ALGORYTMY RÓŻNICZKOWANIA

Gdy ustalimy szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, to szereg

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)'$$

nazywamy jego *pochodną*. Zauważmy, że promienie zbieżności szeregu potęgowego oraz szeregu będącego jego pochodną są takie same; pochodna szeregu potęgowego dla którego $0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \ldots$ wynosi 0; oraz gdy policzymy

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left( \binom{n}{1} x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} \right) = n x^{n-1} = (x^n)',$$

to wnioskujemy, że dla funkcji $x \to f(x)$ przedstawialnej w postaci szeregu potegowego w punkcie $x$ jego pochodną w tym punkcie obliczamy jako granicę *ilorazu różnicowego*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = [f(x)]'.$$

Ten ostatni wzór zwykle bywa przyjmowany jako definicja pochodnej. Jest on przydatny dla ustalenia reguł obliczania pochodnych: algorytmów różniczkowania.

Gdy $A$ oraz $B$ są liczbami, to wprost z definicji dostajemy

$$\textbf{(1)} \qquad [A \cdot f(x) + B \cdot g(x)]' = A \cdot f'(x) + B \cdot g'(x).$$

Gdy $n$ jest liczbą naturalną, to

$$\textbf{(2)} \qquad [x^n]' = n x^{n-1}.$$

$$\textbf{(3)} \qquad [\sin x]' = \cos x.$$

Jest tak, bo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 + \lim_{x\to 0} x \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!} \right) = 1.$$

Skąd wnioskujemy, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} 2 \frac{\sin \frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2})}{h} = \cos x.$$

$$(\mathbf{4}) \qquad\qquad [\cos x]' = -\sin x.$$

Nieco inaczej uzasadnimy tą ostanią równość

$$[\cos x]' = \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sin x.$$

$$(\mathbf{5}) \qquad\qquad [e^x]' = e^x : \text{ gdyż z definicji mamy } \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right]' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

$$(\mathbf{6}) \qquad\qquad \frac{1}{x} = [\ \ln|x|]' :$$

gdyż, korzystając z ciągłosci funkcji $x \to \ln\, x$ możemy policzy

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln|x+h| - \ln|x|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ \ln|1+\frac{h}{x}| = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\ \ln\,(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby naturalnej $a$ zawsze zachodzi $\ln\, a\ \log_a x = \ln\, x$ – bo wystarczy logarytmować stronami równość $x = a^{\log_a x} = a^{\ln\, x} - a^{\ln\, a}$, to mamy

$$(\mathbf{7}) \qquad\qquad [\ \log_a|x|]' = \left[\frac{\ln|x|}{\ln\, a}\right]' = \frac{1}{x\ \ln\, a}.$$

Gdy $a$ jest liczbą dodatnią, to mamy $a^x = e^{x\ \ln\, a}$ i dostajemy

$$(\mathbf{8}) \qquad [a^x]' = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^{\,n} a x^n}{n!}\right]' = \ln\, a\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^{\,n} a}{n!}x^n = a^x\ \ln\, a.$$

**Lemat**. *Funkcja różniczkowalna jest ciągła: w punkcie gdzie pochodna jest liczbą funkcja musi być ciągła.* **Uzasadnienie**. Gdy ciąg $\{h_n\}$ jest zbieżny do zera oraz zachodzi

$$0 \neq g = \lim_{n\to 0} f(x+h_n) - f(x),$$

to musi być

$$\infty = \lim_{n\to 0}\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}.$$

Pierwsza równość jest prawdziwa dla jakiegoś ciągu $\{h_n\}$, o ile funkcja $f$ nie jest ciągła w punkcie $x$; zaś druga mówi, że pochodna w tym punkcie nie może być liczbą. □

$$(\mathbf{9}) \qquad\qquad \left[\frac{1}{g(x)}\right]' = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Skoro wzór dotyczy funkcji ciągłej - z mocy lematu, to wyliczamy

