CAŁKA NIEOZNACZONA

Mówimy, że funkcja $x \to F(x)$ jest *funkcją pierwotną* dla funkcji $x \to f(x)$ – w pewnym ustalonym przedziale - gdy w kadym punkcie zachodzi

$$F'(x) = f(x).$$

Funkcję pierwotną często nazywamy *całką nieoznaczoną* i zapisujemy

$$F(x) = \int f(x)\, dx.$$

Skoro funkcje mające tę samą pochodną różnią się o stałą, to każda inna funkcja pierwotna dla $f(x)$ musi mieć postać $x \to C + F(x)$: nieoznaczonośc całki znaczy, że jest ona wyznaczona z dokładnością do stałej. Znalezienie funkcji pierwotnej – czyli całki nieoznaczonej – to zagadnienie odwrotne do różniczkowania, a więc pomocnymi będą wzory ustalone przy okazji algorytmów różniczkowania. Większość wzorów na całkę nieoznaczoną sprawdzamy przez różniczkowanie. Wypiszemy tożsamości – wzory całkowe – które są prawdziwe, o ile wszystkie całki w nich występujące mają sens.

$$(1) \quad \int Af(x) + Bg(x)\, dx = \mathrm{A} \int f(x)\, dx + B \int g(x)\, dx.$$

$$(2) \quad \int \frac{1}{\sqrt{k+x^2}} dx = \ln\,(x + \sqrt{x^2+k}) + C:$$

$$\frac{1}{\sqrt{k+x^2}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\,(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+k}}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{k+x^2}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\,\frac{\sqrt{x^2+k}+x}{\sqrt{x^2+k}}.$$

$$(3) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\, x + C = C - \arccos\, x.$$

$$(4) \quad \int \cos x + \sin x\, dx = \sin x - \cos x + C.$$

$$(5) \quad \int x^n\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, & \text{gdy } n \neq -1; \\ \ln |x| + C, & \text{gdy } n = -1. \end{cases}$$

$$(6) \quad \int e^x + a^x\, dx = e^x + \frac{a^x}{\ln\, a} + C.$$

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{tg} x + C = \int 1 + \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{ctg} x + C = -\int 1 + \operatorname{ctg}^2 x \, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

$$\text{(9)} \qquad \int \operatorname{tg} x \, dx = \text{ - } \ln \cos x + C; \text{ dla } -\pi < 2x < \pi.$$

$$\text{(10)} \qquad \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln \sin x + C; \text{ dla } 0 < x < \pi.$$

$$\text{(11)} \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned} \textstyle\int \ln x \, dx &= x \ln x - x + C : \\ \ln x &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1. \end{aligned}$$

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} \textstyle\int \ln^2 x \, dx &= x \cdot (\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C : \\ \ln^2 x &= \ln^2 x - 2 \ln x + 2 + x \cdot (\frac{2}{x} \cdot \ln x - \frac{2}{x}). \end{aligned}$$

$$\text{(14)} \qquad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C.$$

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} &= \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} : \\ \frac{1}{(x^2+1)^n} &= \frac{1}{2n-2} \left(\frac{(x^2+1)^{n-1} - 2x^2(n-1)(x^2+1)^{n-2}}{(x^2+1)^{2n-2}} + \frac{2n-3}{(x^2+1)^{n-1}} \right) : \\ 2n-2 &= x^2 + 1 - 2x^2(n-1) + (x^2+1)(2n-3). \end{aligned}$$

Gdy położymy $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, to dostaniemy wzór

$$\text{(15*)} \qquad I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \, I_{n-1}.$$

$$\text{(16)} \qquad \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C:$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\frac{1}{|a|}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{x}{2}\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$2\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\text{(17)} \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C:$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\frac{1}{|a|}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}-\frac{x}{2}\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$2x^2 = a^2-(a^2-x^2)+x^2.$$

$$\text{(18)} \qquad \textstyle\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C:$$

$$\arcsin x = \arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{(19)} \quad \int \sin^n x\,dx = \frac{-1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx:$$

$$\sin^n x = \frac{-1}{n}[(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x-\sin^n x]+\frac{n-1}{n}\sin^{n-2}x,$$

$$\sin^2 x = -\frac{n-1}{n}\cos^2 x+\frac{\sin^2 x}{n}+\frac{n-1}{n},$$

$$\sin^2 x = -\frac{n-1}{n}(1-\sin^2 x)+\frac{\sin^2 x}{n}+\frac{n-1}{n}.$$

Gdy położymy $\int \sin^n x\,dx = J_n$, to dostaniemy wzór

$$\text{(19}^*\text{)} \qquad J_n = \frac{-\cos x}{n}\sin^{n-1}x+\frac{n-1}{n}J_{n-2}.$$

$$
\begin{aligned}
(20)\quad \int \cos^n x\, dx &= \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx:\\
\cos^n x &= \frac{1}{n}[(n-1)\cos^{n-2} x(-1)\sin^2 x + \cos^n x] + \frac{n-1}{n}\cos^{n-2} x,\\
\cos^2 x &= \frac{n-1}{n}(-1)\sin^2 x + \frac{\cos^2 x}{n} + \frac{n-1}{n},\\
\cos^2 x &= -\frac{n-1}{n}(1-\cos^2 x) + \frac{\cos^2 x}{n} + \frac{n-1}{n}.
\end{aligned}
$$

