(VII)
Teoria zbiorów: Czy aksjomaty ZF są prawdziwe

[Dialog Parmenides] Elementy teorii zbiorów można znaleźć u Platona. W kilku dialogach Platon omawia teorię idei, która niewątpliwie jest pierwowzorem dla teorii zbiorów. Zaś *Parmenides* jest dialogiem, gdzie problemy właściwe dla teorii zbiorów są głęboko rozdyskutowane. Przytoczmy fragment z tego dialogu, w którym dostrzegamy trudności, jakie muszą się pojawić w rozważaniach o zbiorach.
Otóż Sokrates przysłuchiwał się i poprosił, żeby pierwsze twierdzenie pierwszej rozprawy jeszcze raz odczytać, a gdy zostało odczytane, powiada:
- Jak ty to rozumiesz, Zenonie? Że jeśli przedmiotów jest wiele, to niby one muszą być i podobne, i niepodobne; a to przecież jest niemożliwe. Bo ani niepodobne nie mogą być podobne, ani podobne nie mogą być niepodobne. Czy nie tak mówisz?

[Paradoksy Zenona] Zenon z Elei - jest on jednym z uczestników dialogu *Parmenides* - jest pierwszym znanym w literaturze twórcą paradoksów. Najsłynniejszy z tych paradoksów, to opis pościgu Achillesa za żółwiem. Wszyscy wiedzą, że Achilles szybciej biega niż żółw, a więc pościg zaczyna się, gdy Achilles odpoczywa, zaś żółw ucieka. W takiej sytuacji, jak powiada Zenon, Achilles nie dogoni żółwia. No, bo gdy Achilles przebiegnie połowę dystansu, co aktualnie dzieli go od żółwia, to ten ostatni przesunie się ciut do przodu. A gdyby żółw już nie uciekał, to i tak Achilles go nie przegoni, bo za każdym razem, gdy Achilles przebiegnie połowę dystansu, to druga połowa pozostanie mu do przebiegnięcia. Takim sposobem Achilles biegnąc [krocząc] z chwili na chwilę - Achilles jest człowiekiem i nieskończonej ilości czynności nie potrafi wykonać - co najwyżej zbliży się do żółwia. Podobnym rozumowaniem Zenon dowodzi, że strzała wystrzelona z łuku nigdy nie osiągnie celu. Zaś czytelnicy niech się sami domyślą, jak Zenon uzasadniał, że worek pszenicy spada bez hałasu. Takie paradoksy, to tylko przestroga dla tych, co zapominają, że rzeczywistość rzadko bywa taka jak się nam wydaje. Platon zdawał sobie z tego sprawę, gdyż w usta Zenona włożył słowa:
Więc to tak; chciało mi się po prostu sprzeczać, byłem młody, więc napisałem. I ktoś mi to pismo ukradł. Tak, że nawet nie mogłem się namyślić, czy je wynosić a światło, czy nie. Więc ty nie dostrzegasz tego, Sokratesie, i zdaje ci się, że to pismo powstało nie na tle przekory młodego człowieka, ale na tle ambicji dojrzałego męża.

[Aksjomatyzacja] Dla wielu czytelników Platona jego uwagi o teorii zbiorów zamieszczone w *Parmenidesie*, wyglądają jak nieskończony potok niedorzeczności, oschły, pusty i męczący. Nigdy nie wiadomo, co Platon chciał powiedzieć lub jak rozumieć jego poglądy. Aksjomatyzacja teorii zbiorów tego i podobnych zagadnień nie wyjaśnia. Aksjomaty to tylko twierdzenia, w których prawdziwość wierzymy. Skoro wiara prawdę nie zawsze poprawie zastępuje, to widzimy, że **pytanie w podtytule tego wykładu nie ma sensu!** Wyciągnijmy z tego wniosek, że od liczb według Pitagorasa, idei według Platona, czy też zbiorów według współczesnych kryteriów zawsze oczekujemy [oczekiwano] więcej, niż to jest i było możliwe. **Nawet wtedy, gdy nic nie oczekujemy, też za dużo oczekujemy**. Zawsze oczekiwano, że liczby, idee bądź zbiory zastąpią ducha, który poradzi sobie tam, gdzie oczekujący jest bezradny.

