CAŁKA OZNACZONA JAKO SUMA SZEREGU

Rozważmy funkcję ciągłą $x \to f(x)$ o wartościach nieujemnych określoną na przedziale $[a, b]$. Ustalmy [**będzie to problem statystyczny polegający na dokładnym sprecyzowaniu informacji o polu obszaru, który jest określony analitycznie**] jakim sposobem zgadnąć jak duży jest obszar położony pod wykresem tej funkcji, który jest ograniczony prostymi $x = a$, $x = b$ oraz $y = 0$. Aby ustalić w przybliżeniu pole owego obszaru pomyślmy układ liczb

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

a następnie utwórzymy sumy

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}),$$

gdzie zawsze $x_{k-1} \leq c_k \leq x_k$. Skoro f jest funkcją ciągłą, to składnik $f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ tym lepiej przybliża pole leżące pod wykresem funkcji f ograniczone prostymi $x_k = 0$, $x_{k-1} = 0$ oraz $y = 0$, im krótszy jest przedział (x_{k-1}, x_k). Jeśli dowolny ciąg $\{S_{[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n]}\}$ jest zbieżny, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n \to 0 \qquad \text{oraz zawsze zachodzi } x_k - x_{k-1} < \delta_n, \text{ o ile } 1 \leq k \leq n,$$

to mówimy, że funkcja f jest *całkowalna*. Tak określons granicę oznaczamy

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

oraz nazywamy *całką oznaczoną* funkcji $x \to f(x)$ na przedziale $[a, b]$: definicja ta zakłada, że wybór liczb c_i jest dowolny, a więc sprawdzając zbieżność ciągów postaci $\{S_{[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n]}\}$ musimy uwzględnić wszekie możliwe układy liczb x_k oraz c_k!

Przypomnijmy twierdzenie Lagrange'a dla funkcji $x \to F(x)$ różniczkowalnej w przedziale $[x_{k+1}, x_k]$:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F^{'}(x_k + \Theta(x_k - x_{k_1}))(x_k - x_{k-1}),$$

gdzie $x_{k-1} \leq \Theta \leq x_k$; a następnie policzmy

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) = &\quad F(x_1) - F(x_0) \quad + \quad F(x_2) - F(x_1) \quad + \ldots + \quad F(x_n) - F(x_{n-1}) \\ = &\quad f(c_1)(x_1 - x_0) \quad + \quad f(c_2)(x_1 - x_2) \quad + \ldots + \quad f(c_n)(x_n - x_{n-1}) \\ = &\quad \textstyle\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx \quad + \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \quad + \ldots + \quad \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx \\ = &\quad \textstyle\int_a^b f(x)\, dx \end{aligned}$$

Gdy uwierzymy w to, że równość pomiędzy linią drugą na trzecią jest prawdziwa to dostaniemy wzór na całkę oznaczoną z funkcji $x \to f(x)$, dla której funkcja $x \to F(x)$ jest funkcją pierwotną:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Dla potrzeb zastosowań matematyki wzór ten może definiować całkę oznaczoną w sposób zadawalający. Dyskusję tego kiedy (lub czy?) jest on porawny możemy pozostawić tym, których to pasjonuje: od czasów Archimedesa – obliczanie pól ograniczonych krzywymi *metodą wyczerpywania* – rozważania o tym, czym mogłaby być całka oznaczona, to jeden z najpopularniejszych tematów uprawianych przez entuzjastów matematyki. Dopiero w XVII wieku I. Newton powiązał problemy związane z całką oznaczoną z algorytmami różniczkawania, innymi słowy : zmatematyzował zagadnienia związane z ruchem.

Policzmy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \left[\frac{-1}{2n+1}\sin^{2n} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx =$$

$$\ldots = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \left[\frac{-1}{2n}\sin^{2n-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x\,dx =$$

$$\ldots = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}\frac{\pi}{2};$$

Zachodzą wzory - o ile całki oznaczone w nich określone istnieją:

$$\int_a^b Af(x) + Bg(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx;$$

$$\int_a^b g(f(x))f^{'}(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,dt;$$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Twierdzenie. *Jeśli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$, to*

$$\left(\int_a^x f(t)\, dx\right)' = f(x), \qquad o \text{ ile } a \le x \le b;$$

jeśli $h > 0$, to

$$\int_a^{a+h} f(x)\, dx = h \cdot f(x + \Theta h), \ \text{ gdzie } 0 < \Theta < 1;$$