Gdy położymy $\int \cos^n x\, dx = K_n$, to dostaniemy wzór

$$(20^*)\qquad K_n = \frac{\sin x}{n}\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}K_{n-2}.$$

$$
\begin{aligned}
(21)\quad \int \operatorname{tg}^n x\, dx &= \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx:\\
\operatorname{tg}^n x &= \frac{1}{n-1}(n-1)\operatorname{tg}^{n-2} x(1+\operatorname{tg}^2 x) - \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx.
\end{aligned}
$$

Gdy położymy $\int \operatorname{tg}^n x\, dx = L_n$, to dostaniemy wzór

$$(21^*)\qquad L_n = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1} x - L_{n-2}.$$

$$
\begin{aligned}
(22)\quad \int \operatorname{ctg}^n x\, dx &= \frac{-1}{n-1}\operatorname{ctg}^{n-1} x - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\, dx:\\
\operatorname{ctg}^n x &= \frac{-1}{n-1}(n-1)\operatorname{ctg}^{n-2} x(-1-\operatorname{ctg}^2 x) - \operatorname{ctg}^{n-2} x\, dx.
\end{aligned}
$$

Gdy położymy $\int \operatorname{ctg}^n x\, dx = M_n$, to dostaniemy wzór

$$(22^*)\qquad M_n = \frac{-1}{n-1}\operatorname{ctg}^{n-1} x - M_{n-2}.$$

Całkowanie przez podstawianie

Gdy $x = g(t)$, to zachodzi

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))g^{'}(t)\, dt.$$

Przykład. Niech $(u,v) \to P(u,v)$ oznacza funkcję dwu zmiennych. Wtedy

$$\int P(\sin x, \cos x)\ dx = \int P\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\ \frac{dt}{1+t^2}.$$

Uzasadnienie. Kładziemy $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Mamy $x = 2 \operatorname{arctg} t$. Skoro

$$1 = (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) \cos^2 \frac{x}{2},$$

to

$$\cos x = -1 + 2\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Także

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2(1 - \cos^2 \frac{x}{2}) \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = (1 - \frac{1}{1+t^2})\frac{2}{t} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Różniczkując stronami równość $x = 2 \operatorname{arctg} t$, otrzymujemy $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\ dt$. Trzy kolejno wyprowadzone powyżej równości wstawione do wzoru na całkowanie przez części kończą to uzasadnienie. □

Całkowanie prze części

$$\int f(x)g^{'}(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f^{'}(x)g(x)\ dx.$$

Wzór ten można sprawdzić przez rożniczkowanie. Czasami korzystniej go zapisać tak:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du; \qquad \text{lub tak} \qquad \int u(x)v^{'}(x)\ dx = u(x)v(x) - \int v(x)u^{'}(x)\ dx.$$

Gdy położymy $v(x) = x$, $v'(x)\ dx = 1\ dx$, $u(x) = \log_p x$ oraz $u^{'}(x)\ dx = \dfrac{dx}{x \ln p}$ to liczymy

$$\int \quad u(x) \quad v^{'}(x)\ dx \quad = \quad v(x) \quad u(x) \quad - \quad \int \quad v(x) \quad u^{'}(x)\ dx:$$

$$\int \quad \log_p x \qquad dx \quad = \quad x \quad \log_p x \quad - \quad \int \quad x \quad \frac{1}{x \ln p} dx \quad =$$

$$= x \log_p x - \frac{x}{\ln p} + C.$$

Gdy położymy $\sin x = u$, $\cos x = du$, $e^x = v$, $e^x = dv$ oraz $t = \cos x$, $-\sin x = dt$, to możemy użyć wzór na całkowanie przez części dwukrotnie, a więc liczymy tak

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx.$$

Stąd mamy

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \frac{\sin x - \cos x}{2} + C.$$

Całkowanie funkcji wymiernych: gdy potrzebujemy zgadnąć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx, \qquad \text{gdzie } Q(x) \text{ oraz } P(x) \text{ to wielomiany.}$$

Przypomnijmy, że gdy $Q(x)$ oraz $P(x)$ są wielomianami, to funkcję $x \to \frac{P(x)}{Q(x)}$ nazywamy *wymierną*. Dowolną funcję wymierną możemy przedstawić w postaci sumy wielomianu oraz funkcji wymiernej, dla której stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika: dzieląc wielomian z licznika przez wielomian z mianownika. Skoro umiemy zgadywać całki nieznaczone z wielomianów, to pozostaje nauczyć się zdagywania całek nieoznaczonych z funkcji wymiernych, ale z licznikiem w stopniu mniejszym niż stopień mianownika.