[Anioł stróż] Do tego, aby myślenie przystawało w zakresie zdrowego rozsądku do rzeczywistości, potrzebna jest armia duchów. Często żołnierzy takiej armii nazywamy aniołami. Czy każdemu niezbędny jest własny anioł stróż? Wielu za nas w to wierzy. Niektórzy rozmowy z aniołem stróżem zwą *sumienie***.** W anioła stróża, w zalety sumienia, każdy sobie wierzy tak, jak mu się to podoba. Czy taki rodzaj wiary nie jest mnożeniem bytów, o których krótko należałby powiedzieć, iż powstają nadaremno? Twierdzimy, że tam gdzie jest cywilizacja tam, choć jeden rodzaj ducha jest niezbędny. Dla przetrwania cywilizacji niezbędna jest umiejętność porozumiewania się. Kresem cywilizacji są wojny albo naturalne kataklizmy. Wtedy sztuka porozumiewania się zanika.

[Choć jedna niesprzeczna teoria] Dla skutecznego porozumiewania się niezbędna jest wiara w sens porozumienia. Zaś niezbędną właściwością, jest niesprzeczność zasad wchodzących w zakres porozumienia. Innymi słowy, potrzebna jest przynajmniej jedna niesprzeczna teoria. Mógłby to być fragment teorii liczb. Także jakiś drobny fragment teorii zbiorów wystarcza. Jednakże nie wiemy, który? D. Hilbert na listę najbardziej potrzebnych do rozwiązania w XX wieku problemów matematycznych wpisał postulat, by udowodnić niesprzeczność teorii zbiorów. Dziwne, bo wydaje się, że tak znakomity matematyk jak D. Hilbert powinien zapytać się: No, ale jak? Zrobić pauzę. Po pauzie nie kontynuować dociekań niesprzeczności jakiejkolwiek teorii zbiorów. Być może, podobnie jak Platon bronił Zenona - wyżej cytowaliśmy stosowe fragmenty - należałoby bronić [rozumieć] poglądy Hilberta.

[Bolzano, Cantor] Twórcami współczesnej teorii mnogości są niewątpliwie XIX-wieczni matematycy i logicy. Poprzestańmy na wymienieniu B. Bolzano oraz G. Cantora. Jest jakaś wspólna cecha łącząca się z ich twórczością. Podobnie jak Platon mieli oni poważne trudności w jasnym wyłożeniu, o co idzie w posługiwaniu się zbiorami. Mieli trudności w nauczaniu o zbiorach, a więc zadbali [załatwili sobie?] wpływowych wrogów [oponentów]. Bolzano był księdzem katolickim żyjącym w czeskiej Pradze w pierwszej połowie XIX wieku. Jego oponent – autor podręcznika dla studentów – miał wpływy w Wiedniu i załatwił Bolzanie odsunięcie od zajęć akademickich ze studentami. Złośliwcy [np. matematycy związani z diasporą żydowską] mówią, że ten ksiądz załatwił sobie stosowną pensję i dużo wolnego czasu, który zwykle spędzał w dobrach bogatej wdowy. Cantor – tworzył w drugiej połowie XIX wieku w Halle [Halle leży około 100 km od Lipska. Kim był najsławniejszy cantor z tych okolic?] Za swego oponenta wybrał znanego specjalistę od teorii liczb Kronekera, promotora jego doktoratu, profesora matematyki pracującego w Berlinie. Za wszelkie trudności, z którymi Cantor nie umiał sobie poradzić, obwiniał Kronekera (?). Zaś Kroneker nie pozostawał mu dłużny. Mnie się też kiedyś zdarzyło powiedzieć: *Zrzędzi pan profesor jak Kroneker*; Czy była to celna riposta?

[Zermelo, Fraenkel] Aksjomaty teorii zbiorów ZF pochodzą z 1908 roku od E. Zermelo. W latach trzydziestych XX wieku za sprawą A. Fraenkel zostały one uznane: po kongresie matematyków w Zurichu w 1932 roku; za powszechnie używany zestaw aksjomatów teorii zbiorów. Wydaje się, że głównym powodem sukcesu aksjomatów ZF było to, że aksjomatyka ta z powodzeniem poradziła sobie z paradoksami, których pierwowzór znali od dawna teolodzy. Ten pierwowzór był mniej więcej taki: *Bóg jest wszechmogący; Skoro Bóg jest wszechmogący, to wszystko może zrobić; Skoro tak, to niech się unicestwi; I nie ma takiego boga.* Podobnymi paradoksami są deklaracje: *Wiem, że nic nie wiem* lub *Wierzę w to, że w nic nie wierzę*. Te deklaracje przeczą same sobie.

