + 1/3 lub 1/3 + 1\4 lub 1/3 + 1/5. Sumy ułamków odpowiadają kolejno czworościanowi, ośmiościanowi, dwudziestościanowi, sześcianowi oraz dwunastościanowi.

[Pierwszy spisany w literaturze dowód] Dla zilustrowania pożytku, jaki z urody, prostoty oraz niemal oczywistej niesprzeczności teorii brył platońskich uczynił sam Platon przytoczymy fragmenty dialogu „*Timaios*".

Przede wszystkim więc, że ogień i ziemia, i woda, i powietrze są ciałami, to chyba jasne i to każdemu. Wszelka postać ciała posiada i głębokość. A znowu głębokość musi koniecznie obejmować naturę płaszczyzny. (...)

Więc trzeba powiedzieć, jakie by to mogły cztery najpiękniejsze ciała, niepodobne do siebie nawzajem, ale takie, żeby przez rozkład jednego mogło powstać inne. Wtedy nikomu nie przyznamy, że są gdzieś widzialne ciała piękniejsze od tych – każde w swoim rodzaju. Więc trzeba się starać zestawić i dopasować do siebie cztery rodzaje ciał osobliwej piękności, i powiedzieć sobie, żeśmy należycie uchwycili ich naturę. (...)

Rozpocznie pierwsza postać i składnik najmniejszy. Jej najprostszym składnikiem jest trójkąt, (...)

[Czworościan] *A cztery trójkąty równoboczne, zestawione razem tak, żeby się schodziły po trzy kąty płaskie, tworzą jeden kąt bryłowy, który następuje z kolei po najbardziej rozwartym z kątów płaskich. Kiedy się utworzy takie cztery kąty bryłowe, powstaje pierwsza postać bryły,* (...)

[Ośmiościan] *Jeśli się złoży osiem trójkątów równobocznych, wytwarza jeden kąt bryłowy z czterech ścian płaskich. Kiedy się zrobi sześć takich kątów bryłowych, zamyka się znowu druga bryła.*

[Dwudziestościan] *Trzecia, z dwukrotnego zestawienia sześćdziesięciu trójkątów elementarnych, posiada dwanaście kątów bryłowych – każdy z tych kątów tworzy pięć trójkątów równobocznych. Bryła ma dwadzieścia ścian – wszystkie są trójkątami równobocznymi.* [Sześcian] *Zrodziwszy te bryły, wyczerpał się jeden ze składników elementarnych, a trójkąt równoramienny zrodził naturę czwartej bryły – po cztery takie trójkąty złożyły się na jedną jej ścianę, a skierowały swoje kąty proste do jej środka, tworząc jeden czworobok równoboczny. Kiedy się sześć takich czworoboków złożyło, utworzyły osiem kątów bryłowych - każdy kąt zbudowany z trzech ścian.*

[Dwunastościan] *Jest jeszcze jedna kombinacja, piąta z rzędu; bóg użył jej do wymalowania wszechświata.* (...)

Więc według myśli słusznej i wedle prawdopodobnej niech będzie postać bryły czworościanu elementarnym składnikiem i nasieniem ognia. Druga według pochodzenia bryła to, powiedzmy, zarodek powietrza, a trzecia wody. (…)

Wynikła z tego postać sześcianu, który ma sześć podstaw – każda jest płaszczyzną czworoboczną.

[**Aksjomaty teorii liczb**] Zasady tworzenia teorii aksjomatycznej zilustrujmy na przykładzie aksjomatyki *liczb rzeczywistych*. Przyjmujemy, że w wśród liczb rzeczywistych są wykonywalne dwa działania: *dodawanie* $x + y$ oraz *mnożenie* xy. Działania te spełniają prawa *przemienności* i *łączności*:

$$x + y = y + x, \qquad xy = yx;$$
$$(x + y) + z = x + (y + z), \qquad (xy)z = x(yz).$$

Ponadto mnożenie jest *rozdzielne* względem dodawania: $x(y + z) = xy + xz$.

Dwie różne liczby **0** oraz **1** są wyróżnione. Liczby te są elementami neutralnymi dodawania i mnożenia: $x + \mathbf{0} = x$ oraz $x\mathbf{1} = x$.

Przyjmujemy, że wśród liczb rzeczywistych zawsze jest wykonywalne *odejmowanie*, a więc równanie $\mathbf{a} + x = \mathbf{b}$ ma zawsze rozwiązanie: gdy ustalimy liczby **a** oraz **b** to dobierzemy liczbę x tak, aby równanie było spełnione.

Przyjmujemy, że wśród liczb rzeczywistych zawsze jest wykonywalne d*zielenie*, za wyjątkiem dzielenia przez zero. Inaczej mówiąc, równanie $\mathbf{a}x = \mathbf{b}$ ma zawsze rozwiązanie, o ile liczba **a** jest różna od **0**.