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x) - g(x+h)}{h}\frac{1}{g(x+h)g(x)} = -g'(x)\frac{1}{g(x)g(x)}.$$

$$(\mathbf{10}) \qquad [f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Dla uzasadnienie ponownie skorzystamy z ciągłosci funkcji $f$ oraz $g$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$= f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Ze wzorów (**9**) oraz (**10**) wnioskujemy

$$(\mathbf{11}) \qquad \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Mianowicie

$$\left[f(x)\frac{1}{g(x)}\right]' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left[\frac{1}{g(x)}\right]' =$$

$$= f'(x)\frac{g(x)}{[g(x)]^2} + f(x)\left[\frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}\right] = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

$$(\mathbf{12}) \qquad [\,\mathrm{tg}\, x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \,\mathrm{tg}^{\,2} x.$$

$$(\mathbf{13}) \qquad [\,\mathrm{ctg}\, x]' = \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \,\mathrm{ctg}^{\,2} x.$$

**Lemat**. *Jeśli funkcja $f$ jest różniczkowalna w przedziale $(a,b)$, to funkcja do niej odwrotna $f^{-1}$ jest różniczkowalna w przedziale od $f(a)$ do $f(b)$ oraz zachodzi* $[f^{-1}(f(x))]' = \dfrac{1}{f'(x)}$. **Uzasadnienie**. Zakładamy $y = f(x)$ i kładziemy $t = f(x+h) - f(x)$. Skąd wyliczamy $y + \varepsilon = f(x+h)$; $f^{-1}(y+\varepsilon) = h + x$; $h = f^{-1}(y+\varepsilon) - f^{-1}(y)$.Wtedy

$$[f^{-1}(y)]' = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{-1}(y+\varepsilon)-f^{-1}(y)}{\varepsilon} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Gdy położymy $f(x) = y$, to dostajemy

$$(\mathbf{14}) \qquad [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Gdy położymy $y = \sin x$, czyli $y = \arcsin x$, to mamy

$$(\mathbf{15}) \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pododnie jak wyżej wnioskujemy gdy położymy $x = \cos y$ lub $x = \text{tg } y$ lub $x = \text{ctg } y$:

$$(\mathbf{16}) \qquad (\arccos x)^{'} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\mathbf{17}) \qquad (\text{arctg } x)^{'} = \frac{1}{1+\text{tg }^2 x} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\mathbf{18}) \qquad (\text{arcctg } x)^{'} = \frac{-1}{1+\text{ctg }^2 x} = \frac{-1}{1+x^2};$$

Pochodną złożenia funkcji wyliczamy z wzoru

$$(\mathbf{19}) \qquad [f(g(x))]^{'} = f^{'}(g(x)) \cdot g^{'}(x).$$

Wzór powyższy wymaga sybtelnego uzasadnienie gdy funkcja $g$ przyjmuje stale taką samą wartość na ciągu o granicy $x$, o ile o musimy wyliczyć pochodną $g^{'}(x)$. W pozostałych przypadkach jest on natychmiastową konsekwencją wzoru na iloczyn granic.

Gdy $a$ jest liczbą – niekoniecznie liczbą naturalną jak było w (**2**), to

$$(\mathbf{20}) \qquad [x^a]^{'} = ax^{a-1}:$$

gdyż $x^a = e^{a\ln x}$ oraz $[e^{a\ln x}]' = x^a(a\ln x)' = ax^{a-1}$.

Gdy położymy $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ lub $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, to nietrudno wyliczamy funkcje odwrotne do tak zdefiniowanych funkcji – wymaga to rozwiązania stosownych dwumianów, $x \to \text{arsinh } x = \ln\ (x + \sqrt{x^2+1})$ oraz $x \to \text{arcosh } x = \ln\ (x + \sqrt{x^2-1})$. Wtedy dostajemy:

$$(\mathbf{21}) \qquad [\sin\text{h } x]^{'} = \cos\text{h } x;$$

$$(\mathbf{22}) \qquad [\sin\text{h } x]^{'} = \cos\text{h } x;$$

$$(\mathbf{23}) \qquad [\text{arsinh } x]^{'} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$(\mathbf{24}) \qquad [\text{arcosh } x]^{'} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$