[Nie wszystko jest zbiorem] Teoria ZF odmówiła niektórym obiektom, które można nazwać, prawa do istnienia. Przykładowo zdanie: *Istnieje zbiór, do którego należą wszystkie zbiory*; nie jest twierdzeniem w ZF, zaś jego negacja jest twierdzeniem w ZF. E. Zermelo dobrał aksjomaty ZF na tyle sprytnie, że negacje znanych w jego czasach paradoksów okazały się być twierdzeniami należącymi do teorii ZF. Jednocześnie kilkadziesiąt lat testowania teorii ZF nie doprowadziło do wskazania wnioskowań, które stwierdzałyby sprzeczność tej teorii**. Czy maszyny matematyczne mogą taką wiarę podważyć**?

[Powszechna zgoda] Jest także inny aspekt obowiązywania „powszechnej zgody" na posługiwanie się aksjomatyką ZF. Logika to sposoby myślenie wspólne dla wszystkich cywilizowanych istot myślących. Jej zakres ustalony być powinien poprzez potrzeby niezbędne dla przetrwania cywilizacji: poprzez potrzeby wynikające z konieczności porozumiewania się. Jak pamiętamy z historii, kilka lat po kongresie w Zurychu nie umiano porozumieć się co do tego, czyje czołgi lub samoloty są najlepsze. Dwa razy - tam i powrotem, najlepsze na świecie czołgi przemaszerowały przez Europę. Wygląda na to, że wracają czasy testowania nowych generacji czołgów bądź samolotów. Czy coś takiego wydarzyło się ostatnio w Mezopotamii? Odnotujmy, jeszcze, że w literaturze teoria zbiorów bywa często nazywana *teorią mnogości*.

[Język teorii ZF] W zapisach zdań teorii zbiorów, dokładniej mówiąc teorii ZF, litery alfabetu reprezentują zbiory. Zdaniami elementarnymi tej teorii są zdania postaci $x \in y$ lub $y = x$. Pojedyncze litery alfabetu nie są zdaniami w ZF, choć były one zdaniami w KRZ. Zasady tworzenia zdań złożonych zawierają reguły, które przyjęliśmy dla tworzenia zdań w KRZ. Rozszerzamy te zasady o reguły kwantyfikowania. Jeśli $\varphi(x)$ jest zdaniem reprezentowanym przez sekwencję symboli gdzie x nie jest kwantyfikowane [w zapisie φ sekwencja symboli $\forall x$ *lub* $\exists x$ nie występuje] to zdania reprezentują także napisy $\forall x\, \varphi(x)$ oraz $\exists x\, \varphi(x)$.

Ćwiczenie. Przeanalizuj możliwe algorytmy, które precyzowałyby zasady skracania napisów reprezentujących zdania w ZF. Do skrótów wymienionych w poprzednim ćwiczeniu dodaj skróty:

- Zamiast $\neg(\forall x\, \varphi(x))$ piszemy $\exists x\, (\neg\, \varphi(x))$;
- Zamiast $\neg\, (\exists x\, \varphi(x))$ piszemy $\forall x\, \neg\varphi(x)$.
- Zamiast $(\exists x\, \varphi(x)) \Rightarrow (\forall x\, \Psi(x))$ piszemy $\exists x\, \forall y\, (\varphi(x) \Rightarrow \Psi(y))$;
- Zamiast $(\forall x\, \varphi(x)) \Rightarrow (\exists x\, \Psi(x))$ piszemy $\forall x\, \exists y\, (\varphi(x) \Rightarrow \Psi(y))$.

[Aksjomaty ZF] W ZF [tak, jak to w było KRZ] poprawie zbudowane zdania: sekwencje symboli, które uznajemy za zdania; nazywamy formułami. Wśród formuł wyróżniamy tautologie, które uznajemy za prawdziwe. Tautologie KRZ, w których zdania elementarne zastąpione są zdaniami postaci $x \in y$ lub $y = x$, to niewątpliwie twierdzenia teorii ZF. Twierdzeniami teorii ZF są tautologie, aksjomaty dla równości, aksjomaty dla zbiorów, tzn. aksjomaty ZF, oraz formuły, które potrafimy dołączyć do twierdzeń przy pomocy reguł podstawiania oraz odrywania. **Ustalenie listy aksjomatów dla równości pozostawiamy czytelnikom**. Listę aksjomatów ZF przytaczamy poniżej. Ale dla „sztuki" aksjomaty wypowiemy w języku potocznym. Czytelnikom pozostawiamy zdefiniowanie nazw: przekrój, klasa, zawieranie, funkcja, nieskończoność, które użyliśmy do wypowiedzenia aksjomatów. Mniej ambitnym, ale dociekliwym polecamy zapoznanie się ze stosowną literaturą.