Prócz aksjomatów dotyczących działań przyjmujemy aksjomaty relacji liniowego uporządkowania: $x < y$. Przyjmujemy, że zawsze spełnione jest prawo: $x < y$ lub $y < x$.

Relacja liniowego porządku jest *przechodnia*: warunki $x < y$ oraz $y < z$ pociągają $x < z$.

Relacja liniowego porządku jest *asymetryczna*: jeśli $x < y$, *to nie zachodzi* $y < x$.

Warunek $x < y$, pociąga $x + z < y + z$.

Zaś warunki $x < y$ oraz $\mathbf{0} < z$, pociągają $xz < yz$.

Ostatnim aksjomatem teorii liczb rzeczywistych, który przyjmujemy, jest zasada ciągłości: *Monotoniczny i ograniczony ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny*.

[Aksjomatyzacja – podstawa ścisłego ujęcia] W aksjomatycznej teorii liczb rzeczywistych podstawowymi pojęciami są działania dodawania i mnożenia, relacja liniowego uporządkowania, liczby **0** oraz **1**. Domyślnym pojęciem podstawowym jest niewątpliwie liczba rzeczywista. Do logiki niezbędnej dla tej teorii zaliczamy język przy pomocy którego spisaliśmy aksjomaty. Właściwości relacji równości oraz prawa posługiwania się zbiorami są założone w logice. Do logiki należą także zasady ustalania zdań prawdziwych: praw które spełniają liczby rzeczywiste. Wyszukiwanie praw które spełniają liczby rzeczywiste, to zakres należący do matematyki. W zakres ten wchodzi także definiowanie nowych pojęć, czyli wprowadzanie nazw, które zastępują przydługawe zdania. Wypisując aksjomaty liczb rzeczywistych podaliśmy definicje: przemienności, łączności, odejmowania, dzielenia, przechodniości, asymetryczności. Także zasada ciągłości zakłada, że potrafimy określić, co to takiego ciąg zbieżny, ciąg monotoniczny oraz ciąg ograniczony – przytoczenie stosowych definicji pozostawiamy czytelnikowi. Kontynuując tak dalej powinniśmy dodać, że ze statystyką będziemy mieli do czynienia, gdy zaczniemy stosować teorię liczb rzeczywistych poza tą teorią. Czy aby na pewno dopiero wtedy?

[Pitagoras] Zgodnie z założeniami filozofii Pitagorasa wszelkie myślenie powinno opierać się na liczbach. O Pitagorasie słyszał prawie każdy Europejczyk. Nie zachowały się pisemne rozprawy tego filozofa. Jednakże miał on znaczący wpływ na rozwój kultury europejskiej. Dla przykładu przytoczmy dwa cytaty z „*Zagadnień*" Arystotelesa.

Frg. 18): *A teraz możemy po prostu zapytać: dla których to spośród wielu istniejących rzeczy Natura i Bóg powołali nas do życia? Zapytany o to Pitagoras odpowiedział: „ażeby oglądać niebiosa" i dodawał, „że jest obserwatorem natury i w tym właśnie celu został powołany do życia".*

Frg. 20): *Zgodnie z tym argumentem Pitagoras miał rację gdy twierdził, że każdy człowiek został stworzony przez Boga w tym celu, ażeby poznawać i oglądać.*

Dociekanie prawdy – proszę nie mylić z wulgarnym podglądaniem - to popularna postawa światopoglądowa.

[Właściwości liczb nie mogą być ujęte w jednej teorii] Realizacja postulat Pitagorasa zaowocowała teoriami różnego rodzaju liczb. Określane właściwości mają liczby naturalne, liczby całkowite, liczby wymierne, liczby algebraiczne, liczby przestępne [np. e lub π], liczby rzeczywiste, liczby zespolone, wektory, macierze itd. Okazuje się, że gdyby zebrać wszelkie właściwości liczb, to byłaby to kolekcja praw wzajemnie sprzecznych. Przykładowo, gdy przez ***i*** oznaczymy liczbę zespoloną taką, że ***i i*** **= -1**, to sprawdzany, że ***i* < 0** pociąga **0** < - ***i***; **0** < - ***i*** pociąga **0** < - **1** oraz **0** < ***i*** pociąga **0** < - **1**: czyli rozszerzenie liczb naturalnych (rzeczywistych) polegające na traktowaniu ***i*** tak, jakby była liczbą rzeczywistą prowadzi do nie spełniania aksjomatów liniowego porządku. Trudniejsze rozumowanie jest potrzebne, aby przekonać się, że nie ma możliwości dla przemiennego mnożenia wektorów nad ciałem liczb rzeczywistych, o ile wektory będą miały co najmniej trzy współrzędne.

