ZASTOSOWANIA RACHUNKU POCHODNYCH: ALGORYTMÓW RÓŻNICZKOWANIA

Równanie stycznej. Gdy badamy funkcje $y = f(x)$, to równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $(p, f(p))$ ma postać

$$y - f(p) = f^{'}(p)(x - p).$$

Gdy krzywa jest określona w sposób parametryczny, tzn

$$y = y(t) \qquad \text{oraz} \qquad x = x(t),$$

to równanie stycznej w punkcie $(x(r), y(r))$ ma postać

$$\frac{y - y(r)}{x - x(r)} = \frac{y^{'}(r)}{x^{'}(r)},$$

gdzie pochodne z prawej strony równania to pochodne względem parametru.

Kąt przecięcia dwu krzywych: kąt przecięcia się stycznych do tych krzywych, wyznaczamy ze wzoru

$$\text{tg }(\alpha) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2},$$

w którym α to szukany kąt, zaś m_1 oraz m_2 to współczynniki kierunkowe stycznych do krzywych - taki wzór wynika ze wzoru na tangens różnicy dwu kątów.

Równanie normalnej: równanie prostej przecinającej krzywą pod kątem prostym, tzn. prostopadłej do stycznej. Gdy krzywa jest wykresem funkcji $y = f(x)$, to współczynnik kierunkowy stycznej w punkcie $(p, f(p)$ wynosi $f^{'}(p)$, a więc współczynnik kierunkowy normalnej będzie wynosił $\frac{-1}{f^{'}(p)}$. Stąd normalna ma równanie

$$y - f(p) = \frac{p - x}{f'(p)}.$$

Gdy krzywa jest zadana paramertrycznie równaniami $x = x(t)$ oraz $y = y(t)$, to normalna ma równanie

$$(y - y(p))y^{'}(p) = (x(p) - x)x^{'}(p).$$

Gdy funkcja jest rosnąca w przedziale (a, b), to jej pochodna jest nieujemna w tym przedziale.

Gdy funkcja jest malejąca w przedziale (a, b), to jej pochodna jest niedodatnia w tym przedziale.

Z dwu powyższych zzadań wnioskujemy: *Jeśli funkcja jest różniczkowalna w przedziale (a, b), to w punktach będącymi ekstremami lokalnymi tej funkcji pochodna musi być zerem.*

Wypukłość, wklęsłość, punkty przegięcia, asymptoty.

Gdy współczynnik kierunkowy stycznej rośnie - o ile poruszamy sie w dodatnim kierunku osi $0X$, to krzywą o takiej właściwości nazywamy *wypukłą* (krzywa: wykres funkcji różniczkowalnej). Jeśli krzywa jest wypukła, to jej pochodna - funkcja której wartościami są pochodne, jest rosnąca. Stąd wnioskujemy, że dla krzywej wypukłej wyznaczanej przez wykres funkcji $y = f(x)$ stale zachodzi

$$[f^{'}(x)]^{'} = f^{"}(x) \geq 0.$$

Gdy współczynnik kierunkowy stycznej maleje - o ile poruszamy sie w dodatnim kierunku osi $0X$, to krzywą o takiej właściwości nazywamy *wklęślą*. Jeśli krzywa jest wklęsła, to jej pochodna jest malejąca. Stąd wnioskujemy, że dla krzywej wklęsłej wyznaczanej przez wykres funkcji $y = f(x)$ stale zachodzi

$$f^{"}(x) \leq 0.$$

Punkt przegiecia, to punkt oddzielajacy częśc wklęsłą krzywej od części wypukłej - oddziela znaczy, że jedno zjawisko zachodzi w kierunku dodatnim osi $0X$ od punktu; zaś drugie w kierunku ujemnym od punktu.