Aksjomat ekstensjonalności: *Jeśli zbiory mają takie same elementy to są równe.*
Aksjomat pary: *Dla dowolnych dwóch zbiorów istnieje zbiór, do którego należą tylko te dwa zbiory.*
Aksjomat wycinania: *Przekrój zbioru z klasą jest zbiorem.*
Aksjomat sumy: *Dla dowolnego zbioru istnieje zbiór, do którego należą wszystkie zbiory należą do jakiegoś zbioru należącego do tego.*
Aksjomat zbioru potęgowego: *Dla dowolnego zbioru istnieje zbiór, do którego należą wszystkie zbiory zawarte w X.*
Aksjomaty (schemat aksjomatów) podstawiania: *Jeśli zbiór jest funkcją, to obraz dowolnego zbioru przez tę funkcję jest także zbiorem.*
Aksjomat nieskończoności: *Istnieje zbiór nieskończony.* Dla przykładu zapiszmy ten aksjomat symbolicznie: $\exists x \forall n \forall k\ [\ (k \in n \text{ oraz } n \in x\ ) \Rightarrow (k \in x)]$.
Aksjomat regularności: *Do dowolnego zbioru należy zbiór, który ma przekrój pusty z tym zbiorem.*

[Aksjomaty dodatkowe] Wypisaliśmy wszystkie aksjomaty, które są zaliczane do aksjomatyki ZF. Aksjomaty te bywają rozszerzane o aksjomat istnienia: *Istnieje zbiór pusty;* choć aksjomat ten wynika z aksjomatów dla równości. Gdy aksjomaty ZF są rozszerzone o dodatkowe aksjomaty, np. o aksjomat wyboru AC to rozszerzony układ aksjomatów oznaczamy ZF + AC, choć częściej stosowane bywa oznaczenie ZFC. Dodajmy jeszcze komentarz. Wydaje się, że jak E. Zermelo, tak i A. Fraenkel znali pogląd Arystotelesa o nieukach – cytowaliśmy go wcześniej jako fragment „*Metafizyk*i”. Zademonstrowali to nie zaliczając aksjomatyki dla równości do aksjomatów ZF. Własności równości uznali za oczywiste i ich dokładniejszą analizę zaliczyli do „robótki” dobrej dla nieuków. Taki pogląd był dość powszechny w XX wieku. W licznych pracach twórców teorii zbiorów, np. F. Hausdorffa, M. Suslina, W. Sierpińskiego lub P. Erdösa, nie ma śladu fascynacji aksjomatem istnienia. Autorzy ci nigdy nie powoływali się na to, że istnieje zbiór pusty(?).

[Lokalna niesprzeczność] Dla potrzeb matematyki wystarczy założyć, że teoria ZF, bywa lokalnie niesprzeczna. Aby odciąć się od nieuzasadnionych roszczeń teoretycznych [analogicznych do tych, jakie kiedyś wyprowadzano z teorii brył platońskich] wyprowadzanych z odkryć i osiągnięć matematyków lub specjalistów od nauk eksperymentalnych, niegłupio jest założyć, że: **Teoria zbiorów z aksjomatyką Zermelo-Fraenkla to teoria sprzeczna; jednakże jej użyteczność jest niepodważalna, gdyż w każdym jej sensownym zastosowaniu korzystamy jedynie z fragmentu tej teorii, o którym sądzimy, że jest to fragment tworzący teorię niesprzeczną.** W świetle takiego założenia jasnym jest, że wszelkie rozważania o niesprzeczności teorii ZF muszą być prowadzone na gruncie statystyki, a więc są one naznaczone co najwyżej 40 procentową wiarygodnością. Dowolne twierdzenie dotyczące teorii ZF musi być dowodzone przy założeniach, co do których brak pewności, iż nie zezwalają na wnioskowanie każdej tezy. Przy okazji dotarliśmy do przekonania, że rozważania typu: Czym jest byt? Czy niebyt jest bytem? To chyba domena nieuków? Ale wynika z tego rada: **Aby zyskać na klarowności lub wiarygodności, należy używać jak najkrótszych zdań.** Bo im rozumowanie krótsze, tym większe szanse na to, że jest niezawodne. Przy rozwlekłych rozumowania zwiększamy swoje szanse na skorzystanie z naturalnej sprzeczności teorii mnogości. W to, że każda teoria mnogości jest sprzeczna głęboko wierzymy. Dociekamy prawdy po to, aby takie sprzeczności odkrywać, rozpowszechnić wśród zainteresowanych i doprowadzić do modyfikacji aksjomatów teorii mnogości tak, aby w nowej teorii odkrytych wcześniej sprzeczności nie było.