Wyrażenia

$$\frac{A}{(x-P)^k} \qquad \text{lub} \qquad \frac{Bx + C}{[(x-Q)^2 + R^2]^k}$$

– gdzie A, B, C, Q, P oraz R to liczby rzeczywiste, zaś k to liczba naturalna – nazywamy *ułamkami prostymi.*

Twierdzenie. *Funkcja wymierna jest sumą wielomianu oraz ułamków prostych, których mianowniki są dzielnikami wielomianu z mianownika tej funkcji.*

Uwaga. Aby rozłożyć funkcję wymierną na sumę wielomianu oraz ułamków prostych korzystamy z tego, że dowolny wielomian o współczynnikach rzeczywistych jest iloczynę wielomianów stopnia co najwyżej drugiego. Wiadomo, że gdy w miamowniku funkcji wymiernej występuje wielomian stopnia większego niż 4, to nie ma algorytmu, który pozwalałby taki rozkład zgadnąć!

Całka nieoznaczona z funkcji wymiernej jest zawsze postaci

$$W(x) + A \ln U(x) + B \operatorname{arctg} V(x),$$

gdzie $W(x)$ to wielomian, $U(x)$ to funkcja wymierna, zaś $V(x)$ to funkcja liniowa.

$$\frac{x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 27x + 12}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = x - 1 + \frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} :$$

taką równość sprawdzany dzieląc wielomian z licznka prze wielomian z mianownika. Skoro mianownik ma dzielniki $(x-2)^2$, $(x-2)$ oraz $(x-3)$, to

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} = \frac{(B+C)x^2 + (A-5B-4C)x - 3A + 6B + 4C}{(x-2)^2(x-3)}.$$

Liczniki w powyższym wzorze są równe, a więc dostajemy układ równań

A	-	5B	-	4C	=	1,
		B	+	C	=	0,
-3A	+	6B	+	4C	=	-1.

Gdy go rozwiążemy, to $A = -1$, $B = -1$ oraz $C = 2$. Zauważmy, że rozwiązywanie tego układu można skrócić gdy w równość

$$x - 1 = A(x-3) + B(x-2)(x-3) + C(x-2)^2$$

podstawimy $x = 3$, to wyliczymi $C = 2$, zaś dla $x = 2$ dostaniemy $A = -1$.

W rezultacie dostajemy

$$\int \frac{x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 27x + 12}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}\, dx = \int x - 1\, dx + \int \frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{-1}{(x-2)^2}\, dx + \int \frac{-2}{x-2}\, dx + \int \frac{C}{x-3}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{(x-2)} - 2\ \ln|x-2| + 2\ \ln|x-3| + C.$$

Podstawienie Eulera: Gdy $(u, v) \to R(u, v)$ jest funkcją wymierną oraz $A > 0$, to – zgadując całkę nieoznaczoną

$$\int R(\sqrt{Ax^2 + Bx + C}, x)\, dx$$

– kładziemy $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}, x) = \sqrt{A}x + t$. Stąd wyliczamy

$$x = \frac{t^2 - C}{B - 2t\sqrt{A}} \qquad \text{oraz} \qquad dx = \frac{tB - t^2\sqrt{A} - \sqrt{A}C}{(B - 2t\sqrt{A})^2} 2dt.$$

W rezultacie zgadywanie sprowadzamy do całki z funkcji wymiernej:

$$\int R(\sqrt{Ax^2+Bx+C},x)\,dx = \int R\left(x\sqrt{A}+t,\frac{t^2-C}{B-2t\sqrt{A}}\right)\frac{tB-t^2\sqrt{A}-\sqrt{A}C}{(B-2t\sqrt{A})^2}2dt.$$

Gdyby $C>0$, to możemy położyć $\sqrt{Ax^2+Bx+C},x) = xt+\sqrt{C}$. Skąd wyliczamy

$$x=\frac{2t\sqrt{C}-B}{A-t^2} \qquad \text{oraz} \qquad dx=\frac{t^2\sqrt{C}-Bt+A\sqrt{C}}{(A-t^2)^2}2dt.$$

W rezultacie:

$$\int R(\sqrt{Ax^2+Bx+C},x)\,dx = \int R\left(xt+\sqrt{C},\frac{2t\sqrt{C}-B}{A-t^2}\right)\frac{t^2\sqrt{C}-Bt+A\sqrt{C}}{(A-t^2)^2}2dt.$$

Gdybyśmy w pierwiastku trójmianu Ax^2+Bx+C zastąpili wielomianem wyższego stopnia, to bez specjalnych dodatkowych założeń zgadywanie takich całek nieoznaczonych jest niewykonalne w obrębie funkcji elementarnych! Przykładowo

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}}.$$

To samo dotyczy całek $\int\frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{\cos x}}\,dx$ lub $\int e^{\frac{-1}{x^2}}\,dx$. Jednakże dla szeregów potęgowych mamy wzór

$$\int\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

który pozwala znajdywać całki funkcji analitycznych (tj. przedstawialnych w postaci szeregu potęgowego) z dowolną dokładniością.