Ćwiczenie: Iloczyn wektorowy, jest nieprzemiennym mnożeniem wektorów. Dlaczego nie można wprowadzić przemiennego mnożenia wektorów w przestrzeni trójwymiarowej?

[Mnożenie macierzowe] Także mnożenie macierzy, z przykładami stykamy się przy okazji zakupów detalicznych, nie jest przemienne. Takie mnożenie dokonywane bywa przy wystawianiu rachunku. Macierze mnożymy według wzoru

$$c(i,j) = a(i,1)b(1,j) + a(i,2)b(2,j) + ... + a(i,n)b(n,j),$$

gdzie i-ty klient w j-tej kasie płaci kwotę c(i,j) za towary o cenach jednostkowych a(i,1), a(i,2), ... , a(i,n) zakupione w ilościach b(1,j), b(2,j), ... , b(n,j). Brak przemienności jest naturalną konsekwencją tego, że role kupującego i sprzedającego są odmienne.

[Problem z niesprzecznością] Wyżej przytoczone kontrprzykłady prowadzą do czysto statystycznego problemu: **Kiedy teoria nie zawiera dwu wzajemnie wykluczających się praw**? Teorię tworzy się po to, aby z niej korzystać. Prawa teorii potrzebne są do tego by ustalić dalszy sposób postępowania, które takie prawa zalecają. Gdyby prawa teorii zalecały, iż mamy coś zrobić i jednocześnie tego nie robić, to taka teoria natychmiast staje się bezużyteczna.

[Skąd wiara w niesprzeczność] Gdy rozważymy konkretny rodzaj liczb, to zakładamy, że teorię takich liczb z pokolenia na pokolenie testują uczniowie, nauczyciele oraz badacze. Wtedy myślimy, że gdyby udało się nam odkryć dwa wzajemnie wykluczające się prawa, to na pewno by je ktoś odkrył wcześniej. Takim odkryciem natychmiast by się pochwalił, a więc byłoby ono rozpowszechniane i wszyscy by je znali. Znawcy zmodyfikowaliby teorię tak, aby problemu nie było. Czyli my testowalibyśmy teorię zmodyfikowaną. Stąd wniosek, że nasze możliwości są a tyle skromne, iż brakiem pewności, co do braku wadliwości dobrze znanej teorii nie musimy się przejmować. Ale gdy posługujemy się maszynami matematycznymi, które z roku na rok mają większe możliwości obliczeniowe; gdyby nasz najnowszy komputer będzie miał moc obliczeniową większą niż wszystkie inne komputery, które wcześniej zbudowano; to wtedy wszelka wiara w brak wad w jakiejkolwiek teorii zaczyna mieć kruche podstawy. Nasz nowy komputer przeprowadzi zacznie więcej testów niż ich dotychczas wykonano. Szukając w nowych obszarach z dużym prawdopodobieństwem natknie się na nieznane dotąd wady. Właściwie to nie potrzeba komputera o dużej mocy obliczeniowej, aby dostrzec naiwność wiary w brak wad choćby trochę bardziej skomplikowanej teorii.

[Norma działania wolnego człowieka] Przytoczmy fragment listu św. Jakuba Apostoła:

Prawo wolności

Choćby ktoś przestrzegał całego Prawa, a przestąpiłby jedno tylko przykazanie, ponosi winę za wszystkie. Ten bowiem, który powiedział: Nie cudzołóż!, powiedział także: Nie zabijaj! Jeżeli więc nie popełniasz cudzołóstwa, jednak dopuszczasz się zabójstwa, jesteś przestępcą wobec Prawa.
Zasady prawa religijnego, jako objawione przez istotę wyższą są niesprzeczne. Wiara w ich niezawodność jest integralną częścią światopoglądu religijnego. Jednakże weryfikowanie ich przestrzegania wymaga metod takich samych, jak sprawdzania niesprzeczności powszechnie przyjętej teorii np. liczb rzeczywistych.

[Schematy prawa wolności] Zastosujmy schemat prawa wolności do oceny dbałości o dobro wspólne. Wtedy dostaniemy taką zasadę etyki:
Choćby ktoś przestrzegał zasad przyzwoitości cały czas, a odstąpiłby jednie tylko na chwilę, lub tylko jeden raz, od jednej z nich, to ponosi winę za wszystko. Innymi słowy, ten który gorliwie pracował cały czas, ale nie zauważył lub zlekceważył chwilę, gdy zyski zostały zdefraudowane, słusznie cierpi biedę. Przykładowo, zarząd firmy w której jesteśmy zatrudnieni w ciągu pięciu minut może dokonać transakcji, która niezależnie od pracowitości w niej zatrudnionych będzie skutkowała nieuchronnym bankructwem.