[Poprawianie ewentualnej sprzeczności] Nie ma [nie znamy] krótkich wnioskowań, które by ustawiały sprzeczność teorii ZF. Ale, dla potrzeb każdego rozważanego problemu możemy przyjąć, że teoria ZF jest lokalnie niesprzeczna, czyli fragment teorii ZF, który jest niezbędny dla takich rozważań jako całość tworzy teorię niesprzeczną. Dla zagadnień, których poprawność podlega kontroli wielokrotnie powtarzalnych eksperymentów, takie założenie jest wystarczające. Gdyby przy okazji takiego zagadnienia wynikł brak poprawności z powodu sprzeczności założonych właściwości wykorzystywanego fragmentu teorii zbiorów, to wystarczy osłabić jeden z aksjomatów, który jest niezbędny dla wnioskowania ustanawiającego sprzeczność. Takie osłabienie nie zapewni niesprzeczności nowo określonego fragmentu teorii zbiorów, lecz odsunie ewentualne szkody, jakie mogłyby powstać w konsekwencji sprzeczności. No, ale z tego wynika, że prawa teorii zbiorów podlegają testom eksperymentalnym. Skoro tak, to twierdzenia teorii zbiorów właściwe dla dwu różnych zagadnień mogą zawierać jakieś prawo i jego negację. Innymi słowy prawo właściwe dla jednego zagadnienia dodane do praw właściwych dla innego zagadnienia powoduje wnioskowanie, które ustanawia sprzeczność. Tym sposobem zarysowaliśmy podstawy światopoglądu, który bywa intensywnie zwalczany przez fan klub gen-juszów: gen oczywiście duchowy. Zaświadczenie o pochodzeniu jak dla psa rasy mieszanej z rasą kundel. Genialność i dochody gwarantowane rentą za zasługi dla elity sprawującej rząd dusz. Niesprzeczność teorii ZF to sprawa marginesowa. S. Rushdi w „*Szatańskich wersetach*” literacko [w przenośni] opisał to tak: Archanioł Gibril zwiastował; Wiernych nagrodzimy; Niewiernym dołożymy – dołożymy, bo sami są sobie winni, gdyż są niewierni.

[ZF nie jest teorią zupełną] Dowolna formuła KRZ jest tautologią bądź nie jest tautologią. Dla ZF tak dobrze nie jest. Jeśli teoria ZF jest niesprzeczna, to zawsze można wypisać formułę taką, że zaliczenie jej do twierdzeń teorii mnogości nie prowadzi do powstania teorii sprzecznej. Także dołożenie zaprzeczenia tej formuły do twierdzeń nie prowadzi do teorii sprzecznej. Dla teorii ZF takimi formułami są wspomniany wcześniej aksjomat wyboru. Najsławniejszą formułą tego rodzaju jest hipoteza continuum. A. Rosłanowski i S. Shelah w rozprawie „*Norms on Possibilities I: Forcing with Trees and Creatures*” [str. 147] do tego rodzaju formuł zaliczyli niektóre własności liczby Balcerzaka-Plewika!

[Rodzaje prawdy na przykładzie ZF] Ilustrację dla różnych rodzajów prawdy, na przykładzie teorii ZF, naszkicujemy tak. Z jednym rodzajem prawdy mamy do czynienia gdy ustalimy wnioskowanie, które wyprowadza twierdzenie z aksjomatów. Jednakże wszelkie twierdzenia teorii ZF można zapisać. Znaczy to, że wśród nieskończonych ciągów symboli należących do języka tej teorii możemy wyróżnić podciągi, które tworzą modele dla ZF. [Być może opis modelu powinien być bardziej precyzyjny, a więc zapoznanie się ze szczegółami pozostawiamy czytelnikowi.] Oczywiście w każdym modelu spełnione są aksjomaty teorii ZF. Gdy zdanie jest prawdziwe w każdym modelu dla ZF, to uznajemy go za twierdzenie teorii ZF. To daje [chyba?] inny rodzaj prawdy. Argumentujemy podobnie jak dla KRZ. Gdyby ktoś utrzymywał, że zna dowód który tak określone rodzaje prawdy porównuje, to spytajmy go: ***Skąd wiara w to, że niezbędny fragment***

***teorii zbiorów, który używasz w swoim dowodzie jest teorią niesprzeczną*?** W zagadnieniach, które nie mogą podlegać weryfikacji poprzez powtarzalne testy taka wiara będzie czynić cuda. Ale być może zamiast wierzyć w cuda wygodniej trochę się potrudzić i pomyśleć o tym jak właściwie używać pojęć, stosownie ważyć słowa, itd.