jeśli dodatkowo $0 \le f(x)$ dla $a \le x \le b$, to

$$\int_a^b f(x)\, dx \ge 0.$$

Całka oznaczona $\int_a^b f(x)\, dx$ to pole obszaru złożonego z punktów (x, y) płaszczyzny, gdzie $a \le x \le b$ oraz $0 \le y \le f(x)$: wtedy pole jest liczone ze znakiem $+$; zaś gdy $f(x) \le y \le 0$, to pole jest liczone ze znakiem $-$. Metoda wyczerpywania – znana już przed naszą erą Archimedesowi – to obliczanie takowego pola przy pomocy szeregów!

Gdy chcemy obliczyć pole obszaru P ograniczonego krzywą $y = \sin x$, prostymi $x = 2\pi$, $x = \frac{\pi}{2}$ oraz osią OX, to korzystamy z tego, iż jest to obszar dzielący się na trzy jednokładne rozłączne kawałki, a więc liczymy

$$P = 3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\, dx = 3\,[-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 3(-\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2}) = 3.$$

Gdy obliczamy pole Q zawarte pomiędzy wykresami krzywych $y = x^2$ oraz $x = y^2$, to liczymy

$$Q = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Gdy obliczamy pole obszaru R ograniczonego krzywymi $y = e^x$, $x = -2$, $x = 1$ oraz styczną do krzywej $f(x) = e^x$ w punkcie $x = 0$, to z wzoru

$$y - f(x_o) = f'(x_0)(x - x_0)$$

wyliczamy, że styczna ma równanie $y = x + 1$: gdyż $x_0 = 0$, $f(0) = 1$ oraz $f'(0) = 1$. Pole R liczymy tak, aby w całce $\int_{-2}^{-1} x + 1\, dx$ zmienić znak, bo oznacza ona pole leżą poniżej osi OX:

$$R = \int_{-2}^{1} e^x\, dx + \int_{-2}^{-1} x + 1\, dx - \int_{-1}^{1} x + 1\, dx = [e^x]_{-2}^{1} + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= e - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{2} - 1 - 2 + 2 - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{1}{e^2} - \frac{5}{2}.$$

Gdy chcemy obliczyć pole koła o promieniu r, to obliczamy całkę $2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$. Podstawiamy $z = \frac{x}{r}$ oraz $dz = \frac{1}{r}dx$ i liczymy

$$2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - z^2}\, dz =$$

$$= r^2 \left[\frac{1}{2} \arcsin z - \frac{z}{2}\sqrt{1 - z^2}\right]_{-1}^{1} = r^2 (\frac{1}{2} \arcsin 1 - \frac{1}{2} \arcsin (-1)) = \frac{\pi r^2}{2}.$$

Gdy zechcemy policzyć pole elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{czyli} \qquad y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

to liczymy

$$2b\int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = ab\pi.$$

Załóżmy, że rozważamy krzywą wyznaczoną przez wykres funkcji ciągłej $x \to f(x)$. Wtedy objętośc $V(a, b)$ bryły powstałej z obrotu tej krzywej dookoła osi OX w przedziale $[a, b]$ wyraża się wzorem

$$V(a, b) = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

Gdy dodatkowo funkcja $x \to f(x)$ jest różniczkowalna w przedziale $[a, b]$, to długość łuku $L(a, b)$ tej krzywej od punktu $(a, f(a))$ do punktu $(b, f(b))$ wyraża się wzorem

$$L(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

zaś pole powierzchni $P(a, b)$ powstałej z obrotu tej krzywej dookoła osi OX w przedziale $[a, b]$ wyraża się wzorem

$$P(a, b) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Całka niewłaściwa.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Zamiast ∞ może być liczba!

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{h\to 1} (\arcsin 1 - \arcsin h) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_o^e \frac{1}{x}\, dx = \lim_{h\to 0^+} [\ \ln x]_h^e = \ \ln e - \lim_{h\to 0^+}\ \ln h = 1 - (-\infty) = +\infty :$$

całka nie jest sumowalna.

Kryterium całkowe. *Jeśli funkcja $x \to f(x)$ jest dodatnia i nierosnąca dla $x > 1$, to całka*

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx \qquad \textit{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

są jednocześnie sumowalne lub jednocześnie rozbieżne do nieskończoności.