Prostą $y = Ax + B$ nazywamy *asymptotą* krzywej $y = f(x)$ gdy

$$A = \lim_{x\to+\infty} f^{'}(x) \qquad \text{oraz} \qquad B = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - Ax].$$

Analogicznie określamy asymptotę gdy $x \to -\infty$. Mianowicie, prostą $y = Ax+B$ nazywamy *asymptotą* krzywej $y = f(x)$ gdy

$$A = \lim_{x\to-\infty} f^{'}(x) \qquad \text{oraz} \qquad B = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - Ax].$$

Także prosta $x = C$ bywa nazywana asymptotą (*pionową*) gdy

$$\lim_{x\to C^+} f(x) = \infty \qquad \text{lub} \qquad \infty = \lim_{x\to C^-} f(x).$$

Twierdzenie de l'Hospitala. (Łatwe) *Gdy* $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ *oraz granica* $\lim_{x\to a} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ *istnieje - może być liczbą lub jedną z nieskończoności, to mamy równość*

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Twierdzenie de l'Hospitala. (Trudne) *Gdy* $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ *oraz granica* $\lim_{x\to a} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ *istnieje - może być liczbą lub jedną z nieskończoności, to mamy równość*

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Twierdzenie (Weierstrassa). *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym przyjmuje w tym przedziale wartość największą oraz wartość najmniejszą.* $\square$

Twierdzenie (Lagrange'a). Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ oraz różniczkowalna wewnątrz tego przedziału, to

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f^{'}(a + \Theta(b - a)),$$

gdzie $0 < \Theta < 1$. $\square$

Wniosek (Twierdzenie Rolle'a) *Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ oraz różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Jeśli $f(b) = f(a)$, to znajdziemy liczbę $x \in (a, b)$ taką, że $0 = f^{'}(x)$.* $\square$

Wniosek. *Jeśli $f'(x) = 0$ dla dowolnego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest stała w tym przedziale.* $\square$

Wniosek. *Dwie funkcje o takiej samej pochodnej* – w ustalonym przedziale – *różnią się pomiędzy sobą o stałą* – o ile obie funkcje są różniczkowalne. $\square$

Twierdzenie (Wzór Taylora). *Jeśli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz ciągła w przedziale $[a, b]$, to*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

gdzie $a < \xi < b$. Przy czym gdy we wzorze Taylora położymy $\frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi_n) = R(\xi_n)$ oraz zasze – o ile $a < \xi_n < b$ – zachodzi $lim_{n\to\infty} R(\xi_n) = 0$ to,

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Zaś gdy dodatkowo $a = 0$, to mówimy, że funkcja f daje się rozwinąć a szereg Maclaurina

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0).$$

$$[\ \ln\ (1 + x)]^{'} = \frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Szereg z prawej strony powyższego wzoru jest pochodną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (-1)^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = S(x).$$

Zatem $\ln(1+x) = S(x)+C$. Gdy podstawimy $x=0$, to otrzymiemy $\ln(1+0) = S(0)+C$, skąd wnioskujemy $C=0$. W konsekwencji mamy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}(-1)^{n+1}.$$

Gdy skorzystamy z tego, że szereg potęgowy przedstawiający funkcję $x \to \ln x$ misi być lewostronnie ciągły – twierdzenie Abela– to dostajemy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

Rozważmy wzór

$$[\operatorname{arctg}(x)]' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Podobnie jak poprzednio wnosimy, że szereg z prawej strony jest pochodną szeregu

$$C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}(-1)^n.$$

Zatem gdy podstawimy $x=0$ oraz skorzystamy z $\operatorname{arctg} 0 = 0$, to otrzymiemy

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}(-1)^n.$$

Gdy skorzystamy z tego, że szereg potęgowy przedstawiający funkcję $\operatorname{arctg}(x)$ musi być lewostronnie ciągły – twierdzenie Abela– to dostajemy

$$\operatorname{arctg}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Zauważmy, że oba powyższe rozumowania są poprawne przy założeniu $-1 < x < 1$ i w obu rozumowaniach korzystamy z twierdzenia Abela, aby ustalić coś co zachodzi na końcu rozważanego przedziału.

Twierdzenie (Abela). *Szereg potęgowy sumowalny w jednym z końców swego przedziału zbieżności określa w tym końcu funkcję* (jednostronnie) *ciągłą.* □

Skoro $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}(-1)^{n+1}$, to $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x^n}{n}$. Skąd $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x)$ - $\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} 2$.