[Prawda, a bałwochwalstwo] Wulgarnie mówiąc z prawdą mamy do czynienia, gdy rozważamy fakty lub logiczne wnioski z faktów, których poprawność nie budzi wątpliwości. Tyż prawda pojawia się, gdy zdanie: prawo lub twierdzenie; jest prawdziwe w dowolnej interpretacji. Zaś g. prawda zaczyna dokuczać wszystkim, gdy pomiędzy prawdą oraz tyż prawdą nie ma harmonii. Mojżesz w pierwszym przykazaniu Dekalogu sformułował tą obserwację jako prawo pochodzące od Boga, który wyznaczył karę za łamanie pierwszego przykazania jako trwającą przez trzy lub cztery pokolenia. W Biblii [Księga Wyjścia] pierwsze przykazanie brzmi:

Nie będziesz miał cudzych bogów obok Mnie! Nie będziesz czynił żadnej rzeźby ani żadnego obrazu tego, co jest na niebie wysoko, ani tego, co jest na ziemi nisko, ani tego, co jest w wodach pod ziemią! Nie będziesz oddawał im pokłonu i nie będziesz im służył, ponieważ Ja Pan, twój Bóg, jestem Bogiem zazdrosnym, który karze występek ojców na synach do trzeciego i czwartego pokolenia względem tych, którzy Mnie nienawidzą. Okazuję zaś łaskę aż do tysięcznego pokolenia tym, którzy Mnie miłują i przestrzegają moich przykazań.

Zaś w Biblii [Księga Powtórzonego Prawa] pierwsze przykazanie brzmi:

Nie będziesz miał bogów innych oprócz Mnie. Nie uczynisz sobie posągu ani żadnego obrazu tego, co jest na niebie wysoko albo na ziemi nisko, lub w wodzie poniżej ziemi. Nie będziesz oddawał im pokłonu ani służył. Bo Ja jestem Pan, Bóg twój, Bóg zazdrosny, karzący nieprawość ojców na synach w trzecim i w czwartym pokoleniu - tych, którzy Mnie nienawidzą, a który okazuje łaskę w tysięcznym pokoleniu tym, którzy Mnie miłują i strzegą moich przykazań.

[Odpowiedzialność zbiorowa] Nawet, jeśli przez palce ocenimy dokładność tłumaczenia, to i tak każdy wie, że Dekalog dotyczy sposobów posługiwania się prawdą. Za wadliwe posługiwanie się prawdą grozi odpowiedzialność zbiorowa. Teoria mnogości sugeruje w tej materii dodatkowe możliwości, bo uświadamia, że zawsze możemy natknąć się na prawo niezależne od praw dotychczas uznanych. W literaturze to odkrycie jest przypisywane K. Gödlowi. Pierwowzory takich praw to wspomniane wcześniej aksjomat wyboru lub hipoteza continuum. Jeśli przypomnimy sobie zasadę ciągłości [aksjomat dla zbioru liczb rzeczywistych], to widzimy, że nawet wiedza o tym, jaka jest struktura zbioru liczb rzeczywistych nie jest oczywista. Ta struktura zależy od założonej aksjomatyki teorii zbiorów. Nie prowadzi to do wątpliwości, gdy liczby rzeczywiste stosowane są do zagadnień badanych od tysiącleci. Ale dlaczego w świecie cząstek elementarnych, lub modnej ostatnio ciemnej materii, każda z rozważanych cząstek miałaby stosować się do tej samej teorii zbiorów! Może każda gwiazda lub galaktyka uznaje, tylko dla siebie właściwą teorię mnogości. Platon [prawdopodobnie] powiedziałby, że zamieszkuje ją właściwa dla niej dusza. Podobnie możemy zastanawiać się, dlaczego czas i współrzędne wektora położenia w przestrzeni są opisywane tym samym rodzajem liczb. Czyżby Arystoteles miał rację, że czas mierzymy ruchem, zaś ruch musimy mierzyć czasem i innej możliwości nie ma?